

Agrégation féminine 1951

Mathématiques Élémentaires.

On donne une sphère fixe (O), ayant pour centre un point O et pour rayon ρ , et le plan fixe P tangent à la sphère (O) au point F.

On désigne par (S) tout cône circonscrit à la sphère (O) n'ayant pas son sommet dans le plan P, et par (C) la section (conique ou cercle) d'un tel cône par le plan P. Les cylindres circonscrits à (O) et dont les génératrices ne sont pas parallèles à P seront considérés comme des cônes (S) dont le sommet est rejeté à l'infini.

L'objet du problème est d'étudier quelques familles de courbes (C) et les cônes (S) correspondants.

Certaines questions font intervenir une transformation par polaires réciproques, dans le plan P, par rapport à un cercle directeur ayant F pour centre : on appellera (T) une telle transformation et (γ) les transformées par (T) des sections (C).

(Les différentes parties du problème peuvent, dans une large mesure, être traitées indépendamment les unes des autres. En rédigeant la solution, les candidates voudront bien respecter strictement, sinon l'ordre des questions, du moins le numérotage indiqué par l'énoncé).

I. — Définir les lieux géométriques des sommets S des cônes (S) dans chacune des trois hypothèses suivantes :

1° Les courbes (C) sont des coniques dont la directrice D associée au foyer F passe par un point fixe donné R.

2° Les courbes (C) admettent deux droites données L_0 et L'_0 comme droites conjuguées.

Soit (C_0) la famille des courbes (C) ainsi obtenues : caractériser les transformées (γ_0) des courbes (C_0) par une transformation (T). Montrer qu'il existe une infinité de couples de droites (L, L') qui sont conjuguées par rapport à toutes les courbes (C_0) .

Etudier les cas particuliers suivants :

— l'une des droites données L_0 ou L'_0 passe par le foyer F ;

— les droites données L_0 et L'_0 sont symétriques par rapport à F.

3° Les courbes (C) admettent une droite donnée L comme polaire d'un point également donné M.

Etudier les cas particuliers où la droite L, ou bien le point M, sont rejetés à l'infini.

II. — 1° On désigne par Π le plan tangent à la sphère (O) parallèle au plan P et par (T) la section d'un cône (S) par ce plan.

Lorsque les courbes (C) et (T) situées sur un même cône (S) sont des coniques à centre, on représente par a et a' les demi-longueurs de leurs axes focaux, par c et c' leurs demi-distances focales, par p et p' leurs paramètres, et par b et b' les demi-longueurs de leurs axes non-focaux, définies par les

relations : $b^2 = |a^2 - c^2|$, $b'^2 = |a'^2 - c'^2|$. Ces deux courbes se correspondent en général dans deux homothéties dont l'une a pour centre le sommet S ; préciser la position de l'autre centre d'homothétie.

Démontrer les relations : $b.b' = p.a' = p'.a = \rho^2$.

2° Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) dont le demi-axe non-focal a une longueur donnée b . On distinguera le cas des ellipses et le cas des hyperboles.

3° Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) dont le paramètre a une valeur donnée p .

Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) dont le demi-axe focal a une longueur donnée a .

4° Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) ayant une excentricité donnée e .

III. — 1° On donne dans le plan P un point fixe R ; on considère les coniques (C) dont la directrice D associée au foyer F' passe par le point R, et qui vérifient de plus l'une des trois conditions suivantes :

— ou bien le demi-axe non-focal a une longueur donnée b (en distinguant le cas des ellipses et le cas des hyperboles) ;

— ou bien le demi-axe focal a une longueur donnée a ;

— ou bien l'excentricité a une valeur donnée $e \neq 1$.

On obtient ainsi trois familles de coniques (C) que l'on désignera respectivement par (C_1) , (C_2) , (C_3) .

Définir, pour chacune de ces trois familles : le lieu géométrique des foyers autres que F ; l'enveloppe des directrices autres que D ; le lieu géométrique des sommets S des cônes (S) ; l'enveloppe des coniques de la famille. Étudier les familles (γ_1) , (γ_2) , (γ_3) des transformées des coniques (C_1) , (C_2) , (C_3) par une transformation (T).

2° Parmi les coniques (C) admettant la même directrice D associée au foyer F, on considère les coniques (C') et (C'') ayant pour excentricités deux nombres inverses e et $1/e$. Soient S' et S'' les sommets des cônes (S') et (S'') correspondant à ces deux coniques.

Démontrer que, lorsque la droite D reste fixe et lorsque l'excentricité e varie, les deux sphères orthogonales à la sphère (O) ayant pour centres les points S' et S'' ont pour centres d'homothétie deux points fixes, et que les plans des deux coniques communes aux deux cônes (S') et (S'') sont deux plans fixes.

Comment varient ces deux centres d'homothétie et ces deux plans lorsque la directrice D tourne autour d'un point fixe donné R ?

Mathématiques Spéciales.

On désigne par la notation (T) toute enveloppe plane de troisième classe, non décomposée, possédant la propriété suivante : il existe dans le plan une droite D telle que deux des tangentes à l'enveloppe menées par n'importe quel point de D soient rectangulaires. Cette droite D sera appelée directrice de l'enveloppe (T).

I. — Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , on représente par (Γ_0) toute enveloppe (Γ) admettant comme directrice la droite D support de l'axe Ox .

1° Former l'équation tangentielle des enveloppes (Γ_0) . On montrera, en tenant compte, en particulier, de la condition de non-décomposition, que toute enveloppe (Γ_0) admet nécessairement la directrice D comme tangente, et que son équation peut se mettre sous la forme :

$$u[A(u^2 - v^2) + 2Buv] + [A'(u^2 - v^2) + 2B'uv]h + Cvh^2 = 0$$

où A, B, A', B', C , sont des constantes et u, v, h , les coordonnées courantes d'une droite.

Les coefficients A, B, A', B', C seront, dans la suite, supposés réels.

2° Déterminer l'enveloppe (L) des symétriques de la directrice D par rapport aux tangentes à (Γ_0) . Démontrer que la courbe (Γ_0) est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à D et à (L) .

Lorsque le coefficient C n'est pas nul, démontrer que l'enveloppe (Γ_0) possède deux foyers réels F et F' , et que toute tangente à (Γ_0) , coupant la directrice D en un point M , est l'une des bissectrices de l'angle (MF, MF') . Examiner le cas où le coefficient C est nul.

Dans quel cas l'enveloppe (Γ_0) est-elle unicursale ?

3° Lorsque le coefficient C n'est pas nul, démontrer qu'il existe une infinité de rectangles $MPM'P'$ circonscrits à (Γ_0) , ayant deux sommets opposés M et M' sur la directrice D . Etudier la correspondance entre les points M et M' ; déterminer l'enveloppe de la droite PP' et celle du cercle circonscrit au rectangle $MPM'P'$. Démontrer que le lieu des points P et P' possède la propriété dualistique de la propriété caractéristique des enveloppes (Γ) .

4° Etudier la disposition des points à l'infini et des asymptotes d'une enveloppe (Γ_0) non-unicursale ; où se trouve le point de rencontre de deux asymptotes rectangulaires ?

II. — Etudier les réciproques des différentes propriétés des enveloppes (Γ) qui ont été établies aux deux premiers alinéas du paragraphe I, 2°.

2° Un plan étant rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , on considère l'hyperbole (H) définie par l'équation : $xy = a^2$ a étant une constante positive donnée ; soit T une tangente (ou une asymptote) à cette hyperbole. Former l'équation tangentielle du lieu géométrique (γ) des centres des cercles tangents à l'hyperbole (H) et à la droite T .

Déterminer, lorsque la tangente T varie, l'enveloppe des asymptotes des courbes (γ) , ainsi que le lieu de leurs points de rebroussement.

Construire la courbe (γ) uniquement dans le cas particulier où T est la tangente en l'un des sommets de l'hyperbole (H) .

III. — 1° Démontrer que toute enveloppe plane (E) de troisième classe, non décomposée, admettant la droite de l'infini comme tangente simple et quatre asymptotes, réelles ou imaginaires, deux à deux rectangulaires, est une enveloppe (Γ) .

Le plan étant rapporté à un triangle de référence ayant pour sommets

un point réel et les deux points cycliques, on désigne par p, q, r , les coordonnées courantes d'une droite par rapport à ce triangle. A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients de la forme du troisième degré $f(p, q, r)$ pour que l'équation : $f(p, q, r) = 0$ représente une enveloppe (E) ? Former l'équation de la directrice correspondante.

2° On considère deux enveloppes (E₁) et (E₂) de la famille (E), ayant respectivement pour équations, par rapport au triangle de référence qui vient d'être défini : $f_1(p, q, r) = 0$ et $f_2(p, q, r) = 0$, et le faisceau linéaire d'enveloppes définies par l'équation : $f_1(p, q, r) + \lambda f_2(p, q, r) = 0$, où λ désigne un paramètre arbitraire.

En supposant les deux enveloppes (E₁) et (E₂) choisies de telle sorte que toutes les enveloppes non-décomposées du faisceau soient des enveloppes (E), et en se bornant au cas où les directrices de (E₁) et de (E₂) sont concourantes en un point à distance finie que l'on prendra comme sommet du triangle de référence, démontrer que les tangentes communes à ces deux enveloppes sont deux à deux rectangulaires, et étudier la disposition de leurs foyers.

Calcul différentiel et intégral.

Si $P(x, y)$ est une fonction harmonique des deux variables x et y , la surface S , définie dans un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz , par l'équation : $z = P(x, y)$ sera dite « surface harmonique ».

La fonction $Q(x, y)$ étant telle que $P + iQ$ soit une fonction analytique de la variable complexe $x + iy$, la surface S' définie par l'équation : $z = Q(x, y)$ sera dite « conjuguée » de S .

On fait tourner la surface S' de l'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oz ; on obtient ainsi une surface S_1 . Soient M et M' les deux points de S et de S' ayant même projection m sur le plan xOy , et soit M_1 le point de S_1 déduit de M' par la rotation considérée.

I. — Montrer que les normales à S et à S_1 aux points M et M_1 sont parallèles. La surface S' étant donnée, la parallèle Δ , menée par m à la normale M_1N_1 à S_1 (ou à la normale MN à S), engendre une congruence (C), qui admet le plan xOy comme *surface moyenne*. (On rappelle que la surface moyenne d'une congruence de droites est le lieu du milieu du segment formé par les deux foyers sur chaque droite de la congruence).

Inversement, on considère une surface Σ , telle que la parallèle à la normale en chaque point de Σ , menée par la projection de ce point sur le plan xOy , engendre une congruence admettant le plan xOy comme surface moyenne : montrer que Σ est une surface harmonique.

II. — Parmi les congruences (C) obtenues comme ci-dessus, à partir d'une surface S harmonique, s'en trouve-t-il qui soient des congruences de normales ? Trouver les surfaces S correspondantes.

III. — Soit I un point fixe de l'espace, non situé sur xOy . Une surface harmonique S étant donnée, on projette chacun de ses points M en m sur xOy , et par le point I on mène la parallèle Im' à la normale en M à S, jusqu'à la rencontre en m' avec xOy . Montrer que la correspondance entre m et m' est une *transformation conforme inverse*.

(On rappelle qu'une transformation conforme est *directe* ou *inverse* suivant qu'elle conserve ou qu'elle ne conserve pas le sens des angles).

Réciproquement, soit, dans le plan xOy , une transformation conforme inverse arbitraire, faisant correspondre à tout point m un point m' . On joint le point fixe I à m' , et l'on mène par m la droite Δ parallèle à Im' : l'ensemble de ces droites Δ forme une congruence (C) de l'espèce considérée au paragraphe I.

IV. — On suppose que la transformation (m, m') , dont on vient de parler, est celle qui fait correspondre à m son point inverse dans une inversion géométrique de centre O et de puissance donnée. Trouver les surfaces S et S' correspondantes.

V. — Soient S et S' deux surfaces harmoniques conjuguées, et M et M' deux points de ces surfaces ayant même projection m sur le plan xOy . Soit δ la perpendiculaire commune aux normales MN et M'N' à S et à S'. Par un point fixe I, non situé sur xOy , on mène la parallèle à δ jusqu'à la rencontre en m_1 avec le plan xOy .

Montrer que la correspondance entre m et m_1 est une *transformation conforme directe*.

VI. — Inversement, étant donnée une transformation conforme directe entre deux points m et m_1 du plan xOy , et un point fixe I (non situé sur xOy), on peut trouver des surfaces harmoniques conjuguées S et S', telles qu'en appliquant la construction géométrique précédente (§ V), on obtienne cette correspondance (m, m_1) actuellement donnée.

Déterminer ces surfaces S et S' en supposant que la correspondance entre les deux points m et m_1 est définie par la relation : $x_1 + iy_1 = A \operatorname{ch}(x + iy)$, A étant une constante réelle donnée. (La notation *ch* représente le cosinus hyperbolique).

VII. — Dans les mêmes conditions qu'au paragraphe V, on considère la droite D, parallèle à δ , menée par chaque point m , projection de M sur xOy . Les droites D engendrent une congruence (K). En général, cette congruence (K) n'a pas le plan xOy comme surface moyenne. Déterminer les surfaces S particulières pour lesquelles la surface moyenne de (K) coïncide avec le plan xOy .

Mécanique rationnelle.

On considère un plan matériel horizontal fixe II, et une tige rigide fixe, de section négligeable, perpendiculaire au plan II en un point fixe O_1 . Soit $O_1x_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle direct, fixe, ayant pour origine le point

O_1 ; l'axe O_1z_1 , confondu géométriquement avec la tige, est dirigé suivant la verticale ascendante.

Un disque d , circulaire, homogène, d'épaisseur négligeable, ayant pour centre O , pour rayon r et pour masse m , est muni d'une tige rigide dirigée suivant l'axe Oz du disque. Cette tige Oz , dont on néglige la masse et la section, est astreinte à rencontrer la tige fixe O_1z_1 en un point A , variable à la fois sur Oz et sur O_1z_1 ; cette liaison est bilatérale et sans frottement. Le disque d est placé sur le plan Π qu'il touche par son bord en un point I , variable tant sur Π que sur la circonférence formant le bord du disque.

On ne s'occupera pas des difficultés que soulèveraient une rencontre éventuelle du disque d avec la tige O_1z_1 , ou bien une rencontre éventuelle de la tige Oz soit avec le plan Π , soit avec le disque D dont il sera question dans les parties II et III du problème, et on supposera que les dimensions du plan Π , ainsi que les longueurs des tiges Oz et O_1z_1 , sont telles que les liaisons précédemment décrites ne cessent pas d'être réalisées au cours du mouvement.

Les paramètres déterminant la position du système seront la distance $\varrho = O_1I_1$, et les angles d'Euler ψ , θ , φ , qui déterminent la position par rapport au trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$, d'un trièdre trirectangle direct $Oxyz$, lié au disque d (l'axe Oz étant dirigé suivant la tige définie plus haut, et l'axe Ox suivant un rayon fixe par rapport au disque d), c'est-à-dire :

$$(O_1x_1, Ou) = \psi, \quad (O_1z_1, Oz) = \theta, \quad (Ou, Ox) = \varphi,$$

Ou étant un axe perpendiculaire à Oz et à O_1z_1 .

On désignera par g l'accélération due à la pesanteur.

On aura intérêt à utiliser un système de référence auxiliaire, formé par un trièdre mobile $IXYZ$ ayant pour origine le point I , l'axe IY étant le prolongement de O_1I , et IZ étant équipollent à O_1z_1 . Dans ce système de référence, les composantes de la réaction du plan Π sur le disque d seront désignées par X , Y , Z , et les composantes de la réaction de O_1z_1 sur Oz par X_1 , Y_1 , Z_1 .

I. — 1° Former les équations du mouvement du disque d lorsque le contact au point I a lieu sans frottement.

L'angle θ ou la distance ϱ peuvent-ils rester stationnaires ?

2° On suppose maintenant, et *jusqu'à la fin du problème*, que le plan Π est rugueux, et que le coefficient de frottement est assez grand pour que le disque d roule sans glisser sur le plan Π .

Former les équations du mouvement du disque ; montrer que leur intégration se ramène à deux quadratures. Calculer les réactions.

3° Dans ce paragraphe seulement, on néglige l'action de la pesanteur, et on suppose que chaque élément superficiel du disque d est soumis de la part du point O_1 à une attraction proportionnelle à la distance et à la masse de l'élément, k^2 étant la valeur de cette attraction pour une masse égale à l'unité de masse située à une distance du centre O_1 égale à l'unité de longueur.

On rappelle que le disque d roule sans glisser sur Π .

Etudier, dans ces hypothèses, le mouvement du disque. Quels sont les différents cas possibles ?

II. — Dans les parties II et III, l'action de la pesanteur n'est plus supposée négligeable, et les forces attractives considérées au paragraphe I, 3° n'existent plus.

On adjoint au système précédent un deuxième disque D, ayant la forme d'un cylindre de révolution, dont on appelle R le rayon et h la hauteur, et dont l'axe de révolution coïncide avec O_1z_1 ; ce disque est homogène et a pour masse M. On suppose que D peut glisser le long de O_1z_1 et tourner autour de cet axe, la liaison étant réalisée sans frottement.

Dans la partie II, le disque D est placé au-dessus du disque d , sa base inférieure étant en contact avec le bord du disque d en un point variable J ; il y a frottement au contact en J entre les deux disques, le coefficient de frottement étant donné, égal à f . (On ne s'occupera pas de ce qui se passe lorsque les conditions géométriques définies ci-dessus cessent d'être réalisées).

On rappelle que le disque d roule sans glisser sur le plan II.

On désigne par ζ la cote, par rapport au trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$, du centre de gravité G du disque D, par α l'angle de l'axe O_1x_1 avec un axe horizontal GU lié au disque, et par X_2, Y_2, Z_2 les composantes, par rapport au trièdre auxiliaire IXYZ, de la réaction de D sur d .

1° Former les équations déterminant le mouvement du système des deux disques d et D.

L'angle θ peut-il rester stationnaire ?

2° Etudier le début du mouvement dans les conditions initiales suivantes :

$$\varphi_0 = r/2, \quad \text{tg } \theta_0 = 3, \quad \theta'_0 = \omega, \quad \psi'_0 = 0, \quad \alpha'_0 = 2\omega,$$

ω étant une constante positive donnée (θ', ψ' , et α' sont les dérivées par rapport au temps).

3° Etudier le mouvement des deux disques quand le coefficient de frottement f est assez grand pour assurer le roulement sans glissement de d sur D. Calculer, dans ce cas, les réactions aux contacts en A, I, J.

III. — Les conditions décrites au début de la partie II étant toujours réalisées pour le disque D, sauf la condition de contact avec le disque d , on place le disque D dans une position où son centre de gravité a pour cote : $O_1G = 4r + h/2$, et on l'abandonne à partir de cette position, sans vitesses initiales ; au cours de sa chute, le disque D vient, à un certain instant t_0 , heurter le disque d . On suppose que le mouvement du disque d est tel qu'à cet instant t_0 , l'angle θ et les dérivées ψ' et θ' ont pour valeurs : $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$,

$\psi'_0 = \theta'_0 = \omega$, ω étant une constante positive donnée.

Le coefficient de Newton e (coefficient d'élasticité en J relatif à D et d) est donné ($0 \leq e \leq 1$), ainsi que le coefficient de frottement f entre les disques d et D.

On rappelle que d roule sans glisser sur le plan II.

Déterminer l'état des vitesses du système immédiatement après le choc.
(On pourra se borner à achever les calculs en faisant sur les données une hypothèse simplificatrice que l'on choisira).
