

Certificat d'aptitude à l'Enseignement dans les Collèges 1951

Composition de Mathématiques (5 heures).

I. -- On donne un cercle (O), de centre O et de rayon R, et sur ce cercle deux points fixes A et B, de milieu I. Un point M variable décrit le cercle (O).

1° Montrer que le lieu de l'orthocentre H du triangle AMB est le cercle (O₁) symétrique de (O) par rapport à AB. Etudier le triangle *amb* formé par les pieds de ses hauteurs (*a* pied de la hauteur issue de A, ...) lieux des sommets, enveloppes des côtés, lieu du centre du cercle circonscrit au triangle *amb*. Comparer les deux triangles *amb* et *a'm'b'* relatifs à deux points M et M' situés sur une même perpendiculaire à AB.

2° On définit les positions de A et M sur (O) par les angles

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \alpha \text{ fixe et } (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi \text{ variable,}$$

que font les rayons OA et OM avec la médiatrice orientée Ox du segment AB.

Calculer l'aire du triangle *amb* en fonction de α et de φ . Pour quelles positions de M atteint-elle ses valeurs extrêmes ? Déterminer M pour que cette aire ait une valeur arithmétique donnée ; discuter.

Evaluer le périmètre du triangle *amb* ; déterminer M pour que ce périmètre ait une valeur donnée ; discuter. Indiquer une solution géométrique de cette question.

3° Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH conserve une grandeur fixe et reste orthogonal à un cercle fixe (I). Le cercle (Ω) admet avec les cercles (O) et (O₁) deux axes radicaux Δ et Δ_1 se coupant en J ; rôle de J dans le triangle MHI, lieu de J. Montrer que Δ et Δ_1 enveloppent deux ellipses (*e*) et (*e*₁).

II. — On donne une parabole (P) de paramètre p , et sur cette parabole deux points fixes A et B, de milieu I, symétriques par rapport à son axe. Un point M variable décrit la parabole (P).

1° Etablir la relation $\overline{mA} \cdot \overline{mB} = 2p \cdot \overline{mM}$, où m est la projection orthogonale de M sur AB et où la mesure algébrique $\overline{mM}$ est comptée dans un sens convenable. Lieu de l'orthocentre H du triangle AMB.

Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH reste orthogonal à un cercle fixe (I). Trouver l'enveloppe du cercle (Ω) et le lieu (II) de son centre Ω . Déterminer les points communs à (II) et (I) ; préciser la position relative de ces courbes en ces points ; discuter.

2° Inversement, on donne une parabole (II) ; la normale en un point fixe K de (II) coupe l'axe de (II) en I. Sur la perpendiculaire en I à cet axe on porte $IA = IB = IK$, de part et d'autre de I. Montrer qu'à tout point Ω de (II) on peut associer deux points M et H symétriques par rapport à Ω et tels que chacun des quatre points A, B, M, H soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Lieux des points M et H quand Ω décrit (II).

III. — On donne une ellipse (E), de longueurs d'axes $2a$ et $2b$, et sur cette ellipse deux points fixes A et B, de milieu I, symétriques par rapport à son axe focal. Un point M variable décrit l'ellipse (E).

1° Etablir la relation $\overline{mM} \cdot \overline{mN} = \frac{a^2}{b^2} \overline{mA} \cdot \overline{mB}$, où m est la projection orthogonale de M sur AB et N le second point de (E) sur la projetante mM . Montrer que le lieu de l'orthocentre H du triangle AMB est une ellipse (E_1) affine de (E). Déterminer les points communs à (E) et (E_1) ; discuter. Comparer les excentricités de (E) et (E_1).

2° Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH reste orthogonal à un cercle fixe (I) et que le lieu (L) de son centre Ω est une ellipse dont on déterminera l'excentricité.

Montrer que le rapport du rayon de (Ω) et de la distance de son centre à une droite fixe reste constant quand Ω décrit (L). En déduire, en utilisant les foyers de (L), que l'enveloppe de (Ω) se compose de deux cercles. Déterminer les points communs à (L) et (I) ; préciser la position relative de ces courbes en ces points ; discuter.

3° Etant donnée une ellipse (L) de foyers F et F', on rappelle qu'il est possible, d'une infinité de manières, de considérer tout point Ω de (L) comme le centre d'un cercle (Ω) tangent à deux cercles fixes (C) et (C') de centres F et F'. Le diamètre de (Ω) parallèle à FF' coupe (Ω) en M et M'. Lieux de M et M' quand Ω décrit (L). Est-il possible de trouver deux points fixes A et B, tels que pour tout couple MM', chacun des quatre points A, B, M, M' soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres ?

Corrigé d'un exercice de Mathématiques (4 heures).

Le candidat donnera de ce problème un corrigé, aux aspects variés, susceptible d'être présenté aux élèves d'une classe de Mathématiques.

I. — a) Soient, dans un plan orienté, deux points fixes B et C.

Trouver le lieu géométrique des points M du plan tels que, si (MB, MC) désigne un angle orienté de droites non orientées, on ait :

$$(MB, MC) = \alpha \left(\text{mod. } \frac{\pi}{n} \right)$$

ou, avec une autre notation, $(MB, MC) = \alpha + k \frac{\pi}{n}$.

α est une mesure angulaire donnée, n est un entier positif donné, k est un entier positif, nul ou négatif arbitraire.

b) Déterminer tous les points M tels que soient vérifiées simultanément les équations $(MB, MC) \equiv 0 \left(\text{mod. } \frac{\pi}{n} \right)$, $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}$.

Ces points sont les sommets d'un polygone P_1 convexe inscrit dans un cercle ; on numérote ces points $M_0, M_1, M_2, \dots$, à partir de l'un d'eux dans l'ordre où on les rencontre en décrivant le cercle dans le sens direct. Lorsqu'on joint ces points de p en p on obtient un nouveau polygone P_p . Comment, connaissant n , doit-on choisir p pour que les polygones P_1 et P_p aient le même nombre de côtés ? Justifier ce choix.

c) Trouver une inversion dans laquelle les points M ont pour homologues les sommets M' d'un polygone régulier. On désigne par Q_1 et Q_p les polygones réguliers convexe et étoilés admettant pour sommets tous les points M' . Dessiner, pour $n=6$, les polygones P_1, P_p d'une part, les polygones Q_1, Q_p d'autre part.

II. — a) Les points B et C sont fixes et le point A décrit un cercle (Γ) passant par B et C. Trouver le lieu géométrique des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC. Donner d'abord de cette question une solution générale permettant d'atteindre d'emblée l'ensemble du lieu ; puis distinguer sur ce lieu global les lieux partiels du centre du cercle inscrit et de chacun des centres des cercles exinscrits respectivement opposés aux sommets A, B, C.

b) On désigne maintenant plus précisément par M le centre du cercle exinscrit opposé au sommet A, et par m le rapport des distances du point M aux sommets C et B pris dans cet ordre : $MC = m \cdot MB$.

Construire le triangle ABC, connaissant le côté BC, le cercle circonscrit (Γ) et le rapport m . Discuter.

c) Résoudre trigonométriquement le triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, le rayon R du cercle circonscrit (Γ) et le rapport $\frac{MC}{MB} = m$, M étant toujours le centre du cercle exinscrit opposé au sommet A. Discuter.

d) On considère l'inversion de pôle C qui conserve B. Que devient la figure étudiée au paragraphe II, a ? Peut-on en déduire une nouvelle solution de II, b ?

N.-B. — Les discussions seront traitées relativement au paramètre m supposé inférieur à 1. On désignera par α l'angle aigu inscrit dans le cercle (Γ) et dont les côtés passent respectivement par les points B et C.