

## Certificat d'aptitude à l'Enseignement du Second Degré 1951

### Mathématiques (5 heures).

I. — Dans un plan orienté on donne une droite fixe  $\Delta$  et un point  $\omega$  non situé sur  $\Delta$ .

Soient A, B, C trois points de  $\Delta$  tels qu'on ait, entre angles orientés de droites, les égalités :

$$(1) \quad (\omega A, \omega B) = (\omega B, \omega C) = \frac{\pi}{3} \text{ à un multiple près de } \pi$$

1° Le cercle  $\Gamma_A$  ayant son centre sur  $\Delta$  et passant par A et  $\omega$  porte un arc  $\omega A$  qui n'a en commun avec  $\Delta$  que le point A ; soit  $\omega\alpha$  la *demi-droite* tangente en  $\omega$  à cet arc  $\omega A$ . Soient de même  $\omega\beta$  et  $\omega\gamma$  les demi-droites analogues obtenues à partir de B et C.

Montrer qu'on a, entre angles orientés de *demi-droites*, les égalités :

$$(\overrightarrow{\omega\alpha}, \overrightarrow{\omega\beta}) = (\overrightarrow{\omega\beta}, \overrightarrow{\omega\gamma}) = \frac{2\pi}{3} \text{ à un multiple près de } 2\pi.$$

2° Le cercle  $\Gamma_A$  précédent coupe le cercle de diamètre BC en un point P situé par rapport à  $\Delta$  du même côté que  $\omega$ . Sous quel angle le coupe-t-il ?

Soient de même Q et R les points analogues sur les cercles de diamètres CA et AB. Montrer que le cercle (G) passant par les trois points P, Q, R est tangent aux trois cercles de diamètres BC, CA, AB.

Montrer que le cercle (G) reste fixe quand,  $\omega$  restant fixe, les points A, B, C varient sur  $\Delta$  en satisfaisant toujours aux conditions (1).

Calculer, en fonction de la distance  $d$  de  $\omega$  à  $\Delta$ , le rayon de (G) et la distance de son centre à  $\Delta$ .

Que peut-on dire du cercle AQR et des cercles analogues BRP et CPQ ?

II. — On donne dans le plan orienté une droite fixe  $\Delta$  et sur elle trois points distincts *quelconques* A, B, C.

O étant un point du plan, non situé sur  $\Delta$ , on appelle  $O\alpha$  la demi-droite tangente à l'arc OA du cercle  $\Gamma_A$  orthogonal à  $\Delta$  en A, cet arc n'ayant en commun avec  $\Delta$  que le point A ; on appelle  $O\beta$  et  $O\gamma$  les demi-droites analogues.

1° Montrer qu'il existe une position  $\omega$  et une seule du point O, telle qu'on ait, entre angles orientés de *demi-droites*, les égalités :

$$(\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}) = (\overrightarrow{O\beta}, \overrightarrow{O\gamma}) = \frac{2\pi}{3} \text{ à un multiple près de } 2\pi.$$

2° On choisit sur  $\Delta$  une origine I et un axe  $Ix$  ; on appelle  $a, b, c$  les abscisses de A, B, C. Calculer en fonction de  $a, b, c$ , les longueurs  $\omega A, \omega B, \omega C$ . Calculer l'ordonnée de  $\omega$  sur l'axe  $Iy$ , déduit de  $Ix$  par rotation de  $\frac{\pi}{2}$ .

3° Les points A et B restant fixes et C décrivant  $\Delta$ , trouver les lieux des points  $\omega, P$  et Q. Trouver le lieu du centre du cercle (G) ; montrer que le cercle (G) enveloppe, outre le cercle de diamètre AB, un second cercle fixe dont on précisera la position ; montrer que (G) reste orthogonal à un cercle fixe.

III. — Sur la droite fixe  $\Delta$ , on donne maintenant quatre points distincts *quelconques* A, B et A', B'.

A tout point O du plan, non situé sur  $\Delta$ , on associe, comme il a été défini au paragraphe II, les quatre demi-droites  $O\alpha, O\beta$  et  $O\alpha', O\beta'$ .

1° Construire les points O définis par les relations suivantes entre angles orientés de *demi-droites* :

$$(\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}) = (\overrightarrow{O\alpha'}, \overrightarrow{O\beta'}) = \frac{2\pi}{3} \text{ à un multiple près de } 2\pi.$$

2° Discuter le nombre des solutions de ce problème : montrer qu'il dépend seulement de la valeur du birapport :  $\lambda = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'B}} : \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}$

et donner la valeur limite de  $\lambda$ . A cet effet, on pourra, par exemple, utiliser l'inversion de pôle  $A'$  qui échange  $A$  et  $B$ .

3° Les points  $A$  et  $B$  restant fixes,  $A'$  et  $B'$  varient de telle façon que le problème précédent conduise à un point solution  $O$  et un seul (solution double).

Etudier alors le cercle  $OA'B'$  ; trouver le lieu  $(H)$  de son centre  $H$  et préciser les éléments de  $(H)$  par rapport à  $A$  et  $B$  ; trouver son enveloppe ; montrer qu'il reste orthogonal à un cercle fixe.

---