

TEXTES DE CONCOURS 1951

Concours général des Lycées et Collèges

Classe de Première.

NOTE. — Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation de la solution. Il est recommandé, en particulier, de dessiner les figures sur une feuille séparée avec un numéro de renvoi.

Problème

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés d'un polyèdre dont la définition sera donnée dans la deuxième partie (II) ; la question d'algèbre qui en constitue la première partie (I) permettra d'établir certains résultats utiles pour la suite.

I. — On considère deux variables x et y liées par la relation

$$(1) \quad y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$$

α et β étant des constantes telles que $\alpha > 1$ et $\beta > 0$.

1° Combien existe-t-il de valeurs de x , positives ou nulles, vérifiant la relation (1), lorsqu'on donne à y une valeur positive quelconque ?

2° La relation (1) permet de définir y comme fonction de la variable x , pour toute valeur de x , positive ou nulle. Dédire des résultats de la discussion précédente que cette fonction y , qui reste manifestement positive,

admet un minimum y_0 égal à $\sqrt{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}}$; pour quelle valeur x_0 de x ce minimum est-il atteint ?

On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction y .

II. — On donne dans un plan P un hexagone régulier dont les sommets successifs sont les points A, B, C, D, E, F , et dont les côtés ont pour longueur a . Par le centre O de cet hexagone on mène une demi-droite OZ perpendiculaire au plan P ; puis sur les demi-droites parallèles à OZ , et de même sens que OZ , passant par les trois sommets non consécutifs A, C, E de l'hexagone, on prend respectivement les segments AA', CC', EE' , ayant la même longueur l . Soit I le point de la demi-droite OZ tel que $OI = l + x$, x étant une longueur comprise entre zéro et l ($0 < x < l$). Les trois plans $IA'C', IC'E', IE'A'$ coupent les perpendiculaires au plan P passant par les trois autres sommets B, D, F de l'hexagone respectivement aux points B', D', F' .

1° Démontrer que les points B', D', F' sont du même côté du plan P que

les points I, A', C', E' ; quelle est la longueur commune des segments BB', DD', FF' ?

On joint le point I aux points A', C', E', et on construit les six segments A'B', B'C', C'D', D'E', E'F', F'A'. Quelle est la forme du quadrilatère IA'B'C' ?

L'hexagone donné, les six trapèzes rectangles ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D', EFF'E', FAA'F' et les trois quadrilatères IA'B'C', IC'D'E', IE'F'A' forment les dix faces (ou facettes) d'un polyèdre convexe qui sera appelé le décaèdre (Δ). Construire les projections orthogonales de ce décaèdre en prenant successivement comme plans de projection : le plan P de l'hexagone, — puis le plan BB'EE', — puis le plan médiateur du côté BC de l'hexagone. (Pour chaque projection, on représentera en traits pleins les projections des arêtes vues, et en traits interrompus les projections des arêtes cachées, pour un observateur dont on précisera la position par rapport au décaèdre et au plan de projection).

2° On désigne par φ la mesure de l'angle $\widehat{BB'A'}$, et par θ la mesure de l'angle $\widehat{A'IC'}$. Calculer, en fonction de a, l, x :

la longueur de chacune des diagonales du quadrilatère IA'B'C' ;

les cosinus des angles φ et θ ;

le volume V du décaèdre, — son aire totale S, c'est-à-dire la somme des aires des dix polygones qui le limitent, — et la somme L des longueurs de toutes ses arêtes.

3° En supposant que les longueurs a et l sont fixées et que $l > \frac{a}{2\sqrt{2}}$,

démontrer que l'aire totale S et la somme L, considérées comme des fonctions de x , admettent l'une et l'autre un minimum pour une même valeur de x comprise entre zéro et l ; calculer ces valeurs minima, que l'on désignera par S_0 et L_0 . Démontrer que cette valeur de x est également celle pour laquelle les angles φ et θ sont égaux.

Soit (Δ_0) le décaèdre correspondant à cette valeur particulière de x ; les arêtes de (Δ_0) issues d'une part de chacun des quatre sommets I, B', D', F', et d'autre part, de chacun des trois sommets A', C', E', définissent respectivement quatre angles trièdres et trois angles polyèdres à quatre faces. Comparer les faces de ces angles trièdres et de ces angles polyèdres ; quels sont les cosinus de ces faces ? Evaluer les dièdres de ces angles trièdres et de ces angles polyèdres.

III. — On considère de nouveau les décaèdres (Δ), définis au début de la partie II, dépendant des trois longueurs a, l, x . On dira qu'une sphère est inscrite dans un décaèdre (Δ) si elle est située à l'intérieur de (Δ) et si elle est tangente aux plans des dix faces de (Δ).

On propose, dans cette troisième partie, l'étude des décaèdres (Δ) admettant une sphère inscrite. Les solutions, géométrique et algébrique, qui sont demandées dans les questions 1° et 2°, peuvent être cherchées dans un ordre

quelconque ; pour l'une et l'autre, il sera commode d'utiliser une section de la figure par un plan tel que $BB'EE'$, après avoir remarqué que, si une sphère est inscrite dans un décaèdre (Δ) , son centre est sur OZ , et son

rayon est égal à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1°. Les longueurs a et l étant supposées fixées, donner une construction géométrique des décaèdres (Δ) admettant une sphère inscrite ; discuter.

2° Les longueurs a et l étant supposées fixées, déterminer la longueur x de façon que le décaèdre (Δ) correspondant admette une sphère inscrite ; discuter.

(Bien entendu, on comparera les résultats des deux discussions).

3° Démontrer que, pour tout décaèdre (Δ) admettant une sphère inscrite, le rapport de son volume V à son aire totale S est égal au tiers du rayon de la sphère inscrite.

On a défini, à la fin de la partie II, un décaèdre (Δ_0) dépendant seulement des longueurs a et l ; montrer que l'on peut déterminer l en fonction de a de façon que le décaèdre (Δ_0) correspondant admette une sphère inscrite. Calculer, pour ce décaèdre (Δ_0) particulier, le rapport de son aire totale à l'aire de la sphère inscrite, et le rapport de son volume à celui de la même sphère. Montrer que l'erreur commise en remplaçant la valeur commune de ces rapports par la fraction $3/2$ est inférieure à 0,003 (les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ à 0,0001 près par défaut sont respectivement 1,4142 et 1,7320).

Classe de Mathématiques.

I. — On donne, dans un plan (II), deux segments *distincts* FF' , GG' , de même milieu O : G diffère donc de F et F' .

1° Soit T la transformation qui, au point n du plan, fait correspondre le point m tel que les triangles nFm et nGF' soient directement semblables.

m n'est ainsi défini que si n est différent de F' et de G . Que devient m si n tend vers F' ? si n tend vers G ? m et n peuvent-ils être confondus ?

2° Montrer que la transformation T n'est pas changée (c'est-à-dire qu'au point n correspond le même point m) si l'on échange, dans la définition de T , les rôles des points F et F' , sans changer celui de G .

3° Montrer que les triangles mFn et $mG'F'$ sont directement semblables : on partira à cet effet des égalités :

$$\frac{mF'}{m} = \frac{FG}{Fn} \qquad (\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{Fn}) = (\overrightarrow{mF'}, \overrightarrow{FG})$$

à $2k\pi$ près (k entier), et du fait que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{G'F'}$.

Il en résulte que si, sans changer les rôles de F et F' , on échange ceux de G et G' , la transformation T se change en sa transformation inverse.

Etudier les cas particuliers pouvant se présenter lorsque m est donné, relativement au point n dont m est le transformé par T .

4° Prouver qu'il existe une longueur l et une droite $X'OX$ du plan (II) passant par O , indépendantes du couple mn , telles que

$$(\vec{OX}, \vec{G'm}) + (\vec{OX}, \vec{G'n}) = 2k\pi \quad (k \text{ entier}). \quad G'm \times G'n = l^2.$$

Préciser les définitions de l et de la direction de $X'OX$ qui peuvent être données à l'aide du parallélogramme $FGF'G'$.

5° Indiquer une suite de transformations simples permettant de passer de m à n .

Lorsque l'un des points m ou n est rejeté à l'infini, que devient l'autre ?

Lieu du point n quand m décrit un cercle : quand le lieu de n est-il une droite ?

II. — 1° Lorsque m décrit une droite (M) passant par G' , n décrit une droite (N) passant par G .

En général (M) ne passe ni par F , ni par F' ; montrer alors (on pourra appliquer un théorème de Poncelet) que mn a pour enveloppe la conique (Γ) de foyers F et F' admettant (M) comme tangente (ou asymptote) ; montrer que (Γ) admet aussi (N), soit comme tangente, soit comme asymptote (sans discussion visant à séparer ces cas).

Quelle est l'enveloppe de mn dans le cas particulier où (M) passe par F ?

2° F , F' et G , G' étant donnés, déterminer la droite (M) et, sur elle, le point m , tels que $\vec{G'm}$ et $\vec{G'n}$ soient équipollents, Montrer que (sauf dans un cas particulier qu'on écartera) la conique (Γ) est alors une ellipse (E) passant par G et G' ; préciser la direction et la longueur du diamètre $H'OH$ conjugué du diamètre $G'OG$ dans cette ellipse (E).

3° Les points F et F' (*distincts*) étant donnés, ainsi que la longueur l et la droite $X'OX$ passant par le milieu O de FF' (*distincte de la droite* FF'), on propose de rechercher le couple de points (inconnu) GG' . Prouver qu'il existe un tel couple de points, symétriques par rapport à O , répondant à cette question, et un seul, par application de (II, 2°) : on justifiera que la construction de ce couple donne une solution, après avoir découvert cette construction comme *nécessaire*.

Examiner directement les cas particuliers écartés dans l'alinéa précédent : celui où F , F' sont confondus, et celui où $X'OX$ est confondue avec la droite FF' .

4° Montrer que la donnée des points G et G' , de la longueur l et de la droite $X'OX$ (O milieu de GG'), détermine un couple FF' et un seul (on montrera que ce problème se ramène à un problème de même type que celui qui fait l'objet de II, 3°).

5° On donne dans (II) deux droites (N) et (M) [*orientées*], un point G sur (N), un point G' sur (M), et une constante non nulle K .

Prouver que l'enveloppe des droites mn coupant (M) et (N) aux points respectifs m , n , variables et tels que $\vec{G'm} \times \vec{G'n} = K$ est, en général, une ellipse ou une hyperbole. En indiquer quatre tangentes indépendantes de K .

6° Réciproquement, étant données une ellipse ou une hyperbole (Γ) et deux tangentes fixes (M) et (N) à (Γ), une tangente variable à (Γ) coupe (M) en m , (N) en n .

Existe-t-il deux points fixes, G' sur (M) , G sur (N) tels que le produit $\overline{G'm} \cdot \overline{Gn}$ reste constant ?

III. — Les données étant les mêmes que dans II, 1° (deuxième alinéa), on leur adjoint une droite (Φ) du plan (Π) qui ne passe ni par G , ni par G' et qui coupe (M) et (N) en deux points respectifs u et v qui ne sont, ni rejetés à l'infini, ni sur (Γ) .

1° En général (Φ) n'est pas tangente à (Γ) ; la tangente à (Γ) , autre que (M) , passant par u , coupe (N) en r ; de même, la tangente à (Γ) , autre que (N) , passant par v , coupe (M) en q .

Démontrer que le produit $\frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} \times \frac{\overline{nr}}{\overline{nv}}$ reste constant quand m décrit (M) ;

[on utilisera la relation $\overline{G'm} \cdot \overline{Gn} = C^2$].

2° Dans le cas particulier où (Φ) est tangente (ou asymptote) à (Γ) , montrer que, d'après cette même relation, les variables $X = \overline{um}$ $Y = \overline{vn}$ restent liées par une relation de la forme $\frac{A}{X} + \frac{B}{Y} = 1$ où A et B sont des constantes.

IV. — S étant un point de l'espace non situé dans (Π) , et (Π_1) étant un plan parallèle au plan passant par S et (Φ) , on mène les droites Sm et Sn qui coupent respectivement (Π_1) aux points m_1 et n_1 .

On demande de donner les lieux géométriques de m_1 et n_1 et de caractériser dans les cas (III, 1°), puis (III, 2°) la correspondance qui existe, sur ces lieux, entre les points m_1 et n_1 . Puis, par application (II, 5°) pour le premier cas, directement pour le second cas, en déduire l'enveloppe de la droite m_1n_1 . C'est une conique (Γ_1) .

Indiquer la relation géométrique qui existe entre (Γ) , (Γ_1) et le point S ; on pourra à cet effet considérer le nombre de droites mn passant par un point I de (Π) et le nombre de droites m_1n_1 passant par le point I_1 de (Π_1) , aligné avec S et I .

Quelle proposition générale peut-on énoncer d'après cette étude ?