

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

Conseils d'Enseignement du Second Degré : rapport de M. CANONGE..	273
Avis du trésorier.....	275

TEXTES DE CONCOURS 1951

Concours général des Lycées et Collèges.....	277
<i>Classe de Première</i>	277
<i>Classe de Mathématiques</i>	279
Certificat d'aptitude à l'Enseignement du Second Degré.....	281
Certificat d'aptitude à l'Enseignement dans les Collèges.....	283
Agrégation féminine.....	286
Agrégation masculine.....	293
Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure.....	303
<i>Hommes : rue d'Ulm</i>	303
<i>Femmes : Sèvres</i>	308
Concours d'entrée aux Ecoles Normales Supérieures de Saint-Cloud et Fontenay.....	312
Concours d'entrée à l'Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique.....	314
Professorats de l'Enseignement Technique.....	320

Cotisations, Abonnements, Expédition des Bulletins

3 bis, Avenue R.-Poincaré, Margny-les-Complègne (Oise)

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France 400 fr.

Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 80 fr.

Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire)
reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Énoncés*.

Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD
GRENOBLE (Isère)

COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU
Professeurs au Lycée de Grenoble

Programmes du 18 avril 1947

Tarif du 1^{er} octobre 1950

Arithmétique 6°	150	»
Dessin Géométrique 6° et 5°	60	»
Géométrie 5° et 4°	200	»
Arithmétique 5°	180	»
Arithmétique et Algèbre 4°	180	»
Arithmétique et Algèbre 3°	200	»
Géométrie 3°	180	»
Compléments d'Algèbre et de Géométrie Géométrie 3° Moderne court	160	»
Algèbre 2° A.B.C.M.	320	»
Géométrie 2° A.B.C.M.	320	»
Algèbre 1 ^{re} A.B.	160	»
Algèbre et Trigonométrie 1 ^{re} C.M.	320	»
Géométrie 1 ^{re} A.B.C.M.	320	»
Questions de Cours de Mathématiques du Baccalauréat, 1 ^{re} partie, A.B.C.M.	225	»

MATHÉMATIQUES

Ouvrages conformes aux nouveaux programmes

NOUVEAUTES :

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.

L'ouvrage, conforme au programme de 6^e, est divisé en 26 chapitres, permettant ainsi une répartition facile du travail à raison d'une leçon par semaine en moyenne. Un résumé rassemblant les principaux résultats termine la plupart des chapitres.

En plus de la mise au point des méthodes de calcul et du rappel des bases du système métrique déjà étudié antérieurement, les auteurs se sont efforcés de faciliter aux élèves l'acquisition des méthodes de résolution des problèmes en les classant suivant des types déterminés et en utilisant très tôt les règles de trois. Le choix des problèmes est très varié. Ils sont précédés d'une lettre : A, pour les applications immédiates du cours, B, pour les problèmes normaux de devoirs, C, pour les exercices plus difficiles. Le contact étroit entre le cours et les exercices d'application est assuré par des renvois placés à la fin de chaque paragraphe. Les données numériques ont été adaptées aux cours actuels. Les notations abrégées utilisées pour les unités du système métrique sont conformes au décret du 23 février 1948.

Edition Lycées et Collèges Broché : 200 fr., cartonné 285 fr.

Edition Cours complémentaires..... Broché : 215 fr., cartonné 300 fr.

LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième.

L'exposé des opérations sur les nombres entiers, décimaux et fractionnaires, a été fait avec clarté et avec le souci constant de mettre en évidence les propriétés des sommes, différences, produits et quotients, appliquées ensuite aux résolutions des problèmes d'arithmétique, l'inconnue étant remplacée par une lettre. L'initiation à la Géométrie, tout en restant concrète, fait ressortir l'articulation du raisonnement.

675 exercices (805 pour l'édition Cours Complémentaires) classés selon le degré de difficulté, rattachés à chaque paragraphe du cours, permettent d'en vérifier la compréhension, la solution de certains exemples-types facilitant l'acquisition des méthodes de résolution. Chaque chapitre du cours est terminé par un résumé qui rassemble les propriétés et les théorèmes dont la connaissance est indispensable.

Edition Lycées et Collèges, 1 vol..... Broché : , cartonné

Edition Cours Complémentaires, 1 vol... Broché : , cartonné

SPECIMEN GRATUIT SUR DEMANDE

Classe de SCIENCES EXPERIMENTALES :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES. (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique.

Format 13,5 × 21..... Broché : 650 fr., cartonné 750 fr.

Classe de PHILOSOPHIE :

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE, classe de Philosophie.

Format 13,5 × 21..... Broché : 320 fr., cartonné 390 fr.

Classe de MATHÉMATIQUES : COURS COMPLET

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché : 550 fr., cartonné 650 fr.

LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché.. 260 fr.

LESPINARD et PERNET. — ARITHMETIQUE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché.. 230 fr.

LESPINARD et PERNET. — MECANIQUE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché : 210 fr., cartonné 300 fr.

LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché : 310 fr., cartonné 380 fr.

LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché : 490 fr., cartonné 590 fr.

LESPINARD et PERNET. — TRIGONOMETRIE, classe de Mathématiques.

Format 13,5 × 21..... Broché : 325 fr., cartonné 395 fr.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2^e partie, classe de Mathématiques.

Format 13 × 18 295 fr.

Classe de Première C. et M.

LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLEMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 1^{re} partie, séries C. et M.

Format 13 × 18 200 fr.

MASSON & C^{ie}, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

Rentrée scolaire 1951

**COURS COMPLET
DE
MATHÉMATIQUES**

SOUS LA DIRECTION DE

G. CAGNAC

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Louis-le-Grand

L. THIBERGE

Inspecteur général
de l'Éducation Nationale

Nouveauté :

Classes de 4^e

Arithmétique. Algèbre. Géométrie

Un volume de 372 p., par L. THIBERGE et E. GILET, avec figures, exercices et problèmes, cartonné..... **600 fr.**

A paraître en Octobre 1951 :

Classes de 1^{re} C. et Moderne

Géométrie dans l'espace

Un volume de 300 p. environ, par J. DOLLON et E. GILET, avec figures, exercices et problèmes ; cartonné..... **Octobre 1951**

Précédemment parus :

Arithmétique, cl. de 6^e, par L. THIBERGE et E. GILET, avec la collaboration de J. SIROS. Un vol. de 244 p., avec fig., exercices et problèmes ; cartonné..... **360 fr.**

Géométrie et Arithmétique, cl. de 5^e, par L. THIBERGE et E. GILET. Un vol. de 368 p., avec fig., exercices et problèmes ; cart. **490 fr.**

Géométrie plane, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et E. GILET. Un volume de 350 p., environ, avec figures, exercices et problèmes ; cartonné..... **490 fr.**

Algèbre, cl. de 2^e C et Mod., par J. DOLLON et J. SIROS. Un volume de 248 p., avec fig., exercices et problèmes ; cartonné..... **360 fr.**

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

Conseil d'Enseignement du Second Degré

*Rapport à l'A.P.M. sur la Section permanente
du Conseil d'Enseignement du Second Degré, par M. CANONGE*

Séance du 26 avril 1951

PREMIÈRE PARTIE (*questions diverses*).

1) J'ai accepté que les épreuves écrites de Mathématiques au diplôme (examen nouveau et vraisemblablement transitoire) d'études secondaires des *médersas* algériennes, section traditionnelle, ne comportent que deux heures (coefficient 1 ; il y a une épreuve orale, coefficient 1). L'écrit de ce diplôme comporte 15 heures de composition. L'assurance nous a été donnée que les sujets seraient mesurés à la durée de cette épreuve, qui ne paraît pas d'ailleurs absolument comparable à l'épreuve facultative de 1^{re} AB.

Le diplôme section moderne comportera une épreuve de 3 heures, coefficient 1 et un oral, coefficient 2.

2) La Section permanente a donné son accord à l'addition de trois certificats (Méthodes mathématiques en physique. Analyse appliquée, Mathématiques appliquées) à la liste proposée à l'option des candidats à la licence ès-sciences physiques (3^e certificat).

DEUXIÈME PARTIE : *Sections nouvelles du second cycle.*

Un projet (horaires et programmes) venait à la S.P. pour étude ; cette étude se poursuivra en commissions spécialisées pendant le mois de mai, les décisions restant au Conseil du Second Degré, puis au Conseil Supérieur, 31 mai et 26 juin probablement.

[Je rappelle que ces sections sont : A' (A avec sciences), C' (C avec sc. nat.), M' (M avec sc. nat.), Sciences humaines et économiques (Seconde, Première et classe terminale)].

Parmi les propositions qui prêteront à discussion, je signale notamment :

Anciennes sections :

1) « Que toutes les disciplines figurent à l'oral de 1^{re} B, quelle que soit l'option à l'écrit » (proposition des professeurs de Langues vivantes).

2) L'horaire de Philosophie dans les trois classes terminales actuelles serait augmenté d'une heure. J'ai exprimé mon désaccord, irréductible au moins en ce qui concerne M.E., où nous aurions plutôt besoin d'une heure de plus... mais sur ce dernier point, je n'ai même pas pu ajouter mot.

3) La question de la Cosmographie, qui s'est posée de par sa suppression en classe terminale S.H. et E., m'a permis de souhaiter que cette matière soit question d'oral seulement ; l'ensemble de la question sera reprise sous la direction de M. l'I.G. DESFORGE, en liaison avec mathématiciens, physiciens et philosophes.

SCIENCES HUMAINES ET ÉCONOMIQUES :

Seconde : Math. : 4 heures (3 de cours, 1 de T.P.). Programme de C un peu allégé en géométrie, plus une initiation à la discipline du classement.

Première : 3 heures (1^{re} C.M. allégé, plus notions de Mathématiques statistiques). Bacc. : 2 h. 1/2 + 1 h. 1/2 à l'écrit ; coefficient 2 + 1.

Classe terminale : 4 heures (programme de sciences expérimentales moins la cosmographie, plus mathématiques statistiques).

Il est trop tôt pour parler du Baccalauréat lui-même ; l'organisation en sera certainement réservée cette année. *La question option entre langue vivante 1 ou mathématiques à l'oral à chacune des deux parties, reste donc entière.* Un mathématicien sera convoqué à la sous-commission chargée de revoir la question langues vivantes.

Pour les détails des programmes j'ai été invité à remettre à M. DESFORGE la liste des anomalies de rédaction que POCHARD avait relevées, ce que j'ai fait.

La question de l'horaire de la classe terminale, nettement insuffisant, si les Mathématiques statistiques demandent 2 heures à elles seules, sera revue, par une sous-commission réunie à la diligence de M. EPPE (Direction du Technique), où M. BIGUENET représentera l'A.P.M. Un aménagement serait possible en prenant l'heure primitivement réservée à une étude des produits marchands.

TROISIÈME PARTIE : *Contrôle des sujets d'examen.*

J'ai obtenu les signatures de tous les membres élus de la Section permanente sur un vœu demandant le contrôle des sujets de Mathématiques, y compris les corrections à l'imprimerie, par des professeurs enseignant dans les classes intéressées. Mais certains membres de la S.P. ont fait allusion à des difficultés du même ordre dans leur spécialité, et M. MONOD a proposé une étude élargie de la question. Sur sa promesse que cette étude serait faite, j'ai accepté le renvoi du vœu pour extension à toutes les matières.

De toute façon, le Conseil ne se réunissant que le 31 mai, et le Conseil Supérieur fin juin, il n'y avait aucun espoir d'aboutir à un texte officiel avant la session de juin. Et, malgré notre volumineux dossier, que j'ai fait circuler, il nous faut regretter l'absence de tout recours en Conseil d'Etat des candidats ; le moindre d'entre ces recours donnerait à la chose un caractère autrement impératif.

Séance du 31 mai

La session du 31 mai du Conseil de l'Enseignement du Second Degré a été presque exclusivement consacrée à la réforme du second cycle.

Il ne restait, en ce qui intéresse de très près les mathématiciens, que les questions suivantes à trancher :

a) Horaire de Philosophie en M.E. : la proposition d'une quatrième heure n'a pas été maintenue.

b) Horaire de Mathématiques de la classe terminale de Sciences humaines et économiques : il serait fixé à 4 h. 1/2 (3 pour les Mathématiques proprement dites, 1 h. 1/2 pour les Mathématiques statistiques).

c) L'organisation du Baccalauréat ne sera pas abordée cette année.

Enfin un vœu a été unanimement adopté pour le contrôle des sujets d'examen dans le sens où nous le demandions, et avec référence aux mathématiques. Un des Recteurs présents a signalé l'existence d'une récente circulaire, montrant que l'intervention de l'A.P.M., auprès de M. le Directeur DONZELOT, avait déjà produit des effets.

C. CANONGE.

Avis du Trésorier

Sans règlement immédiat de la cotisation 1950-51, le service du Bulletin sera suspendu aux collègues et établissements, dont les noms suivent, à partir de la prochaine publication.

Liste des membres n'ayant pas payé la cotisation 1950-51

Mme ALLEMAND, Nîmes ; Mlle ANTOINE, Colmar ; MM. AVENIER, Tunis ; BALDOCCHI, Michelet ; BALIBAR, Tours ; BARTHÉLEMY, Rouen ; BAURAIN, Rouen ; BAZIN, Manosque ; BENOIT-GONIN, Lyon ; Mlle BÉRENGER, Foix ;

Mme BERNETIÈRE, Tunis ; MM. BLANC-TALON, Lyon ; BOLDRINI, Héliopolis ; BOUCHARD, Montferrand ; BRAUD, St-Germain ; BRIQUET, Condorcet ; BRUCE, Grenoble ; Mme CAÏN, Brest ; Mlle CANAL, Dreux ; Mme CANEVET, Brest ; MM. CASTELLANI, Rouen ; CATTELAIN, La Flèche ; CHABRIER, Nice ; CHALLEAT, Lyon ; CHANEL, Annecy ; CHOSSON Alexandrie ; DAVID, Bordeaux ; DEGUEURCE, Montceau-les-Mines ; Mlle DENOYELLE, Lamartine ; MM. DESBORDES, Sousse ; DESTAINVILLE, Valence ; DORMOY, Bayeux ; DUFRÈCHE, Bordeaux ; DUTHILLEUL, Rouen ; EMIG, Lille ; ESTÈBE, Albi ; ETIENNE, La Flèche ; EDDE, St-Ouen ; Mlle FINO, Laval ; MM. FONTAINE, St-Omer ; FONTAINE, Turgot ; FOUQUES, Clermont-Ferrand ; FOURNIER, Montcy-St-Pierre ; GALLERAND, Brest ; GARRAUX, Oloron ; GÉLY, Eu ; Mlles GEY, Dijon ; GILLES, Nantes ; MM. GIROUD, Bizerte ; GITTON, Orléans ; Mmes GOURVES, Brest ; GRADELET, Bourg-les-Valence ; Mlles GRANGIER, Dax ; GRÉLOT, Sarrebrück ; MM. GRIMA, Strasbourg ; GUÉNAT, Nîmes ; GUEIFI, Bordeaux ; HAON, Brioude ; HÉBERT, Melun ; HENRY, Rouen ; Mlle HUTAN, Verneuil ; MM. JACQUEMART, Pasteur ; JOURDAN, Sfax ; Mlle Küss, Lamartine ; MM. LABARDE, Tunis ; LAPORTE, Saint-Etienne ; LAPORTE, Michelet ; LANNES, Toulouse ; LATOUR, Montpellier ; LAUCHARD, Paris ; LAUDES, Sedan ; Mlle LAUZERAL, Toulouse ; Mme LEFRESNE, Paris ; MM. LÉVY, Chaptal ; LÉVY, Mulhouse ; Mlles LHEUREUX, Avignon ; LONGEVIALLE, Bourges ; LOUIS, Lons-le-Saunier ; MM. LOZACH, Brest ; LUBRANO, Blida ; Mlle LUTZ, Colmar ; MM. MARTIN, Charlemagne ; MARTIN, Constantine ; Mlle MARQUET, Chartres ; MM. MATTEI, Sousse ; MERCIER, Angers ; MERCIER, Claude-Bernard ; MERLET, Eu ; MEYNAUD, Lodève ; MICHAUD, La Martinique ; Mlle MILOU, Paris ; M. MONIER, Condorcet ; Mlles MORET-BAILLY, Dijon ; MUFFAT, Arras ; M. MOULY, St-Feyre ; Mlle NÉDÉLEC, Grasse ; MM. NINOT, La Flèche ; NOËL, Bordeaux ; NOTARI, Tunis ; OBERLÉ, Mulhouse ; Mme OLLIVIER, Strasbourg ; M. PANIS, Perpignan ; Mme PELLICER, Limoges ; Mlle PELTIER, Neuilly ; Mme PERDRIZET, Versailles ; M. PERONNY, La Flèche ; Mme PEYRE, Béziers ; MM. PHANKIN, Nice ; PINGUET, Casablanca ; POUTIGNAT, Rive-de-Gier ; Mme PUECH, Mende ; MM. RIMBAUD, Brest ; RIVIÈRE, Rodez ; ROBIN, Dijon ; ROKBAINI, Tunis ; ROUSSEAU, Lyon ; SAINT-JAMES, J.-B. Say ; Mlle SAIC, Périgueux ; MM. SALMON, Caen ; SANOUILLET, Saint-Chamond ; Mme SARDAT, Valence ; MM. SELIER, Amiens ; SELOSSE, La Flèche ; Mlle SERRES, St-Germain ; MM. SIMONNET, St-Maixent ; SIAMA, Tunis ; SOUSSI, Tunis ; STEPHAN (Maurice), Brest ; STEPHAN (Roger), Brest ; TAILLÉ, La Flèche ; TASSO, Toulon ; Mlle TORELLI, Toulouse ; MM. TRIMOLÉ, Vesoul ; TRON, Tunis ; Mlle VERGNE, Mussidan ; M. VINCEL, Strasbourg. — Ecole Normale de Poitiers.

TEXTES DE CONCOURS 1951

Concours général des Lycées et Collèges

Classe de Première.

NOTE. — Il sera tenu compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation de la solution. Il est recommandé, en particulier, de dessiner les figures sur une feuille séparée avec un numéro de renvoi.

Problème

Le problème a pour objet l'étude de quelques propriétés d'un polyèdre dont la définition sera donnée dans la deuxième partie (II) ; la question d'algèbre qui en constitue la première partie (I) permettra d'établir certains résultats utiles pour la suite.

I. — On considère deux variables x et y liées par la relation

$$(1) \quad y = -x + \sqrt{\alpha x^2 + \beta}$$

α et β étant des constantes telles que $\alpha > 1$ et $\beta > 0$.

1° Combien existe-t-il de valeurs de x , positives ou nulles, vérifiant la relation (1), lorsqu'on donne à y une valeur positive quelconque ?

2° La relation (1) permet de définir y comme fonction de la variable x , pour toute valeur de x , positive ou nulle. Dédurre des résultats de la discussion précédente que cette fonction y , qui reste manifestement positive,

admet un minimum y_0 égal à $\sqrt{\frac{\beta(\alpha-1)}{\alpha}}$; pour quelle valeur x_0 de x ce minimum est-il atteint ?

On ne demande pas d'étudier les variations de la fonction y .

II. — On donne dans un plan P un hexagone régulier dont les sommets successifs sont les points A, B, C, D, E, F , et dont les côtés ont pour longueur a . Par le centre O de cet hexagone on mène une demi-droite OZ perpendiculaire au plan P ; puis sur les demi-droites parallèles à OZ , et de même sens que OZ , passant par les trois sommets non consécutifs A, C, E de l'hexagone, on prend respectivement les segments AA', CC', EE' , ayant la même longueur l . Soit I le point de la demi-droite OZ tel que $OI = l + x$, x étant une longueur comprise entre zéro et l ($0 < x < l$). Les trois plans $IA'C', IC'E', IE'A'$ coupent les perpendiculaires au plan P passant par les trois autres sommets B, D, F de l'hexagone respectivement aux points B', D', F' .

1° Démontrer que les points B', D', F' sont du même côté du plan P que

les points I, A', C', E' ; quelle est la longueur commune des segments BB', DD', FF' ?

On joint le point I aux points A', C', E', et on construit les six segments A'B', B'C', C'D', D'E', E'F', F'A'. Quelle est la forme du quadrilatère IA'B'C' ?

L'hexagone donné, les six trapèzes rectangles ABB'A', BCC'B', CDD'C', DEE'D', EFF'E', FAA'F' et les trois quadrilatères IA'B'C', IC'D'E', IE'F'A' forment les dix faces (ou facettes) d'un polyèdre convexe qui sera appelé le décaèdre (Δ). Construire les projections orthogonales de ce décaèdre en prenant successivement comme plans de projection : le plan P de l'hexagone, — puis le plan BB'EE', — puis le plan médiateur du côté BC de l'hexagone. (Pour chaque projection, on représentera en traits pleins les projections des arêtes vues, et en traits interrompus les projections des arêtes cachées, pour un observateur dont on précisera la position par rapport au décaèdre et au plan de projection).

2° On désigne par φ la mesure de l'angle $\widehat{BB'A'}$, et par θ la mesure de l'angle $\widehat{A'IC'}$. Calculer, en fonction de a, l, x :

la longueur de chacune des diagonales du quadrilatère IA'B'C' ;

les cosinus des angles φ et θ ;

le volume V du décaèdre, — son aire totale S, c'est-à-dire la somme des aires des dix polygones qui le limitent, — et la somme L des longueurs de toutes ses arêtes.

3° En supposant que les longueurs a et l sont fixées et que $l > \frac{a}{2\sqrt{2}}$,

démontrer que l'aire totale S et la somme L, considérées comme des fonctions de x , admettent l'une et l'autre un minimum pour une même valeur de x comprise entre zéro et l ; calculer ces valeurs minima, que l'on désignera par S_0 et L_0 . Démontrer que cette valeur de x est également celle pour laquelle les angles φ et θ sont égaux.

Soit (Δ_0) le décaèdre correspondant à cette valeur particulière de x ; les arêtes de (Δ_0) issues d'une part de chacun des quatre sommets I, B', D', F', et d'autre part, de chacun des trois sommets A', C', E', définissent respectivement quatre angles trièdres et trois angles polyèdres à quatre faces. Comparer les faces de ces angles trièdres et de ces angles polyèdres ; quels sont les cosinus de ces faces ? Evaluer les dièdres de ces angles trièdres et de ces angles polyèdres.

III. — On considère de nouveau les décaèdres (Δ), définis au début de la partie II, dépendant des trois longueurs a, l, x . On dira qu'une sphère est inscrite dans un décaèdre (Δ) si elle est située à l'intérieur de (Δ) et si elle est tangente aux plans des dix faces de (Δ).

On propose, dans cette troisième partie, l'étude des décaèdres (Δ) admettant une sphère inscrite. Les solutions, géométrique et algébrique, qui sont demandées dans les questions 1° et 2°, peuvent être cherchées dans un ordre

quelconque ; pour l'une et l'autre, il sera commode d'utiliser une section de la figure par un plan tel que $BB'EE'$, après avoir remarqué que, si une sphère est inscrite dans un décaèdre (Δ) , son centre est sur OZ , et son

rayon est égal à $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

1°. Les longueurs a et l étant supposées fixées, donner une construction géométrique des décaèdres (Δ) admettant une sphère inscrite ; discuter.

2° Les longueurs a et l étant supposées fixées, déterminer la longueur x de façon que le décaèdre (Δ) correspondant admette une sphère inscrite ; discuter.

(Bien entendu, on comparera les résultats des deux discussions).

3° Démontrer que, pour tout décaèdre (Δ) admettant une sphère inscrite, le rapport de son volume V à son aire totale S est égal au tiers du rayon de la sphère inscrite.

On a défini, à la fin de la partie II, un décaèdre (Δ_0) dépendant seulement des longueurs a et l ; montrer que l'on peut déterminer l en fonction de a de façon que le décaèdre (Δ_0) correspondant admette une sphère inscrite. Calculer, pour ce décaèdre (Δ_0) particulier, le rapport de son aire totale à l'aire de la sphère inscrite, et le rapport de son volume à celui de la même sphère. Montrer que l'erreur commise en remplaçant la valeur commune de ces rapports par la fraction $3/2$ est inférieure à 0,003 (les valeurs approchées de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$ à 0,0001 près par défaut sont respectivement 1,4142 et 1,7320).

Classe de Mathématiques.

I. — On donne, dans un plan (II), deux segments *distincts* FF' , GG' , de même milieu O : G diffère donc de F et F' .

1° Soit T la transformation qui, au point n du plan, fait correspondre le point m tel que les triangles nFm et nGF' soient directement semblables.

m n'est ainsi défini que si n est différent de F' et de G . Que devient m si n tend vers F' ? si n tend vers G ? m et n peuvent-ils être confondus ?

2° Montrer que la transformation T n'est pas changée (c'est-à-dire qu'au point n correspond le même point m) si l'on échange, dans la définition de T , les rôles des points F et F' , sans changer celui de G .

3° Montrer que les triangles mFn et $mG'F'$ sont directement semblables : on partira à cet effet des égalités :

$$\frac{mF'}{m} = \frac{FG}{Fn} \qquad (\overrightarrow{mn}, \overrightarrow{Fn}) = (\overrightarrow{mF'}, \overrightarrow{FG})$$

à $2k\pi$ près (k entier), et du fait que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{G'F'}$.

Il en résulte que si, sans changer les rôles de F et F' , on échange ceux de G et G' , la transformation T se change en sa transformation inverse.

Etudier les cas particuliers pouvant se présenter lorsque m est donné, relativement au point n dont m est le transformé par T .

4° Prouver qu'il existe une longueur l et une droite $X'OX$ du plan (II) passant par O , indépendantes du couple mn , telles que

$$(\vec{OX}, \vec{G'm}) + (\vec{OX}, \vec{G'n}) = 2k\pi \quad (k \text{ entier}). \quad G'm \times G'n = l^2.$$

Préciser les définitions de l et de la direction de $X'OX$ qui peuvent être données à l'aide du parallélogramme $FGF'G'$.

5° Indiquer une suite de transformations simples permettant de passer de m à n .

Lorsque l'un des points m ou n est rejeté à l'infini, que devient l'autre ?

Lieu du point n quand m décrit un cercle : quand le lieu de n est-il une droite ?

II. — 1° Lorsque m décrit une droite (M) passant par G' , n décrit une droite (N) passant par G .

En général (M) ne passe ni par F , ni par F' ; montrer alors (on pourra appliquer un théorème de Poncelet) que mn a pour enveloppe la conique (Γ) de foyers F et F' admettant (M) comme tangente (ou asymptote) ; montrer que (Γ) admet aussi (N), soit comme tangente, soit comme asymptote (sans discussion visant à séparer ces cas).

Quelle est l'enveloppe de mn dans le cas particulier où (M) passe par F ?

2° F , F' et G , G' étant donnés, déterminer la droite (M) et, sur elle, le point m , tels que $\vec{G'm}$ et $\vec{G'n}$ soient équipollents, Montrer que (sauf dans un cas particulier qu'on écartera) la conique (Γ) est alors une ellipse (E) passant par G et G' ; préciser la direction et la longueur du diamètre $H'OH$ conjugué du diamètre $G'OG$ dans cette ellipse (E).

3° Les points F et F' (distincts) étant donnés, ainsi que la longueur l et la droite $X'OX$ passant par le milieu O de FF' (distincte de la droite FF'), on propose de rechercher le couple de points (inconnu) GG' . Prouver qu'il existe un tel couple de points, symétriques par rapport à O , répondant à cette question, et un seul, par application de (II, 2°) : on justifiera que la construction de ce couple donne une solution, après avoir découvert cette construction comme nécessaire.

Examiner directement les cas particuliers écartés dans l'alinéa précédent : celui où F , F' sont confondus, et celui où $X'OX$ est confondue avec la droite FF' .

4° Montrer que la donnée des points G et G' , de la longueur l et de la droite $X'OX$ (O milieu de GG'), détermine un couple FF' et un seul (on montrera que ce problème se ramène à un problème de même type que celui qui fait l'objet de II, 3°).

5° On donne dans (II) deux droites (N) et (M) [orientées], un point G sur (N), un point G' sur (M), et une constante non nulle K .

Prouver que l'enveloppe des droites mn coupant (M) et (N) aux points respectifs m , n , variables et tels que $\vec{G'm} \times \vec{G'n} = K$ est, en général, une ellipse ou une hyperbole. En indiquer quatre tangentes indépendantes de K .

6° Réciproquement, étant données une ellipse ou une hyperbole (Γ) et deux tangentes fixes (M) et (N) à (Γ), une tangente variable à (Γ) coupe (M) en m , (N) en n .

Existe-t-il deux points fixes, G' sur (M) , G sur (N) tels que le produit $\overline{G'm} \cdot \overline{Gn}$ reste constant ?

III. — Les données étant les mêmes que dans II, 1° (deuxième alinéa), on leur adjoint une droite (Φ) du plan (Π) qui ne passe ni par G , ni par G' et qui coupe (M) et (N) en deux points respectifs u et v qui ne sont, ni rejetés à l'infini, ni sur (Γ) .

1° En général (Φ) n'est pas tangente à (Γ) ; la tangente à (Γ) , autre que (M) , passant par u , coupe (N) en r ; de même, la tangente à (Γ) , autre que (N) , passant par v , coupe (M) en q .

Démontrer que le produit $\frac{\overline{mq}}{\overline{mu}} \times \frac{\overline{nr}}{\overline{nv}}$ reste constant quand m décrit (M) ;

[on utilisera la relation $\overline{G'm} \cdot \overline{Gn} = C^2$].

2° Dans le cas particulier où (Φ) est tangente (ou asymptote) à (Γ) , montrer que, d'après cette même relation, les variables $X = \overline{um}$ $Y = \overline{vn}$ restent liées par une relation de la forme $\frac{A}{X} + \frac{B}{Y} = 1$ où A et B sont des constantes.

IV. — S étant un point de l'espace non situé dans (Π) , et (Π_1) étant un plan parallèle au plan passant par S et (Φ) , on mène les droites Sm et Sn qui coupent respectivement (Π_1) aux points m_1 et n_1 .

On demande de donner les lieux géométriques de m_1 et n_1 et de caractériser dans les cas (III, 1°), puis (III, 2°) la correspondance qui existe, sur ces lieux, entre les points m_1 et n_1 . Puis, par application (II, 5°) pour le premier cas, directement pour le second cas, en déduire l'enveloppe de la droite m_1n_1 . C'est une conique (Γ_1) .

Indiquer la relation géométrique qui existe entre (Γ) , (Γ_1) et le point S ; on pourra à cet effet considérer le nombre de droites mn passant par un point I de (Π) et le nombre de droites m_1n_1 passant par le point I_1 de (Π_1) , aligné avec S et I .

Quelle proposition générale peut-on énoncer d'après cette étude ?

Certificat d'aptitude à l'Enseignement du Second Degré 1951

Mathématiques (5 heures).

I. — Dans un plan orienté on donne une droite fixe Δ et un point ω non situé sur Δ :

Soient A , B , C trois points de Δ tels qu'on ait, entre angles orientés de droites, les égalités :

$$(1) \quad (\omega A, \omega B) = (\omega B, \omega C) = \frac{\pi}{3} \text{ à un multiple près de } \pi$$

1° Le cercle Γ_A ayant son centre sur Δ et passant par A et ω porte un arc ωA qui n'a en commun avec Δ que le point A ; soit $\omega\alpha$ la *demi-droite* tangente en ω à cet arc ωA . Soient de même $\omega\beta$ et $\omega\gamma$ les demi-droites analogues obtenues à partir de B et C.

Montrer qu'on a, entre angles orientés de *demi-droites*, les égalités :

$$(\overrightarrow{\omega\alpha}, \overrightarrow{\omega\beta}) = (\overrightarrow{\omega\beta}, \overrightarrow{\omega\gamma}) = \frac{2\pi}{3} \text{ à un multiple près de } 2\pi.$$

2° Le cercle Γ_A précédent coupe le cercle de diamètre BC en un point P situé par rapport à Δ du même côté que ω . Sous quel angle le coupe-t-il ?

Soient de même Q et R les points analogues sur les cercles de diamètres CA et AB. Montrer que le cercle (G) passant par les trois points P, Q, R est tangent aux trois cercles de diamètres BC, CA, AB.

Montrer que le cercle (G) reste fixe quand, ω restant fixe, les points A, B, C varient sur Δ en satisfaisant toujours aux conditions (1).

Calculer, en fonction de la distance d de ω à Δ , le rayon de (G) et la distance de son centre à Δ .

Que peut-on dire du cercle AQR et des cercles analogues BRP et CPQ ?

II. — On donne dans le plan orienté une droite fixe Δ et sur elle trois points distincts *quelconques* A, B, C.

O étant un point du plan, non situé sur Δ , on appelle $O\alpha$ la demi-droite tangente à l'arc OA du cercle Γ_A orthogonal à Δ en A, cet arc n'ayant en commun avec Δ que le point A ; on appelle $O\beta$ et $O\gamma$ les demi-droites analogues.

1° Montrer qu'il existe une position ω et une seule du point O, telle qu'on ait, entre angles orientés de *demi-droites*, les égalités :

$$(\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}) = (\overrightarrow{O\beta}, \overrightarrow{O\gamma}) = \frac{2\pi}{3} \text{ à un multiple près de } 2\pi.$$

2° On choisit sur Δ une origine I et un axe Ix ; on appelle a, b, c les abscisses de A, B, C. Calculer en fonction de a, b, c , les longueurs $\omega A, \omega B, \omega C$. Calculer l'ordonnée de ω sur l'axe Iy , déduit de Ix par rotation de $\frac{\pi}{2}$.

3° Les points A et B restant fixes et C décrivant Δ , trouver les lieux des points ω, P et Q. Trouver le lieu du centre du cercle (G) ; montrer que le cercle (G) enveloppe, outre le cercle de diamètre AB, un second cercle fixe dont on précisera la position ; montrer que (G) reste orthogonal à un cercle fixe.

III. — Sur la droite fixe Δ , on donne maintenant quatre points distincts *quelconques* A, B et A', B'.

A tout point O du plan, non situé sur Δ , on associe, comme il a été défini au paragraphe II, les quatre demi-droites $O\alpha, O\beta$ et $O\alpha', O\beta'$.

1° Construire les points O définis par les relations suivantes entre angles orientés de *demi-droites* :

$$(\overrightarrow{O\alpha}, \overrightarrow{O\beta}) = (\overrightarrow{O\alpha'}, \overrightarrow{O\beta'}) = \frac{2\pi}{3} \text{ à un multiple près de } 2\pi.$$

2° Discuter le nombre des solutions de ce problème : montrer qu'il dépend seulement de la valeur du birapport : $\lambda = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'B}} : \frac{\overline{A'A}}{\overline{A'B}}$

et donner la valeur limite de λ . A cet effet, on pourra, par exemple, utiliser l'inversion de pôle A' qui échange A et B .

3° Les points A et B restant fixes, A' et B' varient de telle façon que le problème précédent conduise à un point solution O et un seul (solution double).

Etudier alors le cercle $OA'B'$; trouver le lieu (H) de son centre H et préciser les éléments de (H) par rapport à A et B ; trouver son enveloppe ; montrer qu'il reste orthogonal à un cercle fixe.

Certificat d'aptitude à l'Enseignement dans les Collèges 1951

Composition de Mathématiques (5 heures).

I. -- On donne un cercle (O) , de centre O et de rayon R , et sur ce cercle deux points fixes A et B , de milieu I . Un point M variable décrit le cercle (O) .

1° Montrer que le lieu de l'orthocentre H du triangle AMB est le cercle (O_1) symétrique de (O) par rapport à AB . Etudier le triangle amb formé par les pieds de ses hauteurs (a pied de la hauteur issue de A , ...) lieux des sommets, enveloppes des côtés, lieu du centre du cercle circonscrit au triangle amb . Comparer les deux triangles amb et $a'm'b'$ relatifs à deux points M et M' situés sur une même perpendiculaire à AB .

2° On définit les positions de A et M sur (O) par les angles

$$(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}) = \alpha \text{ fixe et } (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi \text{ variable,}$$

que font les rayons OA et OM avec la médiatrice orientée Ox du segment AB .

Calculer l'aire du triangle amb en fonction de α et de φ . Pour quelles positions de M atteint-elle ses valeurs extrêmes ? Déterminer M pour que cette aire ait une valeur arithmétique donnée ; discuter.

Evaluer le périmètre du triangle amb ; déterminer M pour que ce périmètre ait une valeur donnée ; discuter. Indiquer une solution géométrique de cette question.

3° Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH conserve une grandeur fixe et reste orthogonal à un cercle fixe (I) . Le cercle (Ω) admet avec les cercles (O) et (O_1) deux axes radicaux Δ et Δ_1 se coupant en J ; rôle de J dans le triangle MHI , lieu de J . Montrer que Δ et Δ_1 enveloppent deux ellipses (e) et (e_1) .

II. — On donne une parabole (P) de paramètre p , et sur cette parabole deux points fixes A et B, de milieu I, symétriques par rapport à son axe. Un point M variable décrit la parabole (P).

1° Etablir la relation $\overline{mA} \cdot \overline{mB} = 2p \cdot \overline{mM}$, où m est la projection orthogonale de M sur AB et où la mesure algébrique $\overline{mM}$ est comptée dans un sens convenable. Lieu de l'orthocentre H du triangle AMB.

Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH reste orthogonal à un cercle fixe (I). Trouver l'enveloppe du cercle (Ω) et le lieu (II) de son centre Ω . Déterminer les points communs à (II) et (I) ; préciser la position relative de ces courbes en ces points ; discuter.

2° Inversement, on donne une parabole (II) ; la normale en un point fixe K de (II) coupe l'axe de (II) en I. Sur la perpendiculaire en I à cet axe on porte IA = IB = IK, de part et d'autre de I. Montrer qu'à tout point Ω de (II) on peut associer deux points M et H symétriques par rapport à Ω et tels que chacun des quatre points A, B, M, H soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres. Lieux des points M et H quand Ω décrit (II).

III. — On donne une ellipse (E), de longueurs d'axes $2a$ et $2b$, et sur cette ellipse deux points fixes A et B, de milieu I, symétriques par rapport à son axe focal. Un point M variable décrit l'ellipse (E).

1° Etablir la relation $\overline{mM} \cdot \overline{mN} = \frac{a^2}{b^2} \overline{mA} \cdot \overline{mB}$, où m est la projection orthogonale de M sur AB et N le second point de (E) sur la projetante mM . Montrer que le lieu de l'orthocentre H du triangle AMB est une ellipse (E_1) affine de (E). Déterminer les points communs à (E) et (E_1) ; discuter. Comparer les excentricités de (E) et (E_1).

2° Montrer que le cercle (Ω) de diamètre MH reste orthogonal à un cercle fixe (I) et que le lieu (L) de son centre Ω est une ellipse dont on déterminera l'excentricité.

Montrer que le rapport du rayon de (Ω) et de la distance de son centre à une droite fixe reste constant quand Ω décrit (L). En déduire, en utilisant les foyers de (L), que l'enveloppe de (Ω) se compose de deux cercles. Déterminer les points communs à (L) et (I) ; préciser la position relative de ces courbes en ces points ; discuter.

3° Etant donnée une ellipse (L) de foyers F et F', on rappelle qu'il est possible, d'une infinité de manières, de considérer tout point Ω de (L) comme le centre d'un cercle (Ω) tangent à deux cercles fixes (C) et (C') de centres F et F'. Le diamètre de (Ω) parallèle à FF' coupe (Ω) en M et M'. Lieux de M et M' quand Ω décrit (L). Est-il possible de trouver deux points fixes A et B, tels que pour tout couple MM', chacun des quatre points A, B, M, M' soit l'orthocentre du triangle formé par les trois autres ?

Corrigé d'un exercice de Mathématiques (4 heures).

Le candidat donnera de ce problème un corrigé, aux aspects variés, susceptible d'être présenté aux élèves d'une classe de Mathématiques.

I. — a) Soient, dans un plan orienté, deux points fixes B et C.

Trouver le lieu géométrique des points M du plan tels que, si (MB, MC) désigne un angle orienté de droites non orientées, on ait :

$$(MB, MC) = \alpha \pmod{\frac{\pi}{n}}$$

ou, avec une autre notation, $(MB, MC) = \alpha + k \frac{\pi}{n}$.

α est une mesure angulaire donnée, n est un entier positif donné, k est un entier positif, nul ou négatif arbitraire.

b) Déterminer tous les points M tels que soient vérifiées simultanément les équations $(MB, MC) \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{n}}$, $\frac{MC}{MB} = \frac{1}{2}$.

Ces points sont les sommets d'un polygone P_1 convexe inscrit dans un cercle ; on numérote ces points $M_0, M_1, M_2, \dots$, à partir de l'un d'eux dans l'ordre où on les rencontre en décrivant le cercle dans le sens direct. Lorsqu'on joint ces points de p en p on obtient un nouveau polygone P_p . Comment, connaissant n , doit-on choisir p pour que les polygones P_1 et P_p aient le même nombre de côtés ? Justifier ce choix.

c) Trouver une inversion dans laquelle les points M ont pour homologues les sommets M' d'un polygone régulier. On désigne par Q_1 et Q_p les polygones réguliers convexe et étoilés admettant pour sommets tous les points M' . Dessiner, pour $n=6$, les polygones P_1, P_p d'une part, les polygones Q_1, Q_p d'autre part.

II. — a) Les points B et C sont fixes et le point A décrit un cercle (Γ) passant par B et C. Trouver le lieu géométrique des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle ABC. Donner d'abord de cette question une solution générale permettant d'atteindre d'emblée l'ensemble du lieu ; puis distinguer sur ce lieu global les lieux partiels du centre du cercle inscrit et de chacun des centres des cercles exinscrits respectivement opposés aux sommets A, B, C.

b) On désigne maintenant plus précisément par M le centre du cercle exinscrit opposé au sommet A, et par m le rapport des distances du point M aux sommets C et B pris dans cet ordre : $MC = m \cdot MB$.

Construire le triangle ABC, connaissant le côté BC, le cercle circonscrit (Γ) et le rapport m . Discuter.

c) Résoudre trigonométriquement le triangle ABC connaissant le côté $BC = a$, le rayon R du cercle circonscrit (Γ) et le rapport $\frac{MC}{MB} = m$, M étant toujours le centre du cercle exinscrit opposé au sommet A. Discuter.

d) On considère l'inversion de pôle C qui conserve B. Que devient la figure étudiée au paragraphe II, a ? Peut-on en déduire une nouvelle solution de II, b ?

N.-B. — Les discussions seront traitées relativement au paramètre m supposé inférieur à 1. On désignera par α l'angle aigu inscrit dans le cercle (Γ) et dont les côtés passent respectivement par les points B et C.

Agrégation féminine 1951

Mathématiques Élémentaires.

On donne une sphère fixe (O), ayant pour centre un point O et pour rayon ρ , et le plan fixe P tangent à la sphère (O) au point F.

On désigne par (S) tout cône circonscrit à la sphère (O) n'ayant pas son sommet dans le plan P, et par (C) la section (conique ou cercle) d'un tel cône par le plan P. Les cylindres circonscrits à (O) et dont les génératrices ne sont pas parallèles à P seront considérés comme des cônes (S) dont le sommet est rejeté à l'infini.

L'objet du problème est d'étudier quelques familles de courbes (C) et les cônes (S) correspondants.

Certaines questions font intervenir une transformation par polaires réciproques, dans le plan P, par rapport à un cercle directeur ayant F pour centre : on appellera (T) une telle transformation et (γ) les transformées par (T) des sections (C).

(Les différentes parties du problème peuvent, dans une large mesure, être traitées indépendamment les unes des autres. En rédigeant la solution, les candidates voudront bien respecter strictement, sinon l'ordre des questions, du moins le numérotage indiqué par l'énoncé).

I. — Définir les lieux géométriques des sommets S des cônes (S) dans chacune des trois hypothèses suivantes :

1° Les courbes (C) sont des coniques dont la directrice D associée au foyer F passe par un point fixe donné R.

2° Les courbes (C) admettent deux droites données L_0 et L'_0 comme droites conjuguées.

Soit (C_0) la famille des courbes (C) ainsi obtenues : caractériser les transformées (γ_0) des courbes (C_0) par une transformation (T). Montrer qu'il existe une infinité de couples de droites (L, L') qui sont conjuguées par rapport à toutes les courbes (C_0) .

Etudier les cas particuliers suivants :

— l'une des droites données L_0 ou L'_0 passe par le foyer F ;

— les droites données L_0 et L'_0 sont symétriques par rapport à F.

3° Les courbes (C) admettent une droite donnée L comme polaire d'un point également donné M.

Etudier les cas particuliers où la droite L, ou bien le point M, sont rejetés à l'infini.

II. — 1° On désigne par Π le plan tangent à la sphère (O) parallèle au plan P et par (Γ) la section d'un cône (S) par ce plan.

Lorsque les courbes (C) et (Γ) situées sur un même cône (S) sont des coniques à centre, on représente par a et a' les demi-longueurs de leurs axes focaux, par c et c' leurs demi-distances focales, par p et p' leurs paramètres, et par b et b' les demi-longueurs de leurs axes non-focaux, définies par les

relations : $b^2 = |a^2 - c^2|$, $b'^2 = |a'^2 - c'^2|$. Ces deux courbes se correspondent en général dans deux homothéties dont l'une a pour centre le sommet S ; préciser la position de l'autre centre d'homothétie.

Démontrer les relations : $b.b' = p.a' = p'.a = \rho^2$.

2° Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) dont le demi-axe non-focal a une longueur donnée b . On distinguera le cas des ellipses et le cas des hyperboles.

3° Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) dont le paramètre a une valeur donnée p .

Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) dont le demi-axe focal a une longueur donnée a .

4° Définir le lieu géométrique des sommets S correspondant aux coniques (C) ayant une excentricité donnée e .

III. — 1° On donne dans le plan P un point fixe R ; on considère les coniques (C) dont la directrice D associée au foyer F' passe par le point R, et qui vérifient de plus l'une des trois conditions suivantes :

— ou bien le demi-axe non-focal a une longueur donnée b (en distinguant le cas des ellipses et le cas des hyperboles) ;

— ou bien le demi-axe focal a une longueur donnée a ;

— ou bien l'excentricité a une valeur donnée $e \neq 1$.

On obtient ainsi trois familles de coniques (C) que l'on désignera respectivement par (C_1) , (C_2) , (C_3) .

Définir, pour chacune de ces trois familles : le lieu géométrique des foyers autres que F ; l'enveloppe des directrices autres que D ; le lieu géométrique des sommets S des cônes (S) ; l'enveloppe des coniques de la famille. Étudier les familles (γ_1) , (γ_2) , (γ_3) des transformées des coniques (C_1) , (C_2) , (C_3) par une transformation (T).

2° Parmi les coniques (C) admettant la même directrice D associée au foyer F, on considère les coniques (C') et (C'') ayant pour excentricités deux nombres inverses e et $1/e$. Soient S' et S'' les sommets des cônes (S') et (S'') correspondant à ces deux coniques.

Démontrer que, lorsque la droite D reste fixe et lorsque l'excentricité e varie, les deux sphères orthogonales à la sphère (O) ayant pour centres les points S' et S'' ont pour centres d'homothétie deux points fixes, et que les plans des deux coniques communes aux deux cônes (S') et (S'') sont deux plans fixes.

Comment varient ces deux centres d'homothétie et ces deux plans lorsque la directrice D tourne autour d'un point fixe donné R ?

Mathématiques Spéciales.

On désigne par la notation (T) toute enveloppe plane de troisième classe, non décomposée, possédant la propriété suivante : il existe dans le plan une droite D telle que deux des tangentes à l'enveloppe menées par n'importe quel point de D soient rectangulaires. Cette droite D sera appelée directrice de l'enveloppe (T).

I. — Le plan étant rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , on représente par (Γ_0) toute enveloppe (Γ) admettant comme directrice la droite D support de l'axe Ox .

1° Former l'équation tangentielle des enveloppes (Γ_0) . On montrera, en tenant compte, en particulier, de la condition de non-décomposition, que toute enveloppe (Γ_0) admet nécessairement la directrice D comme tangente, et que son équation peut se mettre sous la forme :

$$u[A(u^2 - v^2) + 2Buv] + [A'(u^2 - v^2) + 2B'uv]h + Cvh^2 = 0$$

où A, B, A', B', C , sont des constantes et u, v, h , les coordonnées courantes d'une droite.

Les coefficients A, B, A', B', C seront, dans la suite, supposés réels.

2° Déterminer l'enveloppe (L) des symétriques de la directrice D par rapport aux tangentes à (Γ_0) . Démontrer que la courbe (Γ_0) est le lieu géométrique des centres des cercles tangents à D et à (L) .

Lorsque le coefficient C n'est pas nul, démontrer que l'enveloppe (Γ_0) possède deux foyers réels F et F' , et que toute tangente à (Γ_0) , coupant la directrice D en un point M , est l'une des bissectrices de l'angle (MF, MF') . Examiner le cas où le coefficient C est nul.

Dans quel cas l'enveloppe (Γ_0) est-elle unicursale ?

3° Lorsque le coefficient C n'est pas nul, démontrer qu'il existe une infinité de rectangles $MPM'P'$ circonscrits à (Γ_0) , ayant deux sommets opposés M et M' sur la directrice D . Etudier la correspondance entre les points M et M' ; déterminer l'enveloppe de la droite PP' et celle du cercle circonscrit au rectangle $MPM'P'$. Démontrer que le lieu des points P et P' possède la propriété dualistique de la propriété caractéristique des enveloppes (Γ) .

4° Etudier la disposition des points à l'infini et des asymptotes d'une enveloppe (Γ_0) non-unicursale ; où se trouve le point de rencontre de deux asymptotes rectangulaires ?

II. — Etudier les réciproques des différentes propriétés des enveloppes (Γ) qui ont été établies aux deux premiers alinéas du paragraphe I, 2°.

2° Un plan étant rapporté à deux axes rectangulaires Ox, Oy , on considère l'hyperbole (H) définie par l'équation : $xy = a^2$ a étant une constante positive donnée ; soit T une tangente (ou une asymptote) à cette hyperbole. Former l'équation tangentielle du lieu géométrique (γ) des centres des cercles tangents à l'hyperbole (H) et à la droite T .

Déterminer, lorsque la tangente T varie, l'enveloppe des asymptotes des courbes (γ) , ainsi que le lieu de leurs points de rebroussement.

Construire la courbe (γ) uniquement dans le cas particulier où T est la tangente en l'un des sommets de l'hyperbole (H) .

III. — 1° Démontrer que toute enveloppe plane (E) de troisième classe, non décomposée, admettant la droite de l'infini comme tangente simple et quatre asymptotes, réelles ou imaginaires, deux à deux rectangulaires, est une enveloppe (Γ) .

Le plan étant rapporté à un triangle de référence ayant pour sommets

un point réel et les deux points cycliques, on désigne par p, q, r , les coordonnées courantes d'une droite par rapport à ce triangle. A quelles conditions doivent satisfaire les coefficients de la forme du troisième degré $f(p, q, r)$ pour que l'équation : $f(p, q, r) = 0$ représente une enveloppe (E) ? Former l'équation de la directrice correspondante.

2° On considère deux enveloppes (E₁) et (E₂) de la famille (E), ayant respectivement pour équations, par rapport au triangle de référence qui vient d'être défini : $f_1(p, q, r) = 0$ et $f_2(p, q, r) = 0$, et le faisceau linéaire d'enveloppes définies par l'équation : $f_1(p, q, r) + \lambda f_2(p, q, r) = 0$, où λ désigne un paramètre arbitraire.

En supposant les deux enveloppes (E₁) et (E₂) choisies de telle sorte que toutes les enveloppes non-décomposées du faisceau soient des enveloppes (E), et en se bornant au cas où les directrices de (E₁) et de (E₂) sont concourantes en un point à distance finie que l'on prendra comme sommet du triangle de référence, démontrer que les tangentes communes à ces deux enveloppes sont deux à deux rectangulaires, et étudier la disposition de leurs foyers.

Calcul différentiel et intégral.

Si $P(x, y)$ est une fonction harmonique des deux variables x et y , la surface S , définie dans un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz , par l'équation : $z = P(x, y)$ sera dite « surface harmonique ».

La fonction $Q(x, y)$ étant telle que $P + iQ$ soit une fonction analytique de la variable complexe $x + iy$, la surface S' définie par l'équation : $z = Q(x, y)$ sera dite « conjuguée » de S .

On fait tourner la surface S' de l'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oz ; on obtient ainsi une surface S_1 . Soient M et M' les deux points de S et de S' ayant même projection m sur le plan xOy , et soit M_1 le point de S_1 déduit de M' par la rotation considérée.

I. — Montrer que les normales à S et à S_1 aux points M et M_1 sont parallèles. La surface S' étant donnée, la parallèle Δ , menée par m à la normale M_1N_1 à S_1 (ou à la normale MN à S), engendre une congruence (C), qui admet le plan xOy comme *surface moyenne*. (On rappelle que la surface moyenne d'une congruence de droites est le lieu du milieu du segment formé par les deux foyers sur chaque droite de la congruence).

Inversement, on considère une surface Σ , telle que la parallèle à la normale en chaque point de Σ , menée par la projection de ce point sur le plan xOy , engendre une congruence admettant le plan xOy comme surface moyenne : montrer que Σ est une surface harmonique.

II. — Parmi les congruences (C) obtenues comme ci-dessus, à partir d'une surface S harmonique, s'en trouve-t-il qui soient des congruences de normales ? Trouver les surfaces S correspondantes.

III. — Soit I un point fixe de l'espace, non situé sur xOy . Une surface harmonique S étant donnée, on projette chacun de ses points M en m sur xOy , et par le point I on mène la parallèle Im' à la normale en M à S, jusqu'à la rencontre en m' avec xOy . Montrer que la correspondance entre m et m' est une *transformation conforme inverse*.

(On rappelle qu'une transformation conforme est *directe* ou *inverse* suivant qu'elle conserve ou qu'elle ne conserve pas le sens des angles).

Réciproquement, soit, dans le plan xOy , une transformation conforme inverse arbitraire, faisant correspondre à tout point m un point m' . On joint le point fixe I à m' , et l'on mène par m la droite Δ parallèle à Im' : l'ensemble de ces droites Δ forme une congruence (C) de l'espèce considérée au paragraphe I.

IV. — On suppose que la transformation (m, m') , dont on vient de parler, est celle qui fait correspondre à m son point inverse dans une inversion géométrique de centre O et de puissance donnée. Trouver les surfaces S et S' correspondantes.

V. — Soient S et S' deux surfaces harmoniques conjuguées, et M et M' deux points de ces surfaces ayant même projection m sur le plan xOy . Soit δ la perpendiculaire commune aux normales MN et M'N' à S et à S'. Par un point fixe I, non situé sur xOy , on mène la parallèle à δ jusqu'à la rencontre en m_1 avec le plan xOy .

Montrer que la correspondance entre m et m_1 est une *transformation conforme directe*.

VI. — Inversement, étant donnée une transformation conforme directe entre deux points m et m_1 du plan xOy , et un point fixe I (non situé sur xOy), on peut trouver des surfaces harmoniques conjuguées S et S', telles qu'en appliquant la construction géométrique précédente (§ V), on obtienne cette correspondance (m, m_1) actuellement donnée.

Déterminer ces surfaces S et S' en supposant que la correspondance entre les deux points m et m_1 est définie par la relation : $x_1 + iy_1 = A \operatorname{ch}(x + iy)$, A étant une constante réelle donnée. (La notation *ch* représente le cosinus hyperbolique).

VII. — Dans les mêmes conditions qu'au paragraphe V, on considère la droite D, parallèle à δ , menée par chaque point m , projection de M sur xOy . Les droites D engendrent une congruence (K). En général, cette congruence (K) n'a pas le plan xOy comme surface moyenne. Déterminer les surfaces S particulières pour lesquelles la surface moyenne de (K) coïncide avec le plan xOy .

Mécanique rationnelle.

On considère un plan matériel horizontal fixe Π , et une tige rigide fixe, de section négligeable, perpendiculaire au plan Π en un point fixe O_1 . Soit $O_1x_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle direct, fixe, ayant pour origine le point

O_1 ; l'axe O_1z_1 , confondu géométriquement avec la tige, est dirigé suivant la verticale ascendante.

Un disque d , circulaire, homogène, d'épaisseur négligeable, ayant pour centre O , pour rayon r et pour masse m , est muni d'une tige rigide dirigée suivant l'axe Oz du disque. Cette tige Oz , dont on néglige la masse et la section, est astreinte à rencontrer la tige fixe O_1z_1 en un point A , variable à la fois sur Oz et sur O_1z_1 ; cette liaison est bilatérale et sans frottement. Le disque d est placé sur le plan Π qu'il touche par son bord en un point I , variable tant sur Π que sur la circonférence formant le bord du disque.

On ne s'occupera pas des difficultés que soulèveraient une rencontre éventuelle du disque d avec la tige O_1z_1 , ou bien une rencontre éventuelle de la tige Oz soit avec le plan Π , soit avec le disque D dont il sera question dans les parties II et III du problème, et on supposera que les dimensions du plan Π , ainsi que les longueurs des tiges Oz et O_1z_1 , sont telles que les liaisons précédemment décrites ne cessent pas d'être réalisées au cours du mouvement.

Les paramètres déterminant la position du système seront la distance $\varrho = O_1I_1$, et les angles d'Euler ψ , θ , φ , qui déterminent la position par rapport au trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$, d'un trièdre trirectangle direct $Oxyz$, lié au disque d (l'axe Oz étant dirigé suivant la tige définie plus haut, et l'axe Ox suivant un rayon fixe par rapport au disque d), c'est-à-dire :

$$(O_1x_1, Ou) = \psi, \quad (O_1z_1, Oz) = \theta, \quad (Ou, Ox) = \varphi,$$

Ou étant un axe perpendiculaire à Oz et à O_1z_1 .

On désignera par g l'accélération due à la pesanteur.

On aura intérêt à utiliser un système de référence auxiliaire, formé par un trièdre mobile $IXYZ$ ayant pour origine le point I , l'axe IY étant le prolongement de O_1I , et IZ étant équipollent à O_1z_1 . Dans ce système de référence, les composantes de la réaction du plan Π sur le disque d seront désignées par X , Y , Z , et les composantes de la réaction de O_1z_1 sur Oz par X_1 , Y_1 , Z_1 .

I. — 1° Former les équations du mouvement du disque d lorsque le contact au point I a lieu sans frottement.

L'angle θ ou la distance ϱ peuvent-ils rester stationnaires ?

2° On suppose maintenant, et *jusqu'à la fin du problème*, que le plan Π est rugueux, et que le coefficient de frottement est assez grand pour que le disque d roule sans glisser sur le plan Π .

Former les équations du mouvement du disque ; montrer que leur intégration se ramène à deux quadratures. Calculer les réactions.

3° Dans ce paragraphe seulement, on néglige l'action de la pesanteur, et on suppose que chaque élément superficiel du disque d est soumis de la part du point O_1 à une attraction proportionnelle à la distance et à la masse de l'élément, k^2 étant la valeur de cette attraction pour une masse égale à l'unité de masse située à une distance du centre O_1 égale à l'unité de longueur.

On rappelle que le disque d roule sans glisser sur Π .

Etudier, dans ces hypothèses, le mouvement du disque. Quels sont les différents cas possibles ?

II. — Dans les parties II et III, l'action de la pesanteur n'est plus supposée négligeable, et les forces attractives considérées au paragraphe I, 3° n'existent plus.

On adjoint au système précédent un deuxième disque D, ayant la forme d'un cylindre de révolution, dont on appelle R le rayon et h la hauteur, et dont l'axe de révolution coïncide avec O_1z_1 ; ce disque est homogène et a pour masse M. On suppose que D peut glisser le long de O_1z_1 et tourner autour de cet axe, la liaison étant réalisée sans frottement.

Dans la partie II, le disque D est placé au-dessus du disque d , sa base inférieure étant en contact avec le bord du disque d en un point variable J ; il y a frottement au contact en J entre les deux disques, le coefficient de frottement étant donné, égal à f . (On ne s'occupera pas de ce qui se passe lorsque les conditions géométriques définies ci-dessus cessent d'être réalisées).

On rappelle que le disque d roule sans glisser sur le plan II.

On désigne par ζ la cote, par rapport au trièdre fixe $O_1x_1y_1z_1$, du centre de gravité G du disque D, par α l'angle de l'axe O_1x_1 avec un axe horizontal GU lié au disque, et par X_2, Y_2, Z_2 les composantes, par rapport au trièdre auxiliaire IXYZ, de la réaction de D sur d .

1° Former les équations déterminant le mouvement du système des deux disques d et D.

L'angle θ peut-il rester stationnaire ?

2° Etudier le début du mouvement dans les conditions initiales suivantes :

$$\varphi_0 = r/2, \quad \text{tg } \theta_0 = 3, \quad \theta'_0 = \omega, \quad \psi'_0 = 0, \quad \alpha'_0 = 2\omega,$$

ω étant une constante positive donnée (θ', ψ' , et α' sont les dérivées par rapport au temps).

3° Etudier le mouvement des deux disques quand le coefficient de frottement f est assez grand pour assurer le roulement sans glissement de d sur D. Calculer, dans ce cas, les réactions aux contacts en A, I, J.

III. — Les conditions décrites au début de la partie II étant toujours réalisées pour le disque D, sauf la condition de contact avec le disque d , on place le disque D dans une position où son centre de gravité a pour cote : $O_1G = 4r + h/2$, et on l'abandonne à partir de cette position, sans vitesses initiales ; au cours de sa chute, le disque D vient, à un certain instant t_0 , heurter le disque d . On suppose que le mouvement du disque d est tel qu'à cet instant t_0 , l'angle θ et les dérivées ψ' et θ' ont pour valeurs : $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$,

$\psi'_0 = \theta'_0 = \omega$, ω étant une constante positive donnée.

Le coefficient de Newton e (coefficient d'élasticité en J relatif à D et d) est donné ($0 \leq e \leq 1$), ainsi que le coefficient de frottement f entre les disques d et D.

On rappelle que d roule sans glisser sur le plan II.

Déterminer l'état des vitesses du système immédiatement après le choc. (On pourra se borner à achever les calculs en faisant sur les données une hypothèse simplificatrice que l'on choisira).

Agrégation masculine 1951

Mathématiques Élémentaires (7 heures).

I. — 1° Dans un plan (II) orienté, on donne un point O et un vecteur non nul $\vec{Ou}$ d'origine O . Ils définissent une transformation ponctuelle $\mathcal{C}(O, u)$ de la manière suivante :

A tout point a de (II), elle fait correspondre le point A , sur la demi-droite symétrique de la demi-droite Ou par rapport à la droite Oa , tel que

$$OA = \frac{Oa^2}{Ou}.$$

Deux points tels que a et a' , symétriques par rapport à O , ont le même transformé A par $\mathcal{C}(O, u)$. Examiner la transformation inverse de $\mathcal{C}(O, u)$.

Si au point fixe u on substitue un autre point u_1 ($\vec{Ou}_1$ non nul), la transformation $\mathcal{C}(O, u_1)$ fait correspondre à a le point A_1 ; montrer qu'on passe de A_1 à A par une similitude directe de centre O qui ne dépend que des points O, u, u_1 .

2° La demi-droite Ou jouant le rôle d'axe polaire dans le plan (II), on pourra désigner l'angle polaire $(\vec{Ou}, \vec{V})$ d'un vecteur $\vec{V}$ de ce plan, dans toute la suite, par la notation abrégée $\hat{V}$ (mod. 2π).

Deux points a et b de (II) étant transformés par $\mathcal{C}(O, u)$ en A et B , respectivement, prouver que $AB = \frac{ba \cdot ba'}{Ou}$ et que $\hat{AB} = \hat{ba} + \hat{ba'}$ (mod. 2π).

On choisira d'abord u_1 en A .

3° On fait tendre b vers a sur une courbe ayant en a une tangente at , montrer que la courbe décrite par B admet en A une tangente $A\theta$ telle que : $(OA, A\theta) = (Oa, at)$ (mod. π).

4° On considère la transformée par $\mathcal{C}(O, u)$ d'une ellipse ($\mathcal{E}$) de centre O , de foyers f et f' , d'excentricité e . Démontrer que c'est une ellipse ayant comme foyers O et le point F transformé de f et de f' ; évaluer en fonction de e son excentricité.

Inversement, toute ellipse de foyer O peut-elle être regardée comme transformée, par $\mathcal{C}(O, u)$ d'une certaine ellipse de centre O ?

5° Aux deux extrémités m et n , sur l'ellipse ($\mathcal{E}$), des demi-diamètres conjugués Om et On , correspondent sur l'ellipse transformée deux points M et N . Prouver qu'ils sont diamétralement opposés.

II. — N. B. : Les notations indiquées ici sont sans relation avec celles qui ont été employées dans I.

Soient (a, a') , (b, b') , (c, c') trois couples de points, donnés dans (II), supposés essentiellement distincts et formés chacun de points symétriques par rapport à O.

1° Résoudre, par application de la transformation $\mathcal{C}(O, u)$, le problème : déterminer une ellipse de centre O, passant par a et b et dont l'excentricité soit minimum.

On montrera qu'il existe une telle ellipse $e(a, b)$, caractérisée par le fait que les droites ba et ba' sont parallèles aux diamètres conjugués *égaux* de cette ellipse.

2° On considère sur $e(a, b)$ l'extrémité μ du demi-diamètre conjugué de Oa , telle que $\overrightarrow{O\mu}$ et $\overrightarrow{Ob}$ sont d'un même côté du diamètre aa' ; et l'extrémité l du demi-diamètre conjugué de Ob , telle que $\overrightarrow{Ol}$ et $\overrightarrow{Oa}$ sont d'un même côté du diamètre bb' .

En permutant circulairement les rôles des points a, b, c , on définit l'ellipse $e(b, c)$, puis l'ellipse $e(c, a)$, qui sont d'excentricité minimum parmi les ellipses de centre O passant par b et c , puis par c et a .

Sur $e(b, c)$ les points v et m sont définis comme l'ont été μ et l , en remplaçant respectivement a et b par b et c .

Sur $e(c, a)$ les points λ et n sont définis comme l'ont été v et m sur $e(b, c)$, en remplaçant b par c et c par a .

u étant un point fixe de (II), distinct de O, on représentera la nouvelle figure, formée par les points A, B, C, L, M, N, P, Q, R, respectivement transformés par $\mathcal{C}(O, u)$ des points $a, b, c, l, m, n, \lambda, \mu, v$.

Analyser, dans cette figure, comment on peut lier directement L, M, N, P, Q, R, aux points O, A, B, C.

3° L'opération $\mathcal{C}(O, u)$ transforme les ellipses $e(a, b)$, $e(b, c)$, $e(c, a)$ en les ellipses respectives E(A, B), E(B, C), E(C, A), dont les foyers, autres que O, sont désignés par F_C, F_B, F_A , respectivement.

Comment ces points se déduisent-ils simplement du point O, relativement au triangle ABC ? (On écartera le cas où A, B, C sont alignés).

Montrer que le triangle $F_A F_B F_C$ est homologue du triangle ABC dans une similitude *indirecte*.

Etablir les égalités vectorielles

$$\overrightarrow{F_B N} = \overrightarrow{F_C P} = -\overrightarrow{OA} \quad \overrightarrow{F_C L} = \overrightarrow{F_A Q} = -\overrightarrow{OB} \quad \overrightarrow{F_A M} = \overrightarrow{F_B R} = -\overrightarrow{OC}$$

Les points A, L, P sont sur un même cercle de centre O. Etablir que les droites LQ, MP se coupent en un point P' appartenant à ce cercle.

En déduire que le triangle P'Q'R', dont les côtés Q'R', R'P', P'Q' sont portés par les droites NQ, LP, MR, est homologue dans une translation du triangle $F_A F_B F_C$.

En appelant P, Q, R, les symétriques de P', Q', R' par rapport à O, le triangle PQR est symétrique du triangle $F_A F_B F_C$ par rapport à un certain point I.

4° Soit F le symétrique de O par rapport à la médiatrice du segment QR ; prouver que $RQMN$ est un rectangle, et que $\overrightarrow{F_P Q} = -\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{F_B A}$, puis que F_P est symétrique de A par rapport à I . Les symétriques F_Q et F_R de O par rapport aux médiatrices respectives des segments RP et PQ ont des propriétés analogues que l'on précisera.

5° Montrer que le triangle $F_P F_Q F_R$ est homologue du triangle $F_A F_B F_C$ dans une similitude *indirecte* où le point O est invariant.

Soit F le symétrique de O par rapport à I : comment peut-on passer de la figure $FABC$ à la figure $FPQR$? Etablir que chacune de ces figures est formée de points cocycliques.

6° Soient $E(P, Q)$, $E(Q, R)$, $E(R, P)$ les ellipses de foyer commun O , de seconds foyers respectifs F_R , F_P , F_Q , et de grands axes respectivement égaux à ceux de $E(A, B)$, $E(B, C)$, $E(C, A)$; montrer que $E(Q, R)$ est circonscrite au rectangle $RQMN$; propriétés analogues.

Prouver que l'ellipse (E) , de foyers O et F , ayant comme longueur de grand axe $OA + OB + OC$, est tangente à chacune des ellipses $E(A, B)$, $E(B, C)$, $E(C, A)$, $E(P, Q)$, $E(Q, R)$, $E(R, P)$. Les points de contact respectifs seront désignés par W, U, V, Z, X, Y .

Montrer que (E) contient à son intérieur les six ellipses précédentes.

7° Les ellipses $E(P, Q)$, $E(Q, R)$, $E(R, P)$ sont les transformées par $\mathcal{C}$ (O, u) d'ellipses de centre O qu'on dénote $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$, p, q, r étant des points dont les transformés respectifs sont P, Q, R . (*Provisoirement*, chacun des points p, q, r n'est défini qu'à la symétrie près de centre O).

L'ellipse (E) est la transformée par $\mathcal{C}$ (O, u) d'une certaine ellipse $(\mathcal{E})$ de centre O qui est bitangente à $e(a, b)$, $e(b, c)$, $e(c, a)$, $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$ en des points diamétralement opposés sur $(\mathcal{E})$: (w, w') , (u, u') , (v, v') , (z, z') , (x, x') , (y, y') . Chacune de ces six ellipses est intérieure à $(\mathcal{E})$.

III. — *Définition précise des points p, q, r .* On emploie ici la notation angulaire définie dans (I, 2°).

1° Montrer qu'il résulte des définitions données au (II, 2°) pour μ et l les relations angulaires

$$\begin{aligned} \widehat{Ob} + \widehat{O\mu} &= \widehat{ba} + \widehat{ba'} \\ \widehat{Oa} + \widehat{Ol} &= \widehat{ab} + \widehat{ab'} \end{aligned} \quad (\text{mod. } 2\pi)$$

et écrire les relations analogues définissant $\widehat{Ov}$, $\widehat{Om}$, $\widehat{Ol}$, $\widehat{On}$.

En faisant intervenir $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{Ob} + \widehat{O\mu} &= \widehat{AB} & \widehat{Ob} + \widehat{Om} &= \widehat{BC} + \pi \\ \widehat{Oc} + \widehat{Ov} &= \widehat{BC} & \widehat{Oc} + \widehat{On} &= \widehat{CA} + \pi \\ \widehat{Oa} + \widehat{Ol} &= \widehat{CA} & \widehat{Oa} + \widehat{Ol} &= \widehat{AB} + \pi \end{aligned} \quad \text{et} \quad (2) \quad (\text{mod. } 2\pi).$$

2° Les points r, r' sont communs à $e(q, r)$ et à $e(r, p)$. Prouver qu'on peut choisir celui de ces points, dénoté r , de manière que $\overrightarrow{Or}$ et $\overrightarrow{On}$ sont de même côté de la droite Ou , et aussi que $\overrightarrow{Or}$ et $\overrightarrow{Ov}$ sont de même côté de la droite Ol .

On démontrera, à cet effet que ces choix reviennent à supposer que

$$(3) \quad \widehat{On} + \widehat{Or} = \widehat{MN} \quad (4) \quad \widehat{Ov} + \widehat{Or} = \widehat{LN} \pmod{2\pi}$$

et que la compatibilité de ces conditions, compte tenu des relations (1) et (2), résulte de la similitude *indirecte* des triangles ABC et $F_A F_B F_C$.

De même, par des stipulations analogues, on peut définir sans ambiguïté les points appelés p et q . Ecrire, dans ces conditions, le système formé par (3) et deux équations analogues, et le système formé par (4) et deux équations analogues.

3° Montrer qu'il résulte de (I, 2°) que les tangentes communes en (w, w') à $(\mathcal{E})$ et à $e(a, b)$ sont parallèles à Or , et donner des propriétés analogues relatives aux points (u, u') , (v, v') , (x, x') , (y, y') , (z, z') .

4° Evaluer le rapport des distances algébriques de a et b à la droite ww' ; on pourra considérer un cercle dont $e(a, b)$ soit la projection orthogonale sur (Π) , et l'on trouvera pour ce rapport l'expression $-\frac{Ob \sin(\overrightarrow{O\mu}, \overrightarrow{Or})}{Oa \sin(\overrightarrow{Ol}, \overrightarrow{Or})}$.

Evaluer de même le rapport des distances algébriques à ww' de a et μ , et de b et l .

Ces propriétés, concernant $e(a, b)$, ont comme analogues des propriétés concernant des points de $e(b, c)$, $e(c, a)$ et aussi $e(p, q)$, $e(q, r)$, $e(r, p)$.

IV. — Il existe deux cylindres de révolution passant par $(\mathcal{E})$. Soit Δ l'axe de révolution d'un d'eux, (S) une sphère inscrite à ce cylindre, le long d'un grand cercle Φ de (S) , de centre S .

On propose de démontrer qu'il existe sur (S) des points $a_1, b_1, c_1, l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1, q_1, r_1$ dont les projections obliques sur (Π) , effectuées parallèlement à Δ , sont respectivement $a, b, c, l, m, n, \lambda, \mu, \nu, p, q, r$, et qui déterminent, avec S comme sommet les deux trièdres *supplémentaires*

$$(Sa_1, Sb_1, Sc_1) \text{ et } (Sp_1, Sq_1, Sr_1).$$

A cet effet on démontrera les propositions préliminaires suivantes :

1° Toute ellipse de (Π) , de centre O , tangente à $(\mathcal{E})$ en deux points symétriques par rapport à O , et intérieure à $(\mathcal{E})$, se déduit de $(\mathcal{E})$ par une affinité *oblique* dont l'axe est le diamètre joignant ces deux points, et que l'on précisera.

2° Cette même ellipse peut être considérée comme projection *oblique* sur (Π) , parallèlement à Δ , de deux grands cercles de (S) .

3° On précisera la situation des points $a_1, b_1, c_1, l_1, m_1, n_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1, p_1, q_1, r_1$ par des nombres proportionnels aux distances *algébriques* de ces points au plan de Φ , en considérant les produits vectoriels

$$\begin{aligned} &O_n \wedge O_q, \quad O_l \wedge O_r, \quad O_m \wedge O_p, \quad O_r \wedge O_b, \quad O_p \wedge O_c, \quad O_q \wedge O_a, \\ &O_c \wedge O_q, \quad O_a \wedge O_r, \quad O_b \wedge O_p, \quad O_v \wedge O_b, \quad O_\lambda \wedge O_c, \quad O_\mu \wedge O_a, \end{aligned}$$

On aura à utiliser les relations angulaires des groupes (1), (2), (3), (4) que l'on a rencontrées dans les 1° et 2° de III.

Enfin on démontrera les relations suivantes donnant les mesures des faces des deux trièdres supplémentaires

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg} \frac{\widehat{b_1 S c_1}}{2} = \frac{bc}{b'c} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{c_1 S a_1}}{2} = \frac{ca}{c'a} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{a_1 S b_1}}{2} = \frac{ab}{a'b} \\ \operatorname{tg} \frac{\widehat{q_1 S r_1}}{2} = \frac{qr}{q'r} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{r_1 S p_1}}{2} = \frac{rp}{r'p} & \operatorname{tg} \frac{\widehat{p_1 S q_1}}{2} = \frac{pq}{p'q} \end{array}$$

Mathématiques Spéciales.

I. — 1° On donne la parabole Γ qui a pour équation $y^2 - 2px = 0$ ($p > 0$), par rapport à deux axes quelconques Ox, Oy .

M étant un point du plan xOy , la parallèle à Ox menée par M coupe Γ en P ; soit P' l'un des points où la parallèle menée par M à Oy coupe Γ . Trouver le lieu Σ du point M tel que $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, λ étant un nombre algébrique donné.

Etant données deux paraboles Γ_1 et Γ_2 d'un même plan, dont l'une se déduit de l'autre par une translation, peut-on obtenir Γ_2 à partir de Γ_1 à l'aide de la construction précédente?

2° On donne l'hyperbole Γ qui a pour équation $xy = \frac{c^2}{4}$ ($c > 0$), par rapport à deux axes quelconques Ox, Oy .

M étant un point du plan xOy , la parallèle à Ox menée par M coupe Γ en P ; soit P' l'un des points où la parallèle menée par M à une direction fixe L du plan coupe Γ (L n'est parallèle, ni à Ox , ni à Oy). Trouver le lieu Σ du point M tel que $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, λ étant un nombre algébrique donné.

Etant données deux hyperboles Γ_1 et Γ_2 d'un même plan ayant même asymptote Ox et même centre O , peut-on obtenir Γ_2 à partir de Γ_1 à l'aide de la construction précédente?

II. — On donne les formes quadratiques

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

$$\varphi(u, v) \equiv Cu^2 + 2Buv + Av^2,$$

où les coefficients A, B, C sont réels; on suppose A et C non nuls et $\Delta = AC - B^2$ non nul.

Soit Γ la conique réelle ayant pour équation

$$F(x, y) \equiv f(x, y) - k^2 = 0, \quad (k > 0)$$

par rapport à deux axes quelconques Ox, Oy d'un plan.

1° M étant un point de ce plan, on désigne par P et P' deux points de Γ tel que $\overline{MP}$ soit parallèle à Ox et que $\overline{MP'}$ soit parallèle à Oy . Le lieu du point M tel que $\overline{MP'} = \lambda \overline{MP}$, λ étant un nombre algébrique donné, est en général une conique Σ .

Former l'équation ponctuelle de Σ , ainsi que son équation tangentielle (on donnera l'expression des divers coefficients des variables).

Comparer la nature de Σ avec celle de Γ .

2° Etudier les cas particuliers où la conique Σ se décompose ou n'existe pas.

3° Combien passe-t-il de coniques Σ par un point donné du plan ? Quelle est l'enveloppe des coniques Σ quand λ varie ?

4° Etant donné un parallélogramme et deux coniques Γ_1 et Γ_2 tangentes aux quatre côtés de ce parallélogramme, peut-on obtenir Γ_2 à partir de Γ_1 à l'aide de la construction donnée en II, 1° ?

III. — On désigne par $f(x, y, z)$ la forme quadratique :

$$f(x, y, z) \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy$$

à coefficients réels ; on suppose A, A', A'' non nuls.

$$\text{On suppose } \delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} \quad \text{non nul.}$$

On désigne par a, a', a'', b, b', b'' les coefficients des éléments A, A', A'', B, B', B'' dans le développement de δ , et l'on pose :

$$\varphi(u, v, w) \equiv au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wv + 2b''uv.$$

Les axes $Oxyz$ étant quelconques, on donne la quadrique réelle Q d'équation :

$$F(x, y, z) \equiv f(x, y, z) + D = 0 \quad (D \neq 0).$$

1° M étant un point de l'espace, P' et P'' désignent deux points de Q tels que MP' soit parallèle à Oy , et MP'' parallèle à Oz .

Montrer que le lieu du point M tel que : $\frac{\overline{MP'}}{\mu} = \frac{\overline{MP''}}{\nu}$, μ et ν étant deux nombres algébriques donnés, est, en général, une quadrique Σ_1 .

Développer l'équation ponctuelle de Σ_1 en donnant l'expression des divers coefficients des variables, ainsi que son équation tangentielle (on désignera par u, v, w, s , les coordonnées tangentielles homogènes d'un plan).

Comparer la nature de Σ_1 et celle de Q .

2° Etudier les cas particuliers où Σ_1 se décompose ou n'existe pas.

3° Combien passe-t-il de quadriques Σ_1 par un point donné de l'espace ? Quelle est l'enveloppe de Σ_1 quand μ et ν varient ?

IV. — Des notations sont celles de la III^e partie.

1° M étant un point de l'espace, et P, P', P'' trois points de Q tels que MP soit parallèle à Ox , MP' parallèle à Oy , MP'' parallèle à Oz , on pro-

pose d'étudier le lieu $\mathcal{Q}$ des points M tels que : $\frac{\overline{MP}}{\lambda} = \frac{\overline{MP'}}{\mu} = \frac{\overline{MP''}}{\nu}$,

λ, μ, ν étant trois nombres algébriques donnés.

Montrer qu'en général $\mathcal{Q}$ est une conique qui appartient à la quadrique Σ_1 , étudiée à la III^e partie, ainsi qu'à la quadrique Σ_2 lieu des points M tels

que : $\frac{\overline{MP''}}{\nu} = \frac{\overline{MP'}}{\lambda}$, et à la quadrique Σ_3 lieu des points M tels que :

$$\frac{\overline{MP}}{\lambda} = \frac{\overline{MP'}}{\mu}$$

Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ de la conique $\mathcal{Q}$.

Signaler les cas particuliers qui peuvent se présenter pour certaines valeurs de λ, μ, ν ; ces cas particuliers seront écartés dans la suite de cette étude.

$$2^\circ \text{ On pose } \left\{ \begin{array}{l} \sigma = \frac{A'\mu^2 + A''\nu^2 - B_2\mu\nu}{\mu\nu} \\ \sigma' = \frac{A''\nu^2 + A\lambda^2 - 2B'\nu\lambda}{\nu\lambda} \\ \sigma'' = \frac{A\lambda^2 + A'\mu^2 - 2B''\lambda\mu}{\lambda\mu} \end{array} \right.$$

Vérifier l'identité des pôles N_1, N_2, N_3 du plan $\mathcal{P}$ par rapport aux quadriques $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ avec les points dont les coordonnées homogènes sont $(-\sigma, \sigma', \sigma'', 0)$; $(\sigma, -\sigma', \sigma'', 0)$; $(\sigma, \sigma', -\sigma'', 0)$.

3° Σ_2 et Σ_3 ont en commun, outre $\mathcal{Q}$, une conique $\mathcal{M}_1$ située dans un plan $\mathcal{P}_1$; Σ_3 et Σ_1 ont de même en commun une conique $\mathcal{M}_2$ située dans un plan $\mathcal{P}_2$; Σ_1 et Σ_2 ont en commun une conique $\mathcal{M}_3$ située dans un plan $\mathcal{P}_3$. Former les équations des plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.

Vérifier sur ces équations que ces trois plans ont une droite commune.

Montrer que cette droite commune contient deux points I et I' communs à $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$, et non situés sur $\mathcal{Q}$.

Calculer les coordonnées des points I et I'.

4° Trouver l'équation tangentielle de la conique $\mathcal{Q}$. Etudier la nature des points à l'infini de $\mathcal{Q}$ et montrer qu'elle est liée au signe du produit $\delta\sigma\sigma'\sigma''$.

5° Former l'équation cartésienne de la surface $\mathcal{J}$ engendrée par les points I et I' définis au 3° de IV, quand λ, μ, ν varient, en supposant $B=0, B'=0, B''=0$.

Calcul différentiel et intégral.

1. — 1° Soit $f(x)$ une fonction définie pour $x \geq 1$, réelle, bornée dans tout intervalle $1 \leq x \leq a$.

Montrer, dans les deux cas suivants :

a) $f(x)$ continue sauf en un nombre fini de points dans tout intervalle $1 \leq x \leq a$,

b) $f(x)$ intégrable au sens de Riemann dans tout intervalle $1 \leq x \leq a$, qu'il existe α_0 , qui peut éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} x^\alpha f(x) dx \quad \alpha \text{ réel}$$

converge à l'infini pour $\alpha < \alpha_0$, diverge à l'infini pour $\alpha > \alpha_0$.

2° Soit β un nombre complexe, $R(\beta)$ sa partie réelle.

Montrer que sous les mêmes conditions que plus haut concernant $f(x)$, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} x^\beta f(x) dx$$

converge à l'infini pour $R(\beta) < \alpha_0$, diverge à l'infini pour $R(\beta) > \alpha_0$.

3° Soit C une courbe du plan des axes rectangulaires Ox, Oy , rectifiable, partant de $(1, 0)$ et s'éloignant à l'infini. On désigne par s l'arc (positif) de cette courbe compté à partir de $(1, 0)$, par $r(x, y)$ la distance à l'origine du point (x, y) .

On suppose que le long de C , x et y sont des fonctions continues de s et que dans tout intervalle $0 \leq s \leq a$.

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ sont définies et continues sauf en un nombre fini de points.

On considère l'intégrale curviligne

$$J(\alpha) = \int_C r^\alpha(x, y) [p(x, y) dx + q(x, y) dy] \quad \alpha \text{ réel ;}$$

$p(x, y), q(x, y)$ sont des fonctions définies sur C , réelles, bornées et intégrables au sens de Riemann sur tout arc $0 \leq s \leq a$.

Montrer que si, sur C , r est une fonction croissante de s , il existe α_0 qui peut éventuellement être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que l'intégrale $J(\alpha)$:
converge pour $\alpha < \alpha_0$, diverge pour $\alpha > \alpha_0$.

4° Montrer que si $J(\alpha_1)$ converge, $J(\alpha)$ converge uniformément pour $\alpha \leq \alpha_1$.

5° On se propose de construire un exemple prouvant que le résultat de (I, 3°) peut devenir inexact si r n'est pas une fonction croissante de s . On montrera qu'il suffit de trouver deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$ telles que $\int_0^{+\infty} f(s) ds$ converge à l'infini, tandis que $\int_0^{+\infty} g^\alpha(s) f(s) ds$ diverge à l'infini, quel que soit α (réel) non nul,

$g(s)$ satisfaisant aux conditions auxiliaires suivantes : $g(s)$ est positif, continue ; $g'(s)$ est définie et continue, sauf pour $s = k\pi$ (k entier positif quelconque) ; $|g'(s)| \leq 1$, $g(0) = 1$ $\lim_{s \rightarrow +\infty} g(s) = +\infty$.

On prendra $f(s) = \frac{d}{ds} \left[\frac{\sin s}{\text{Log}(1+s)} \right]$ et on cherchera une fonction $g(s)$ satisfaisant aux conditions ci-dessus.

II. — 1° On considère dans le plan complexe une courbe C , analogue à celle de (I, 3°), partant d'un point z_0 distinct de l'origine. On désigne par $f(z)$ une fonction analytique en chaque point de cette courbe et on pose

$$K(\alpha) = \int_C z^\alpha f(z) dz, \quad \alpha \text{ réel, l'intégrale étant prise sur } C.$$

Montrer que si $r \geq ks$, k désignant une constante positive, il existe un α_0 qui peut être $+\infty$ ou $-\infty$, tel que

$K(\alpha)$ converge pour $\alpha < \alpha_0$, $K(\alpha)$ diverge pour $\alpha > \alpha_0$.

2° On considère en particulier $L(\alpha) = \int z^\alpha e^{-z} dz$.

Trouver pour cette intégrale des courbes pour lesquelles α_0 est $+\infty$, α_0 est $-\infty$, $\alpha_0 = p$ avec convergence, divergence pour α_0 .

On essayera des courbes ayant une branche infinie telle que

$$x = p \operatorname{Log} y \quad x = p \operatorname{Log} y + \operatorname{Log} (\operatorname{Log} y).$$

3° On se propose de construire un exemple montrant que le résultat de (II, 1°) peut devenir inexact si r , fonction croissante de s , ne satisfait pas à l'inégalité $r \geq ks$.

On pourra prendre $f(z) = \frac{1}{\operatorname{Log} z}$ et comme courbe une spirale convenable.

III. — Soit $f(z)$ une fonction analytique dans la demi-bande $0 \leq y \leq 1$ $x \geq 1$.

On suppose que les intégrales $\int_p f(z) dz$ prises sur les parallèles à Ox situées dans la demi-bande, convergent et sont uniformément bornées.

1° On considère les courbes C_b $0 \leq b \leq 1$ formées des deux morceaux de droite :

$$\begin{aligned} x &= 1 & 0 \leq y \leq b, \\ y &= b & x \geq 1, \end{aligned}$$

et les intégrales : $M(\alpha) = \int f(z) z^\alpha dz$ $\alpha < 0$ prises sur ces courbes, parcourues du point $(1, 0)$ jusqu'à l'infini.

Montrer que $M(\alpha)$ ne dépend pas de b .

En déduire que $\int f(z) dz$ pris sur les mêmes courbes ne dépend pas non plus de b .

3° Peut-on en déduire que l'intégrale $\int f(z) dz$ prise sur une courbe tracée dans la demi-bande, partant de $(1, 0)$ et s'éloignant à l'infini converge et a une valeur indépendante de la courbe ? Montrer qu'inversement, si l'intégrale converge sur toute courbe de la demi-bande s'éloignant à l'infini, l'hypothèse du préambule de (III) est vérifiée.

Mécanique.

Un disque circulaire homogène pesant (D), de centre G, de masse m , de rayon $2a$ et d'épaisseur négligeable repose, dans le champ de la pesanteur d'intensité g , par un point M de sa circonférence, sur un plateau circulaire horizontal (II) de centre O, animé d'un mouvement de rotation uniforme de vitesse angulaire ω autour de son axe (Δ). Au contact de (D) et de (II) se développe un frottement de glissement, de coefficient f (on néglige les frottements de roulement et de pivotement). L'un des deux demi-axes, d'origine G, du disque (D) est matérialisé par une tige rectiligne rigide (T) de

masse et d'épaisseur négligeables, assujettie, par un dispositif convenable *sans frottement*, à rencontrer constamment l'axe (Δ) en un point K.

On repérera l'orientation du disque (D) par rapport à un trièdre fixe au moyen des trois angles d'Euler ψ, θ, φ tels que $(\Delta, T) = \theta$ ($0 < \theta < \pi$) [les axes portant (Δ) et (T) étant orientés positivement, le premier vers le haut, le second dans le sens de $\vec{K\bar{G}}$] et on achèvera de définir la position de (D) par l'une des trois longueurs $\overline{OK} = h, KG = l, OM = \varphi$ (la première étant algébrique), que l'on pourra même employer simultanément à condition de tenir compte des équations qui les relient. On désignera par mX, mY, mZ les composantes de la réaction du plateau (II) sur le disque (D) au point M, par rapport à un trièdre déduit du trièdre fixe par la rotation de l'angle ψ autour de l'axe (Δ) : le second de ses axes a la direction et le sens de $\vec{MO}$, le troisième est celui, déjà défini, portant (Δ).

I. — On suppose que le point K est fixé à la fois sur (T) et sur (Δ), et l'on amène, sans vitesses initiales, le disque (D) au contact du plateau (II).

Le glissement de (D) sur (II) s'arrête-t-il ? Si oui, au bout de combien de temps et que se passe-t-il après ?

Calculer le travail qu'il faut fournir au plateau (II) pour maintenir constante la rotation ω pendant cette première phase de glissement.

On envisagera les trois cas : (a) $h = 0$, (b) $h < 0$, c) (h) > 0 . Il pourra être commode de chercher à exprimer, en fonction du temps t , la vitesse v de la molécule M du disque (D) en contact avec le plateau (II).

II. — On libère le point K à la fois sur (T) et sur (Δ) et on suppose que le coefficient f est assez grand pour que le disque (D) ne puisse que rouler et pivoter sans glisser sur le plateau (II).

Montrer que l'intégration des équations du mouvement de (D) se ramène à des quadratures. Peut-on, à cet effet, utiliser l'intégrale des forces vives ?

A quelles conditions obtient-on des mouvements stationnaires ($\theta = C^{te}$) ? Etudier leur stabilité par la considération des mouvements voisins. Envisager plus particulièrement le cas où la tige (T) reste horizontale.

N.-B. — Les parties I et II sont indépendantes ; on pourra les traiter dans un ordre arbitraire. Dans l'étude de l'une et de l'autre de ces parties, il pourra être commode d'utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) et par rapport à la tige (T).

Ecole Normale Supérieure 1951

Groupe I

Première composition.

1° Déterminer les coefficients $p_0, p_1, \dots, p_n$ du polynôme

$$P_n(z) = p_0 + p_1 z + \dots + p_n z^n,$$

connaissant les valeurs de $P_n(z)$ pour les racines $z = z_h, h = 0, 1, \dots, n$ de l'équation $z^{n+1} - 1 = 0$. En déduire que, si pour $|z| = 1$ on a $|P_n(z)| \leq P$, alors $|p_k| \leq P$ pour $k = 0, 1, \dots, n$.

Soit $A_n(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ et soit α_n le maximum sur $|z| = 1$ de $|A_n(z)|$; montrer qu'il y a un nombre α^* indépendant de $A_n(z)$ et de n , ayant les propriétés suivantes : $\alpha_n \geq \alpha^*$, et il existe un polynôme $A_n(z)$ pour lequel $\alpha_n = \alpha^*$; un tel polynôme sera désigné par $A_n^*(z)$.

Soit $F(z) = r_0 + r_1 z + \dots + r_k z^k + \dots$ une série absolument convergente pour $z = R$; montrer que, si $|F(z)| \leq m$ pour $|z| = R$, alors on a

$$|r_k| \leq \frac{m}{R^k} \text{ pour tout } k.$$

2° Soit $f(x)$ une fonction donnée à valeurs complexes, de la variable réelle x , continue dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$. Soit $P_n(z)$ le polynôme prenant

aux points $z = z_h = e^{2ix_h}$ les valeurs $f(2x_h)$ quand $x_h = \frac{\pi h}{n+1}$,

$h = 0, 1, \dots, n$. Le coefficient de z^k dans $P_n(z)$ a-t-il une limite pour $n = \infty, k$ étant fixe? Trouver cette limite ω_k quand elle existe.

On pose : $q = |p^2| + |p_1|^2 + \dots + |p_n|^2$. Pour étudier q , il est commode d'exprimer q à l'aide des valeurs de la fonction $P_n(z) \overline{P_n}\left(\frac{1}{z}\right)$ aux points

$z = z_h$, où $\overline{P_n}(z) = \overline{p_0} + \overline{p_1} z + \dots + \overline{p_n} z^n$, $\overline{p_k}$ désignant le nombre imaginaire conjugué de p_k .

a. Montrer que le polynôme $A_n^*(z)$ du 1° est unique.

b. Examiner si q a une limite quand n augmente indéfiniment. Démontrer par un raisonnement rigoureux que la limite de ω_k pour $k = \infty$ existe.

3° Soit $B_n(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_1 t + b_0$ un polynôme en la variable réelle t et soit β_n le maximum de $|B_n(t)|$ pour $-2 \leq t \leq 2$. Montrer qu'il existe un nombre β^* indépendant de $B_n(t)$ et de n ayant les propriétés suivantes : $\beta_n \geq \beta^*$, et il y a un polynôme $B_n^*(t)$ pour lequel $\beta_n = \beta^*$;

démontrer que ce polynôme est unique. (On pourra poser $t = z + \frac{1}{z}$, alors

$B_n(t)$ devient une fonction de z que l'on pourra étudier en s'inspirant du 2°).

4° Soit une ellipse (E) décrite par le point de coordonnées $u = a \cos x, v = b \sin x, x$ étant réel et variable. Soit $C_n(w) = w^n + c_{n-1}w^{n-1} + \dots + c_1 w + c_0$ un polynôme en $w = u + iv$. Montrer qu'il existe un nombre γ_n^* indépendant de $C_n(w)$, mais dépendant de (E), tel que le maximum

de $|C_n(w)|$ est au moins égal à γ_n^* quand w parcourt (E) et qu'il y a un polynôme $C_n^*(w)$ et un seul pour lequel ce maximum est égal à γ_n^* . Quelle est la limite pour $n = \infty$ de $\sqrt[n]{\gamma_n^*}$?

5° On suppose que les coefficients $p_0, p_1, \dots, p_n$ d'un polynôme $P_n(z)$ sont tous réels et on pose $P_n(e^{ix}) = U_n(x) + iV_n(x)$, $U_n(x)$ et $V_n(x)$ étant réels. Déterminer les coefficients de $P_n(z)$ connaissant les valeurs de $U_n(x)$ pour $x = x_h = \frac{\pi h}{n+1}$ $h = 0, 1, \dots, n$.

N. B. — La question 5° est indépendante des questions 2°, 3° et 4°.

Deuxième composition.

Avvertissement. — Toutes les démonstrations doivent tenir compte de façon très stricte des seules hypothèses de régularité imposées par l'énoncé.

I. — Soit Π un plan, mobile par rapport à un plan fixe P et constamment en coïncidence avec P . Le plan P (resp. Π) est rapporté aux axes rectangulaires OX, OY (resp. $\omega x, \omega y$) et ces deux systèmes d'axes ont même orientation.

On désigne par $\xi(t), \eta(t)$ les coordonnées de ω par rapport à OX, OY , et on pose $\widehat{OX}, \omega x = \varphi(t)$, les fonctions $\xi(t), \eta(t), \varphi(t)$ étant définies et continues pour $0 \leq t \leq 1$.

On appelle *centre instantané de rotation* à l'instant t (en abrégé c.i.r.) le point $I(t)$ de P , limite, s'il existe, du centre de la rotation qui amène le plan Π de la position $\Pi(t)$ à la position $\Pi(t + \Delta t)$, lorsque $\Delta t \rightarrow 0$ par valeurs positives ou négatives. On désigne par $J(t)$ le point de Π qui coïncide avec $I(t)$ à l'instant t .

1° Exprimer la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un c.i.r. à l'instant t , en utilisant les rapports $\frac{\Delta \xi}{\Delta \varphi}$ et $\frac{\Delta \eta}{\Delta \varphi}$.

Calculer alors les coordonnées de $I(t)$ [resp. $J(t)$] par rapport à OX, OY (resp. $\omega x, \omega y$).

2° On suppose que $I(t)$ existe pour tout t et est fonction continue de t .

Soit $\mathcal{B}$ ou *base* (resp. $\mathcal{R}$ ou *reculante*) le lieu de $I(t)$ [resp. $J(t)$]. Désignons par $\mathcal{I}(t + \Delta t)$ le point de P qui coïncide à l'instant t avec $J(t + \Delta t)$, et posons : $\overrightarrow{\Delta I} = \overrightarrow{I(t)} \overrightarrow{I(t + \Delta t)}$, $\overrightarrow{\Delta J} = \overrightarrow{I(t)} \overrightarrow{\mathcal{I}(t + \Delta t)}$.

Montrer, en évaluant les composantes du vecteur $(\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta J})$, que

$$\frac{\overrightarrow{\Delta I} - \overrightarrow{\Delta J}}{\Delta \varphi} \rightarrow 0, \text{ lorsque } \Delta t \rightarrow 0.$$

En déduire que si la condition suivante est satisfaite : (1) $\frac{|\overrightarrow{\Delta I}|}{|\Delta \varphi|} > \lambda$ dès que Δt est assez petit ($\lambda = \text{constante} > 0$), $|\overrightarrow{\Delta I}|$ et $|\overrightarrow{\Delta J}|$ sont des infiniment petits équivalents et $(\widehat{\overrightarrow{\Delta I}, \overrightarrow{\Delta J}}) \rightarrow 0$, quand $\Delta t \rightarrow 0$.

3° On va chercher des cas généraux où la condition (1) est satisfaite.

Soit C la courbe d'équation $X = \xi(u)$, $Y = \eta(u)$, où ξ et η possèdent des dérivées premières continues, avec $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$. On pose d'autre part

$\varphi = t$ et $u = \int_0^t f(t) dt$, où $f(t)$ est une fonction continue positive définie pour $0 \leq t \leq 1$.

α . On suppose que ξ et η possèdent des dérivées secondes continues. Montrer que si $f(t)$ est partout différente de la valeur du rayon de courbure $R(t)$ de la courbe C , la condition (1) est satisfaite.

Cas particulier. — Etudier le cas où C est un segment de droite.

b . Montrer que si pour tout t il existe un nombre $\mu > 0$ tel que $\left| \frac{\Delta f}{\Delta t} \right| > \mu$ dès que Δt est assez petit, la condition (1) est satisfaite. La fonction $f(t)$ est-elle alors nécessairement dérivable partout ?

II. — 1° Soit C une courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$, où $f(x)$ et $f'(x)$ sont définies et continues pour $0 \leq x \leq 1$. Soit $D(x)$ la tangente à C au point $M(x)$.

Montrer que si le point d'intersection de $D(x_0)$ et $D(x_0 + t)$ a une limite quand $t \rightarrow 0$, cette limite est nécessairement $M(x_0)$.

Ecrire sous une forme simple la condition pour que cette limite existe, en posant : $f'(x_0 + t) - f'(x_0) = \varphi(t)$.

Montrer que cette condition est satisfaite lorsque $\left| \frac{\varphi(t)}{t} \right| > \lambda$ dès que $|t|$ est assez petit ($\lambda = \text{constante} > 0$), ou lorsque $\varphi(t)$ est croissante ou décroissante dans chacun des deux intervalles de la forme $[0, \epsilon]$, $[-\epsilon, 0]$.

Montrer que si $\varphi(t) = t \sin \frac{1}{t}$ (avec $\varphi(0) = 0$), cette condition n'est pas satisfaite.

2° On considère la famille des droites $D(\alpha)$ d'équation normale :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(\alpha) \quad (\text{où } p(\alpha) \text{ et } p'(\alpha) \text{ sont continues}).$$

Soit C le lieu des points caractéristiques $M(\alpha)$ de $D(\alpha)$ [on en montrera l'existence de façon rigoureuse].

On veut étudier C au voisinage d'un de ses points $M(\alpha_0)$. Montrer qu'on peut toujours, par un changement d'axes supposer $\alpha_0 = 0$ et $p(\alpha_0) = p'(\alpha_0) = 0$ sans rien changer aux hypothèses de régularité de $p(\alpha)$. On se placera dans ce cas.

Soit $E(u)$ le lieu de $M(\alpha)$ pour $0 \leq \alpha \leq u$.

Les projections de tous les points de $E(u)$ sur Ox et Oy remplissent deux segments dont on appellera $l(u)$ et $L(u)$ respectivement les longueurs.

Montrer que, ou bien $l(u) = L(u) = 0$ dès que u est assez petit, ou bien $\frac{l(u)}{L(u)} \rightarrow 0$ lorsque $u \rightarrow 0$.

Epreuve pratique.

Les données, exprimées en centimètres, sont rapportées à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . L'axe Oy est parallèle au petit axe de la feuille à 23 du bord inférieur ; il est orienté positivement vers la droite ; le plan xOy est le plan horizontal de projection ; le plan yOz est le plan frontal de projection ; le plan xOz est de profil suivant la parallèle au grand axe de la feuille à 16 du bord droit ; Ox est orienté positivement vers le bas et Oz vers le haut.

Un cône (S) a pour sommet le point S de coordonnées :

$$(x=12 ; y=4 ; z=8).$$

Sa trace sur le plan de front $x=16$ est l'hyperbole (H) définie par ses asymptotes et un point A.

$$\text{Asymptotes } \begin{cases} x=16 ; y=8. \\ x=16 ; 2z-y=16. \end{cases} \quad \text{Point A : } x=16 ; y=0 ; z=6.$$

Un cylindre (C) dont les génératrices ont pour paramètres directeurs $(-1, 1, 1)$, a pour trace dans le plan horizontal $z=4$ la parabole (P) définie par son foyer F et son sommet B.

$$F(x=16 ; y=0 ; z=4) \qquad B(x=16 ; y=-2\sqrt{2} ; z=4).$$

1° Déterminer les projections horizontale et frontale de l'intersection (I) de (S) et de (C). On construira un point courant noté m, m' sur l'épure et la tangente en ce point. Etudier les éléments remarquables.

2° Représenter le solide commun au cône et au cylindre supposés pleins, opaques et de la même substance, en limitant ce solide aux portions satisfaisant aux inégalités : $x \leq 16 ; 0 \leq z \leq 12$.

3° Déterminer l'ombre propre du solide obtenu éclairé par des rayons lumineux parallèles ayant la direction et le sens du vecteur de composantes : 0, —1, 1.

4° Indiquer, dans une notice *sommaire* rédigée sur la partie gauche de la feuille (et non au verso), les particularités rencontrées dans l'exécution de l'épure et les méthodes employées pour les résoudre. On pourra mettre quelques lettres sur l'épure pour faciliter les explications.

N.-B. — Les contours d'ombre seront tracés en bleu (plein ou pointillé selon le cas). Les parties vues et dans l'ombre seront recouvertes de hachures parallèles (équidistance : 1,5 mm.) à l'encre bleue ou au crayon noir.

Groupe II

Mathématiques.

I. — Soit Π un plan rapporté à deux axes obliques quelconques Ox, Oy . On appellera *élément de contact* tout couple (m, δ) constitué par un point m et une droite δ de Π passant par m .

Si C est une courbe, on dira que l'élément de contact (m, δ) est *associé* à C si δ est la tangente à C au point m de C.

Un élément de contact (m, δ) est déterminé par ses composantes x, y, a, b ,

où x, y sont les coordonnées de m , et a, b , les paramètres directeurs de δ , définis à un facteur non nul près.

Considérons la transformation $(M, \Delta) = T(m, \delta)$ qui, à l'élément de contact (m, δ) de composantes x, y, a, b (où $ay - bx \neq 0$) fait correspondre l'élément de contact (M, Δ) de composantes X, Y, A, B , définies par les relations :

$$(1) \quad aY = bX; \quad Ay = Bx; \quad xY - yX = 1.$$

1° Interprétation géométrique de ces relations. Quel est le produit T^2 de T par elle-même ?

2° Si δ_0 est une droite donnée, montrer que les transformés des éléments de contact (m, δ_0) sont des éléments (M_0, Δ) , où M_0 ne dépend que de δ_0 . On écrira $M_0 = T(\delta_0)$.

De même, si m_0 est un point donné, montrer que les transformés des éléments de contact (m_0, δ) sont des éléments (M, Δ_0) , où Δ_0 ne dépend que de m_0 . On écrira $\Delta_0 = T(m_0)$.

Construire M_0 connaissant δ_0 et Δ_0 connaissant m_0 . Montrer qu'on peut considérer T comme le produit d'une transformation par polaires réciproques par rapport à un cercle, par une autre transformation simple.

3° Montrer géométriquement ou analytiquement que si l'on rapporte le plan à d'autres axes obliques, les formules de transformation définissant T conservent une forme analogue. Quels sont les systèmes d'axes obliques pour lesquels les formules restent identiquement les mêmes ?

4° Soit C une courbe convexe fermée (1) admettant O comme centre de symétrie et régulière, c'est-à-dire ayant en tout point m une courbure fonction continue de m , et qui ne soit jamais nulle.

Montrer que T transforme les éléments de contact associés à C en éléments de contact associés à une courbe C' jouissant des mêmes propriétés que C , et qu'on appelle transformée de C [on la notera $C' = T(C)$].

Ce résultat peut-il s'étendre à toute courbe convexe de centre O ?

Soit C la courbe d'équation
$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1$$

Pour quelles valeurs de n cette courbe est-elle convexe ? Quelle est alors l'équation de sa transformée $C' = T(C)$?

II. — Soit C une courbe convexe de centre O et régulière. On dira que c'est une *ellipsale* lorsque la condition suivante est satisfaite : pour tout couple de points m, m' de C tels que Om' soit parallèle à la tangente en m à C , la tangente en m' à C est parallèle à Om . On dira alors que $\overrightarrow{Om}$ et $\overrightarrow{Om'}$ sont deux rayons vecteurs conjugués.

1° Montrer que l'aire du parallélogramme construit sur deux rayons conjugués d'une ellipsale est une constante A .

(1) C'est-à-dire une courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, où $f(\theta)$ est positive, continue et de période 2π , et telle que la courbe tourne en tout point sa concavité vers O .

Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que C soit une ellipsale est que la courbe $C' = T(C)$ soit homothétique à C.

En quel sens peut-on appeler ellipsale une courbe convexe de centre O non régulière ? Donner un exemple de polygone qui soit une ellipsale ;

2° Montrer que la donnée d'un arc $\widehat{mm'}$ d'ellipsale C, où $\vec{Om}$ et $\vec{Om'}$ sont deux rayons conjugués, détermine entièrement C.

Plus généralement, si $\vec{OP}$, $\vec{OP'}$ sont deux rayons vecteurs non colinéaires et si $\vec{OP''} = \vec{OP} + \vec{OP'}$, montrer que si $\widehat{PP'}$ est un arc convexe contenu dans le parallélogramme $OPP'P''$, tangent en P à PP'' et en P' à $P'P''$, cet arc appartient à une ellipsale et une seule dont on indiquera la construction.

3° Montrer que dans toute ellipsale C il existe deux rayons conjugués orthogonaux. On prendra comme axes de coordonnées les axes portant ces rayons. L'équation d'une tangente à C s'écrit alors sous forme normale :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p(\alpha).$$

Montrer, dans le cas où $p(\alpha)$ possède une dérivée seconde continue et où $A = 1$, que l'aire de C est égale à :

$$S = \int_0^{\pi} \left[p^2 + \frac{1}{p^2} - p'^2 \right] d\alpha.$$

Sèvres 1951

Première composition.

On considère dans un plan deux faisceaux de droites de sommets respectifs O, O'. Les droites de chacun des faisceaux sont repérées au moyen de leurs pentes, m , m' respectivement.

On établit entre ces deux faisceaux une correspondance homographique (à coefficients réels) :

$$\mathfrak{S} = A mm' + Bm + Cm' + D = 0$$

et on représente cette correspondance par le point H de l'espace dont les coordonnées homogènes sont A, B, C, D.

1° La correspondance est dite dégénérée lorsqu'il existe deux rayons distincts du faisceau de sommet O correspondant à un même rayon du faisceau de sommet O'.

Montrer que le lieu des points H qui représentent des correspondances dégénérées est une quadrique réellement réglée Q.

Si $m = u$, $m' = v$ sont les pentes des rayons dont les correspondants sont indéterminés, montrer que ces paramètres sont liés très simplement aux génératrices rectilignes de Q ;

2° On considère toutes les homographies qui admettent un couple donné $m_1 m'_1$. Quel est le lieu des points H qui représentent ces homographies ? Quelle relation y a-t-il entre ce lieu et la quadrique Q ?

En déduire une détermination, dans l'espace, de tous les couples de l'homographie représentée par un point arbitrairement donné H. Inversement :

construction du point H représentant l'homographie définie par trois couples ;

3° Quel est le point U qui représente la correspondance $\mathcal{U}$ dans laquelle les rayons homologues sont constamment parallèles ? Caractérisez les correspondances dont le point représentatif H est dans le plan polaire de U par rapport à Q ;

4° Quel est le point représentatif de la correspondance dans laquelle les rayons homologues font un angle constant V ? Lieu de ce point lorsque V varie.

Quel est le lieu des points représentatifs des correspondances dans lesquelles les bissectrices des rayons homologues ont des directions fixes ? Quelle relation y a-t-il entre ces lieux et la quadrique Q ?

5° On considère deux homographies $\mathcal{S}_1 (A_1 B_1 C_1 D_1)$ et $\mathcal{S}_2 (A_2 B_2 C_2 D_2)$ et on leur associe le faisceau :

$\mathcal{S}_1 + \lambda \mathcal{S}_2 = (A_1 + \lambda A_2)mm' + (B_1 + \lambda B_2)m + (C_1 + \lambda C_2)m' + D_1 + \lambda D_2 = 0$
représenté par la droite $H_1 H_2$.

Combien y a-t-il de rayons issus de O qui ont le même homologue dans toutes ces homographies ? Comment sont définies les homographies dégénérées du faisceau ?

Caractériser par ses homographies dégénérées, le faisceau d'homographies représenté par la droite conjuguée de $H_1 H_2$ par rapport à Q. Combien y a-t-il dans une homographie $\mathcal{S}$ donnée, de rayons parallèles à leurs homologues ? Discuter la réalité suivant la position du point H.

Combien y a-t-il, dans $\mathcal{S}$, de rayons qui font l'angle V (orienté) avec leurs homologues ? Discuter la réalité suivant la position du point H et la valeur de V ;

6° Etudier la correspondance $\mathcal{C}$ entre deux droites du faisceau (O) qui ont la même droite homologue dans le faisceau (O') quand on effectue sur l'une l'homographie $\mathcal{S}_1$ et sur l'autre l'homographie $\mathcal{S}_2$. Quelle propriété présente $\mathcal{C}$ lorsque les points H_1, H_2 sont conjugués par rapport à Q ? Cette propriété est-elle caractéristique ?

Comment peut-on définir alors l'ensemble de toutes les homographies représentées par les points d'un plan quelconque ?

Plus généralement, la droite $H_1 H_2$ coupe Q en deux points A, B et on pose : $(A, B, H_1, H_2) = \rho$.

Quelle est la signification géométrique de ce nombre ρ pour la correspondance $\mathcal{C}$? On pourra commencer par examiner le cas où $\mathcal{S}_1$ est l'homographie dans laquelle les rayons font l'angle V et $\mathcal{S}_2$ l'homographie à rayons parallèles ; puis le cas où $\mathcal{S}_1$ étant quelconque, $\mathcal{S}_2$ est encore l'homographie à rayons parallèles.

7° Réciproquement, étudier la correspondance entre les points H_1, H_2 qui représentent deux homographies conduisant à une même transformation $\mathcal{C}$ donnée du faisceau (O) :

On montrera que la droite $H_1 H_2$ rencontre deux génératrices de Q dont tous les points sont fixes.

Examiner le cas où $\mathcal{C}$ est une rotation.

On associe aux homographies $\mathcal{S}_1 = \mathcal{O}$ et $\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}$ la correspondance $\mathcal{C}$ qu'elles définissent dans le faisceau (O). Est-il possible de trouver une homographie $\mathcal{S}'$ telle que $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}_2 = \mathcal{O}$ définissent la même correspondance $\mathcal{C}$? Etudier la correspondance géométrique entre les points H et H'.

8° Etudier l'ensemble des faisceaux d'homographies dont les homographies dégénérées définissent dans (O) une involution donnée $\mathcal{I}$; on caractérisera la famille des droites représentatives de ces faisceaux relativement à Q et on déterminera le lieu de celles de ces droites qui passent par un point donné arbitraire P, ainsi que l'enveloppe de celles qui sont situées dans un plan donné Π . Cas où P est sur Q. Cas où Π est tangent à Q. Cas particulier où $\mathcal{I}$ est une rotation d'un angle droit.

Deuxième composition.

Notations. — Le symbole $|u|$ désigne le module (ou valeur absolue) du nombre u . $\log u$ désigne le logarithme népérien de u . Les variables utilisées sont des nombres réels.

1° Soit la fonction $g(x)$ définie par les relations, où a est une constante positive : $g(x) = x \log |x| - (x-a) \log |x-a|$, si $x(x-a) \neq 0$,
et $g(0) = g(a) = a \log a$.

Etudier les variations de $g(x)$.

2° Soit la fonction $f(x)$, où λ est un paramètre différent de zéro, définie par les relations : $f(x) = \frac{\log |x-\lambda|}{\log |x|}$, si $x(x^2-1)(x-\lambda) \neq 0$, $f(0) = 0$.

On nomme C_λ la courbe d'équation cartésienne : $y = f(x)$. Etudier la forme de C_λ suivant les valeurs de λ . Eléments remarquables de C_λ . (La position précise des points d'inflexion n'est pas demandée).

3° Etudier les limites éventuelles des racines de $g(x) = 0$, [$g(x)$ définie au 1°], lorsque a tend vers zéro. [On pourra appliquer la formule des accroissements finis à la fonction des deux variables u, v : $(u-v) \log |u-v|$; ou considérer les courbes : $y = (x-a) \log |x-a|$].

4° Pour $|\lambda|$ assez petit C_λ a des points à tangente parallèle à l'axe Ox . Ces points ont-ils des limites lorsque λ tend vers zéro ?

5° Parmi les fonctions $f(x)$ du 2°, l'une, $\varphi(x)$, est croissante dans tout intervalle où elle est définie. On nomme Γ dans toute la suite du problème la courbe d'équation $y = \varphi(x)$. Allure de Γ au voisinage de l'origine. Rayon de courbure de Γ en ce point.

6° Soit P une particule matérielle dont la masse sera prise comme unité, mobile dans le plan de Γ et soumise exclusivement aux deux actions mécaniques suivantes :

a. La force $\vec{F}$ d'un champ permanent ne dépendant en chaque point $M(x, y)$ que de l'abscisse x de ce point et parallèle à Oy ;

b. Une résistance opposée au mouvement de P par le milieu et propor-

tionnelle à la vitesse $\vec{V}$ de P. L'expression de cette résistance est $-\alpha\vec{V}$, où α est un coefficient fonction uniquement de la position M de P.

Dans une certaine expérience on constate que P décrit un arc γ de Γ , l'instant t de passage en chaque point M (x, y) s'exprimant avec une origine et une unité convenables pour t , par : $t = -y \log |x|$.

Déterminer les éléments inconnus α et $\vec{F}$. (Il pourra être commode de noter que le produit $t \frac{dy}{dt}$ est une fonction rationnelle de x et y).

NOTA. — La résolution des 3° et 4° n'est pas nécessaire pour aborder la fin du problème.

Epreuve pratique.

Les données, exprimées en centimètres, sont rapportées à un système d'axes rectangulaires Ox, Oy, Oz . L'axe Oy est parallèle au petit axe de la feuille à 16 du bord inférieur ; il est orienté vers la droite ; le plan xOy est le plan horizontal de projection ; le plan yOz est le plan frontal de projection ; le plan xOz est de profil suivant la parallèle au grand axe de la feuille à 15 du bord gauche ; Ox est orienté positivement vers le bas et Oz vers le haut.

Un cône (S) a pour base, dans le plan de front $x=5$, le cercle (C) de rayon 5 et de centre A ($x=5 ; y=4 ; z=13$).

Une génératrice du cône est de bout et son sommet S est tel que la droite AS ait pour paramètres directeurs (1, — 1, — 1), la cote de S étant inférieure à la cote de A.

Un cylindre parabolique (Q), dont les génératrices sont parallèles à AS, a pour base, dans le plan de front $x=5$, la parabole de foyer A, et de sommet B ($x=5 ; y=6,5 ; z=13$).

1° Déterminer les projections horizontale et frontale de l'intersection (L) de (S) et de (Q). Point courant et tangente en ce point. Éléments remarquables.

2° Représenter le solide commun au cône et au cylindre, pleins et de la même substance, en limitant ce solide aux portions qui satisfont aux inégalités : $5 \leq x \leq 12$.

3° Rédiger une notice *sommaire* sur la partie droite de la feuille (et non au verso) dans laquelle on expliquera les particularités géométriques de l'épure. On pourra mettre quelques lettres sur le dessin pour faciliter les explications.

St-Cloud et Fontenay 1951 (Sciences)

Première composition (Epreuve commune).

NOTA. — Les parties I, II, III et, dans la partie III, les questions a et b, peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy , un point A sur Ox ($\overline{OA}=a$), et un point B sur Oy ($\overline{OB}=b$).

I. — On suppose d'abord que A et B varient de façon que la différence $a-b=K$ reste constante et positive. On pose $a=b \operatorname{tg} t$. Le cercle de centre B, de rayon K, coupe la droite AB en C et C'.

a. Montrer que la fonction $y = \frac{K}{\operatorname{tg} t - 1} - K \cos t$ donne, en faisant varier t de 0 à 2π , à la fois les variations des ordonnées de C et de C'. Etudier ces variations et tracer la courbe représentative.

b. Calculer l'aire comprise entre Ot et l'arc de cette courbe correspondant à $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

c. On a défini, au début de cette première partie, une famille de droites AB dépendant du seul paramètre t . Soit (Γ) le cercle de rayon K centré sur Oy en un point variable d'ordonnée $K\lambda$. Discuter, suivant les valeurs de λ , le nombre de points C ou C' réels appartenant à des droites AB de la famille et situés sur (Γ) . On pourra prendre pour (Γ) la représentation paramétrique : $x' = K \sin \theta$ $y = K(\lambda + \cos \theta)$.

II. — Montrer, de préférence géométriquement, que lorsque A et B varient de façon que reste constante, soit la somme $a+b=h$, soit la différence $a-b=K$, la médiatrice de AB passe par un point fixe, ω ou ω' , que l'on construira dans chaque cas. Quel est alors le lieu du milieu de AB ?

III. — On suppose enfin A et B fixes ($a>b>0$). Soient (U) un cercle centré en U sur Ox et passant par A et (V) un cercle centré en V sur Oy et passant par B.

a. Un cercle (U) étant donné, construire les cercles (V_1) et (V_2) qui lui sont tangents. Lieux des points de contact M_1 et M_2 de (U) avec (V_1) et (V_2) , quand (U) varie. Montrer que le cercle de centre W, passant par B, M_1 et M_2 est orthogonal aux trois cercles (U), (V_1) , (V_2) , et que le produit $\overline{OU} \cdot \overline{HW}$ reste constant, si H est le point de coordonnées (a, b) .

b. Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que (U) et (V) soient tangents est que : $\overline{OU} + \varepsilon \overline{OV} + \varepsilon' \overline{UV} = \overline{OA} + \varepsilon \overline{OB}$, ε et ε' pouvant prendre les valeurs $(+1)$ ou (-1) .

En déduire qu'un des cercles tangents aux trois côtés du triangle OUV a un rayon constant ; et que par suite la droite UV reste tangente à l'un ou

l'autre de deux cercles (Ω) et (Ω') centrés respectivement en ω et ω' et tangents aux deux axes, chacun de ces cercles correspondant à un signe déterminé de ε .

Deuxième composition (Option).

Soient deux axes rectangulaires Ox, Oy , et le cercle (C) dont un diamètre OA est porté par Ox , $\overline{OA} = a > 0$.

Etant donné un point M quelconque du plan, la perpendiculaire menée en O à OM rencontre (C) en P, autre que O ; on fait correspondre au point M le point M_1 où la perpendiculaire menée en P à PM coupe la droite OM. Quand M décrit un arc de courbe (μ), M_1 décrit un arc de courbe (μ_1).

1° Soient $\varphi = \overline{OM}$ et $\varphi_1 = \overline{OM_1}$ les rayons vecteurs de M et M_1 mesurés sur le même axe Ou tel que : $(Ox, Ou) = \theta$. Trouver la relation entre φ , φ_1 et θ . On désigne par V et V_1 les angles que font avec Ou les tangentes en M et M_1 aux arcs (μ) et (μ_1). Démontrer la formule :

$$(1) \quad \cotg V + \cotg V_1 = 2 \cotg \theta.$$

Pour quelles positions du point M sur la courbe (μ) le point M_1 se trouve-t-il en O ? Quelle est alors la tangente à (μ_1) en O ? Le point M étant donné sur Oy , ainsi que la tangente en ce point à (μ), construire M_1 et la tangente en M_1 à (μ_1).

2° Soit (γ) le cercle de diamètre MM_1 . Quels lieux doivent décrire M et M_1 , pour que le cercle (γ) soit constamment tangent au cercle (C). Quel est, dans ces conditions, le lieu du milieu de MM_1 ?

3° En utilisant la relation (1) trouver les lieux que doivent décrire M et M_1 pour que les tangentes à ces lieux, en deux points correspondants M et M_1 , soient perpendiculaires.

4° Trouver le lieu de M_1 quand M décrit un cercle orthogonal en O au cercle (C). Trouver, de préférence géométriquement, l'enveloppe de la droite PM, le lieu du milieu I de PM, et l'enveloppe de la droite $M_1 I$.

5° Construire le lieu (ω_1) du point M_1 quand M décrit le cercle (ω) passant par O et centré au point ω de coordonnées polaires :

$$\varphi = a, \quad \theta = \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

On appelle E_1 le point de rencontre de (ω_1) avec son asymptote (Δ_1) et F_1 le point où la tangente à (ω_1) est parallèle à (Δ_1). Déterminer les angles polaires de E_1 et F_1 ; construire (Δ_1), E_1 , et F_1 , connaissant le point ω .

Ecole Normale Supérieure de l'Enseignement Technique

Section A1

Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie (4 heures).

Préambule. — Le plan est rapporté à deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$; il est orienté de façon que $(\vec{Ox}, \vec{Oy}) = +\frac{\pi}{2}$. On rappelle que, si deux courbes (C) et (S), du plan se coupent en un point M et admettent chacune une tangente en ce point, on dit que (S) coupe (C) sous l'angle V si l'on a $(MT, MU) = V$ à $k\pi$ près, MT et MU étant les tangentes en M à (C) et (S), respectivement.

u , ρ et φ étant des fonctions d'un paramètre, admettant chacune une dérivée du premier ordre par rapport à ce paramètre on considère le point M ayant pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = u + \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Quand le paramètre varie, M décrit une courbe (C). A chaque point M de cette courbe on fait correspondre le cercle (S) passant par M et ayant pour centre le point ω de coordonnées $(u, 0)$. Quand M décrit (C) on obtient ainsi une famille de cercles (S) associés à la courbe (C).

I. — Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que tous les cercles (S), associés à une courbe (C), coupent cette courbe (C) sous le même angle V est que les fonctions u , ρ , φ et leurs différentielles du premier ordre du , $d\rho$, $d\varphi$, vérifient la relation,

$$(1) \quad \cos(\varphi - V) du - \rho \sin V d\varphi + \cos V d\rho = 0.$$

Quelle est la relation qui exprime que :

- a. La courbe (C) est l'enveloppe de la famille des cercles (S) ?
- b. La courbe (C) est une trajectoire orthogonale de la famille des cercles (S) ?

Il y aura avantage, dans la suite, à poser : $\varphi = V + \theta - \frac{\pi}{2}$.

Que devient alors la relation (1) ?

II. — On suppose, dans ce paragraphe, $\varphi = a$ nombre fixe, donné et positif.

1° Déterminer la fonction u de θ qui définit une courbe (C) coupée sous l'angle V donné par les cercles (S) associés.

On considère, parmi les courbes (C) répondant à la question, celle qui passe par le point de coordonnées $x = a \cos V$, $y = a \sin V$. Ecrire les équations paramétriques de cette courbe particulière. Montrer qu'elle admet l'origine pour centre de symétrie. Comment se transforme-t-elle quand on change V en $-V$? On désigne par (I') la partie de cette courbe obtenue

en faisant varier θ de zéro à π et supposant $0 < V \leq \frac{\pi}{2}$. Construire (Γ) avec précision.

2° On désigne par R le point de rebroussement de la courbe (Γ) et par P le point où la tangente est parallèle à Oy .

a. Quels sont les lieux de ces points quand V varie ?

b. Soit Q le point d'intersection des tangentes à (Γ) en P et R. Calculer, en fonction de V , l'aire du triangle mixtiligne PQR formé par les deux tangentes et la courbe (Γ) . Déterminer la partie principale de cette aire, quand on prend $\frac{\pi}{2} - V = h$ pour infiniment petit principal ?

III. — On suppose, dans ce paragraphe, $\rho^2 = 2p u$, p étant une longueur donnée positive.

1° Déterminer la courbe (C) à laquelle sont tangents les cercles (S) associés. Préciser les éléments géométriques usuels de cette courbe.

2° Déterminer les courbes (C) qui sont coupées sous un angle droit par les cercles (S) associés. On exprimera d'abord φ en fonction de φ , puis les coordonnées x, y d'un point quelconque de (C) et leurs dérivées $\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}$ en fonction de φ et φ .

Montrer que chaque courbe (C) possède, en général, quatre points de rebroussement et deux points où la tangente est parallèle à Oy .

Déterminer les lieux de ces points.

3° Ecrire l'équation différentielle que doivent vérifier φ et $\theta = \varphi - V + \frac{\pi}{2}$ pour que les courbes (C) correspondantes soient coupées sous l'angle donné V par les cercles (S) . On ne cherchera pas à intégrer cette équation, mais on en déduira les expressions des dérivées $\frac{dx}{d\theta}$ et $\frac{dy}{d\theta}$ en fonction de φ, θ et V .

Trouver, pour les courbes (C) répondant à la question :

- Le lieu des points de rebroussement ;
- Le lieu des points où la tangente est parallèle à Ox ;
- Le lieu des points où la tangente est parallèle à Oy .

IV. — On a rencontré, dans l'étude des cas particuliers faite dans les deux paragraphes précédents, une courbe qui est, à la fois, enveloppe d'une famille de cercles (S) et lieu des points de rebroussement de la famille de courbes (C) coupées sous le même angle V par les mêmes cercles (S) .

On propose, dans ce dernier paragraphe, d'établir que cette propriété est vraie, en général, pour toute famille de cercles (S) définis par une relation $u = f(\varphi)$.

Géométrie (4 heures).

Les axes Ox et Oy sont rectangulaires. On donne le point fixe $A(a, a)$, a désignant une longueur constante. On considère la famille des cercles (ω)

qui sont tangents à l'axe des x , et tels que la polaire du point O par rapport à tout cercle (ω) passe par A .

I. — 1° Trouver analytiquement le lieu du centre ω du cercle (ω) ; préciser les éléments géométriques de ce lieu.

2° Démontrer géométriquement que les cercles (ω) restent tangents à un cercle fixe, et retrouver ainsi le lieu du centre ω .

3° Que devient la famille des cercles (ω) dans l'inversion de pôle O et de puissance a^2 ?

II. — On désigne par PQ le diamètre du cercle (ω) qui est parallèle à Ox . Construire les lieux des points P et Q (on pourra exprimer les coordonnées de ces points en fonction d'un paramètre, par exemple l'abscisse λ du centre ω).

Montrer que, pour une même valeur de λ , les tangentes en ω , P , Q à leurs lieux respectifs sont concourantes, et trouver le lieu de leur point de concours.

III. — La droite $O\omega$ coupe le cercle (ω) en R et S . Prenant O comme pôle et Ox comme axe polaire, former l'équation polaire du lieu des points R et S . Construire ce lieu ; préciser les angles sous lesquels ce lieu coupe les axes de coordonnées ; placer la courbe obtenue par rapport à la courbe transformée du lieu de ω par homothétie de centre O et de rapport 2.

IV. — A chaque cercle (ω) , on associe l'hyperbole (H) admettant le cercle (ω) pour cercle principal et le point O pour l'un des foyers.

1° Former l'équation polaire de toute hyperbole (H) [pôle O , axe polaire Ox] en fonction de l'un des angles polaires α du centre ω . Vérifier que les hyperboles (H) passent par un point fixe B à distance finie située sur Ox .

2° On effectue une transformation par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur le cercle de centre O et de rayon a . Que deviennent les hyperboles (H) ?

Retrouver ainsi géométriquement le fait que toutes les hyperboles (H) passent par un point fixe B .

3° Chaque hyperbole H coupe Ox en B et M .

Démontrer analytiquement et géométriquement que la tangente en M à (H) passe par un point fixe.

4° Plus généralement une droite fixe Δ , issue de O , coupe toute hyperbole (H) en deux points N et N' . Montrer (analytiquement ou géométriquement) que les tangentes en N et N' à (H) passent par l'un ou l'autre de deux points fixes. Quel est le lieu de ces deux points quand Δ pivote autour de O ?

5° Trouver l'enveloppe de l'axe non transverse de (H) [on pourra prendre comme paramètre la pente $m = \operatorname{tg} \alpha$ de la droite $O\omega$]. Construire cette enveloppe.

Déterminer la polaire réciproque de cette enveloppe (même cercle directeur que précédemment).

NOTA. — Il est indispensable de donner des résultats précis. Les figures seront dessinées avec le plus grand soin, en prenant $a = 4$ cm.

Section A2

Mathématiques (4 heures).

On donne une hyperbole équilatère (H) de foyers F et F', de demi-axe focal a ; $x'Ox$ est l'axe FF' orienté de F' vers F ; $y'Oy$ est l'axe non transverse.

I. — 1° Soit M un point quelconque de (H). Démontrer que

$$MF \cdot MF' = OM^2.$$

La réciproque est-elle exacte ?

2° La tangente et la normale à (H) en un de ses points M coupent respectivement Oy en I et ω . Le cercle (ω), de centre ω et passant par F, coupe la tangente en M à (H) en P et Q. Montrer que le pôle J de PQ par rapport à (ω) est sur Ox ; quelle est alors la polaire de I par rapport à (ω) ? Utilisant par exemple le deuxième point φ d'intersection de MF' avec (ω), montrer que $MP = MQ = MO$.

3° Trouver, lorsque M décrit (H) les lieux des points P et Q. Quelle propriété vient-on finalement d'établir pour une tangente à (H) ?

4° Que peut-on dire du quadrilatère $\omega P J Q$?

II. — Par l'inversion de pôle O et de puissance a^2 , la courbe (H) se transforme en une courbe non élémentaire (H'). Démontrer que si f et f' sont les inverses respectifs de F et F', m étant l'inverse de M de (H) on a la relation $mf \times mf' = C^*$ et calculer cette constante en fonction de a . En se servant du § I, prouver que la tangente mi à (H') en m est telle que

$$(Om, mt) = 2(Ox, Om) - \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

III. — Avec les mêmes notations on considère un cercle (Γ) du faisceau à points limites F et F' coupant Ox en K et L [K entre O et F]. On pose $OK = \lambda$. Pour quelles valeurs de λ la médiatrice de OL coupe-t-elle (Γ) ? Dans le cas où ces deux points d'intersection existent on désigne par μ l'un d'eux. Déterminer dans l'ordre que l'on voudra :

- 1° Le lieu des projections de F et F' sur la droite μK ;
- 2° L'enveloppe de μK ;
- 3° Le lieu de μ .

Confronter avec le § I.

IV. — Trigonométrie (indépendante des questions précédentes).

Peut-on déterminer un point M de (H) pour que $\widehat{OFM} = \frac{3}{2} \widehat{OF'M}$? (On établira au préalable la formule donnant $\sin \frac{1}{2} \alpha$ en fonction de α , et on posera $\widehat{OF'M} = \theta$).

Section B

Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie (4 heures).

NOTA. — Les candidats respecteront scrupuleusement les données numériques indiquées dans l'énoncé. Ils ne s'attarderont pas à étudier la concavité des courbes qu'on leur demande de construire.

Le plan de la figure est orienté positivement dans le sens trigonométrique.

On donne un axe $x'Ox$, d'origine O , dont le sens positif est celui de O vers x et, sur cet axe, deux points A et B , d'abscisses respectives a et $-a$ ($a > 0$). Par O on trace un axe $u'u$ dont le sens positif est celui de O vers u ; soit α la mesure en radians de l'angle $(\vec{Ox}, \vec{Ou})$. Un point M de $u'u$ est défini par $\overline{OM} = u$.

1° Donner les expressions de $\overline{MA}^2$ et de $\overline{MB}^2$ en fonction de a , u et α .

2° On suppose α constant et compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Déterminer M pour

que $\frac{MA}{MB} = \operatorname{tg} \varphi$, φ désignant un angle donné compris entre zéro et $\frac{\pi}{2}$. Comment faut-il choisir φ , quand α est fixé, pour que le problème admette des solutions ?

3° α étant toujours supposé constant, étudier la variation du rapport $z = \frac{MA}{MB}$ quand M décrit $u'u$. Construire la courbe représentative par rapport à deux axes rectangulaires Ou , Oz en donnant à α la valeur $\frac{\pi}{3}$ et à a la valeur 4 cm. On prendra l'unité graphique de l'axe Oz égale à 4 cm. Construire la tangente à la courbe au point où elle coupe l'axe Oz .

4° On suppose u constant et positif et α variable dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Étudier la variation du rapport $z = \frac{MA}{MB}$. Construire la courbe représentative dans un système d'axes rectangulaires $O\alpha$, Oz . On prendra $a = 4$ cm et $u = 6$ cm.

5° Calculer α en fonction de a , de u et du rapport $\frac{MA}{MB} = \operatorname{tg} \varphi$.

φ ayant une valeur fixe, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, étudier la variation de α quand u varie en restant positif. Construire la courbe représentative dans un système d'axes rectangulaires Ou , $O\alpha$. On prendra $a = 3$ cm ; $\varphi = \frac{\pi}{6}$ et l'unité graphique sur $O\alpha$ égale à 4 cm.

Géométrie et Géométrie descriptive (4 heures).

I. GÉOMÉTRIE. — Les axes Ox et Oy sont rectangulaires.

On donne le cercle (O) de centre O et de rayon $2a$, et le point $A(a, 0)$, a étant une longueur fixe.

1° A tout point $M(x_0, y_0)$ du plan, on associe la droite Δ_M qui est l'axe radical du cercle (O) et du cercle de diamètre AM . Montrer que si le point M décrit une droite D ($ux + vy + w = 0$), la droite Δ_M passe par un point fixe dont on calculera les coordonnées.

2° Solution géométrique du 1°.

3° Soit m la projection orthogonale de A sur Δ_m . Calculer les coordonnées (x_1, y_1) de m en fonction de a, x_0, y_0 . Inversement, exprimer x_0 et y_0 en fonction de a, x_1, y_1 . Les points M et m peuvent-ils être confondus ?

4° Montrer que la correspondance entre M et m est une suite de transformations connues ; en déduire, en particulier, le lieu de m quand M décrit un cercle.

II. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. — Les données, en centimètres, sont rapportées à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz : Oy ligne de terre orientée de gauche à droite suivant le petit axe de la feuille (on prendra le point O à 3 cm. du bord gauche de la feuille), Ox horizontale de profil orientée vers le bas de la feuille, Oz verticale orientée vers le haut de la feuille.

On donne les deux points :

$$S \begin{cases} x = 5 \\ y = 10 \\ z = 9 \end{cases} \quad A \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \\ z = 9 \end{cases}$$

1° Un tétraèdre $SABC$ est tel que :

$$SA = SB = SC = 5$$

$$\widehat{ASB} = 72^\circ ; \quad \widehat{BSC} = 54^\circ ; \quad \widehat{CSA} = 45^\circ.$$

Le trièdre $SABC$ est direct et l'angle du plan xOy et du plan SAB est $+60^\circ$ (on supposera la cote de B supérieure à celle de A).

Construire en trait fin les projections du tétraèdre $SABC$ (pas de ponctuation).

2° On considère le tétraèdre $SA_1B_1C_1$ symétrique de $SABC$ par rapport à S (S milieu de $AA_1 \dots$). Construire, en trait fort, avec ponctuation, les projections du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ tel que les plans $\alpha\beta\gamma, \beta\alpha\delta, \gamma\beta\delta$ et $\alpha\gamma\delta$ coïncident respectivement avec les plans ABC, A_1B_1C, B_1C_1A et C_1A_1B .

3° Par le point M tel que $\overrightarrow{\alpha M} = \frac{1}{4} \overrightarrow{\alpha\beta}$, on mène le plan parallèle aux droites $\beta\gamma$ et $\alpha\delta$; construire, avec ponctuation, les projections de la section du tétraèdre $\alpha\beta\gamma\delta$ par ce plan ; vraie grandeur de la section.

N. B. — On expliquera brièvement chacune des constructions effectuées.

Section D

Mathématiques (4 heures).

On donne une droite (D) et un cercle (O) , de centre O , de rayon R , tangents entre eux au point T . Un triangle variable ABC est assujéti aux conditions suivantes :

Il est rectangle en A ;

Ses sommets B et C appartiennent à la droite (D) ;

Ses bissectrices intérieures se coupent en O .

1° On désigne par :

M et N les points d'intersection des bissectrices BO et CO et du cercle circonscrit au triangle ABC ;

B' et C' les points d'intersection de ces bissectrices et des côtés AC et AB du triangle ;

O₁ et O₂ les centres des cercles exinscrits dans les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ du triangle ;

P la projection orthogonale de O sur la droite B'C'.

Trouver les lieux des points A, M, N, O₁, O₂, B', C', et P.

2° On pose $\widehat{TOB} = x$; $\left(\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}\right)$ Evaluer, en fonction de l'angle x et de R, la longueur y du côté BC.

Etudier la fonction $y = \frac{R\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{3x}{4} - 2x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ quand x varie de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{\pi}{2}$.

Tracer la courbe représentative en supposant $R = 2$ cm.

3° On pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Exprimer la somme $b + c$ et le produit bc en fonction de a et de R. Calculer b et c connaissant a et R. Discuter.

Supposant $R = 2$, trouver les triangles ABC dont les longueurs a , b , c , des côtés sont des nombres entiers.

N. B. — Les trois parties du problème sont indépendantes.

Professorats de l'Enseignement Technique 1951

Section A1 : Sciences Industrielles

Mathématiques (4 heures).

I. — Intégrer l'équation différentielle : $y = x(y' + y^2)$.

On donnera les équations paramétriques de chaque courbe intégrale en exprimant les coordonnées x , puis y , d'un point de cette courbe en fonction de la pente p de la tangente à la courbe en ce point.

II. — Combien y a-t-il de courbes intégrales passant en un point M de coordonnées α , β du plan ?

Partager le plan en régions suivant, d'une part, le nombre de courbes intégrales qui peuvent passer en un de leurs points, d'autre part, les signes des pentes des tangentes aux courbes intégrales en ces points.

Préciser la disposition des tangentes aux courbes intégrales sur les limites des régions précédentes.

Quel est le lieu des points P où les courbes intégrales qui y passent s'y coupent orthogonalement et quelles sont les pentes des tangentes en P ?

Quel est le lieu des points de contact des tangentes parallèles à la première ou à la deuxième bissectrice ?

III. — Dans la suite on posera $\frac{1}{p} = t$.

Déterminer en particulier les courbes intégrales C et C' qui passent en A de coordonnées $x = e$, $y = 2e$ ($e =$ base des Log. népériens). C étant celle dont la tangente en A a un coefficient angulaire positif, préciser comment la courbe C' se déduit de C .

Construire avec soin la courbe C ci-dessus définie et étudier toutes ses particularités. OA recoupe C en A' . Dire quel est le coefficient angulaire de la tangente à C en A' .

IV. — Calculer l'aire limitée par la courbe C et les axes ox , oy , ainsi que l'aire limitée par la courbe C et l'axe oy seul.

M étant un point tendant vers O sur la courbe C , la tangente en M à C coupe oy en T . Comparer les deux infiniment petits, mesures des deux aires en lesquelles l'arc OM partage le triangle OMT .

V. — Déterminer les centres de courbure de la courbe C aux points de C où les tangentes ont pour pente : 0 ; $-\frac{1}{2}$; $+1$; ∞ .

Calculer la longueur de l'arc de la développée Γ de la courbe C ayant pour extrémités les centres de courbure aux points de C où les tangentes ont pour pentes 1 et $+\infty$.

VI. — Former l'équation de la tangente à C en un point de paramètre t . Déterminer l'équation polaire, pôle en O de la podaire L de C par rapport à O . Montrer que le nombre de tangentes à C passant par un point donné K est au maximum de 3. Quel est le nombre maximum de points d'intersection, autres que O de la podaire L et d'un cercle donné passant par O ?

NOTA. — On rappelle que la podaire d'une courbe C par rapport à un point O est le lieu des projections du point O sur les tangentes à la courbe C .

Section A2 : Sciences appliquées

Mathématiques (4 heures).

1^{er} PROBLÈME. — 1^o Appelons triangle T tout triangle ABC tel que la différence des angles B et C soit égale à 1 droit ; montrer que, dans tout triangle T , la hauteur issue de A est tangente au cercle circonscrit et calculer les angles que font les bissectrices de l'angle $\hat{A}$ avec la droite BC .

Si dans un triangle ABC , les bissectrices de l'angle $\hat{A}$ font avec la droite BC des angles de 45° , montrer que ce triangle est un triangle T . Montrer que, si les sommets B et C d'un triangle T sont fixes, le lieu de A est une hyperbole dont on précisera les éléments.

2^o a. Soit, sur une hyperbole équilatère, deux points M et N fixes diamétralement opposés et un point P variable. Montrer que PN et PM sont également inclinés sur les asymptotes (on pourra se servir des parallèles à ces

droite obtenues en joignant le centre O de l'hyperbole au milieu I de PM et au milieu J de PN) ; en déduire que les bissectrices de l'angle $\widehat{MPN}$ gardent une direction fixe quand P varie.

b. Dans un triangle MNP, où M et N sont fixes, P varie de telle sorte que l'on ait $(MN, MP) + (MN, NP) = \alpha$. (Ces angles sont des angles de droites à π près et α est un angle donné). Montrer que les bissectrices de l'angle P du triangle MNP ont des directions fixes ; en déduire le lieu de P.

NOTA. — Le 2° peut être traité indépendamment du 1°.

2° PROBLÈME. — Dans tout le problème x désigne un angle compris entre 0 et 2π .

1° Etudier la variation de la fonction : (1) $y = \frac{2 - \cos x}{\cos 2x + \cos x - 1}$.

Tracer sa courbe représentative (C).

2° Résoudre l'équation : (2) $m \cos 2x + (m + 1) \cos x - m - 2 = 0$.
Discuter suivant les valeurs de m .

Vérifier les résultats de cette discussion en utilisant la courbe (C).

3° Résoudre l'équation : (3) $a \cos 2x + b \cos x - a - 4 = 0$.

Discussion. — a et b désignant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point M d'un plan rapporté à deux axes rectangulaires, indiquer, suivant la position de M dans ce plan, le nombre d'arcs compris entre 0 et 2π satisfaisant à l'équation (3).

Montrer que l'équation (2) est un cas particulier de l'équation (3) et retrouver graphiquement les résultats de la discussion de l'équation (2).

N.B. — On rappelle que l'équation du cercle de rayon R et dont le centre I a pour coordonnées $x_0 y_0$ est : $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Section B : Dessin et Mécanique

Mathématiques (4 heures).

Etant donnés une droite D et un point P, tel que $AP = 3a$ (a positif), on considère les lieux Γ_K des points M du plan, situés par rapport à (D), du même côté que P et tels que les distances MH et MP, à la droite (D) et au point P soient liées par la relation $MH \cdot \overline{MP}^2 = K$ (K constante).

I. — 1° Former, relativement au système de coordonnées polaires de pôle P et d'axe polaire Px, l'équation $f(r, \theta) = 0$ d'une courbe Γ_K . En déduire qu'il existe en général, trois points M, M', M'', de Γ_K sur un axe Pz et trouver une relation simple entre $\overline{PM}$, $\overline{PM'}$ et $\overline{PM''}$.

2° Déduire de cette relation, le lieu géométrique du point Q conjugué harmonique de P par rapport à deux points M et M', et montrer que le lieu de Q est une courbe Γ' , qui peut être définie d'une manière analogue à Γ_K . Placer la droite (D') correspondante, et donner la valeur de la constante.

3° Former l'équation différentielle $\varphi(r, r', \theta) = 0$ des courbes Γ_K et intégrer l'équation des trajectoires orthogonales de cette famille $\varphi(r, -\frac{r^2}{r'}, \theta) = 0$.

II. — 1° Etudier selon les valeurs de K , le nombre de points réels de Γ_K situés sur l'axe $x'x$.

2° On considère la courbe Γ pour laquelle $K = 4a^3$, et le point O tel que $AO = a$. Former l'équation cartésienne de Γ relativement aux axes OX et OY , puis son équation polaire dans le système de pôle O et d'axe polaire OX . Coordonnées (ρ, ω) .

3° Construire la courbe Γ .

4° En interprétant géométriquement l'équation polaire, donner de Γ une génération à partir d'un cercle et d'une droite. En déduire la construction des tangentes au point O et la valeur de leur angle.

III. — 1° Déterminer les points de Γ pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe polaire OX .

2° Calculer les valeurs du rayon de courbure, au sommet S et au point O (points où la courbe rencontre l'axe Ox). Placer les centres de courbure correspondants.

3° Calculer l'aire de la boucle de la courbe, ainsi que l'aire comprise entre cette courbe et son asymptote.

4° On fait tourner Γ autour de OX . Calculer le volume engendré par la boucle.

Les paragraphes II et III peuvent être traités indépendamment du paragraphe I.

Géométrie descriptive (4 heures).

CÔNE ET PARABOLOÏDE. — I. Un réflecteur, en forme de parabolôïde de révolution, a pour axe la droite FB , de front, passant par le point F ($x = z = 100$, $y = 90$) et inclinée à 60° sur le plan horizontal.

La méridienne est une parabole de foyer F , de paramètre $2p = 100$ et dont la concavité est tournée vers le bas. Il est limité par un plan $u'u$ perpendiculaire à l'axe FB , situé à 50 de F .

Ce réflecteur est attaché au plafond, à la cote 165, par un support en forme de tronc de cône de révolution, dont l'axe vertical, passe par F et dont la base supérieure a pour diamètre 44. La génératrice de contour apparent la plus à gauche est tangente à une parabole méridienne du réflecteur.

On demande : 1° De tracer le contour apparent du solide formé par le réflecteur et son support ; 2° De déterminer l'intersection des deux surfaces.

II. — Le faisceau lumineux issu de F , se compose de deux parties :

a. Un faisceau de rayons directs issus de F ;

b. Un faisceau de rayons réfléchis.

Construire le contour de l'aire du plan horizontal de projection, et le contour de l'aire du plan frontal de projection, éclairées par ces deux faisceaux.

En supposant opaques les plans de projection ainsi que le réflecteur, on

indiquera, en les couvrant de hachures fines et espacées, les aires éclairées qui sont vues sur l'épure.

III. — En supposant la surface du projecteur et celle du support constituées par des tôles de 5/10, schématiser par un croquis à main levée, le ou les moyens d'assembler ces deux surfaces.

IV. — Exposer brièvement, dans un mémoire, la méthode suivie pour réaliser les constructions demandées.

N.B. — Feuille de 297×420 . Cadre de 287×410 .

Les courbes admettant un axe de symétrie, pourront n'être représentées que par une moitié.

N.D.L.R. — L'énoncé était complété par une figure facilitant la mise en place des données dans le cadre.

Mécanique (4 heures).

1^{er} PROBLEME. — Soit une barre de torsion, de diamètre d , de longueur $3l$, située dans un plan horizontal. L'extrémité A est fixée dans un support et ne peut par conséquent pas tourner, le tourillon B est mobile librement sans frottement dans un palier situé très près de l'extrémité B (fig. 1). De ce fait la flexion est négligeable pour la barre AB que l'on peut donc considérer comme une barre simplement tordue sur la longueur $3l$.

Dans l'extrémité B est encastrée une barre de section rectangulaire BCD perpendiculaire à AB, de hauteur h , de largeur b et de longueur $3l$. En l'absence de toute charge l'encastrement est horizontal et on négligera dans ce qui suit le diamètre du tourillon B devant la longueur $BD = 3l$.

Le fer plat BCD pèse p kgf par mètre. On suspend en C ($BC = 2l$) une charge P et on désigne par E et G les modules d'élasticité longitudinal et transversal du métal (barre de torsion et fer plat).

1^{re} question. — Calculer, dans l'hypothèse de déformations petites, l'abaissement de l'extrémité D (calcul littéral).

2^e question. — A l'aide d'un support que l'on vient placer sous l'extrémité D, on ramène cette extrémité (la charge P étant maintenue) au niveau de A et B. Calculer la réaction du support placé sous D (calcul littéral).

3^e question. — Déterminer la valeur numérique des deux quantités précédentes dans le cas où :

$$l = 200 \text{ mm}, d = 10 \text{ mm}, h = 6 \text{ mm}, b = 21 \text{ mm}.$$

$$E = 20.000 \text{ kgf/mm}^2, G = 8.000 \text{ kgf/mm}^2, P = 2 \text{ kgf}$$

$$p = 1 \text{ kgf par mètre}.$$

2^e PROBLEME. — On étudie un dispositif expérimental (fig. 2) formé d'un arbre vertical ZZ' qui peut être, soit maintenu fixe, soit entraîné en rotation par un moteur. (Les paliers et butée supportant l'arbre ainsi que le moteur ne sont pas représentés).

A la partie supérieure, un plateau coulisse librement sur l'arbre (frotte-

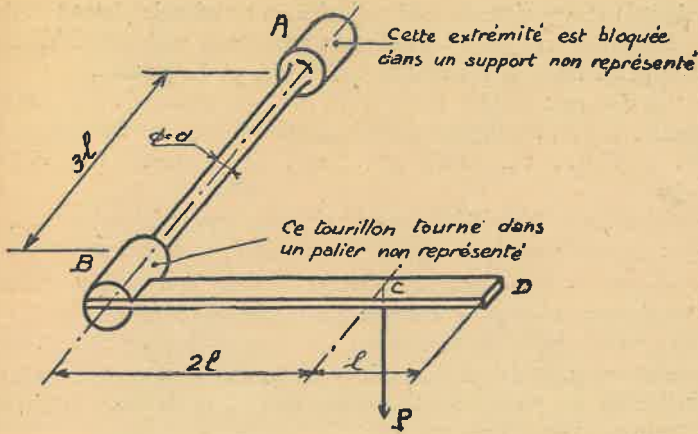
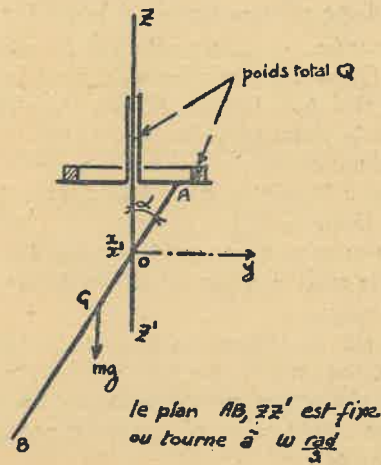
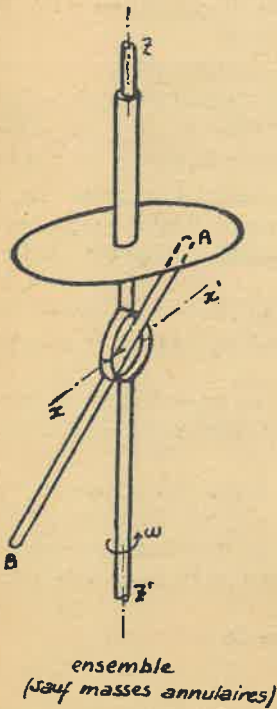


fig. 1



schéma

fig 2

ment négligé) et une clavette rend solidaire en rotation le plateau et l'arbre. Sur le plateau on peut placer des charges annulaires variables et on désigne par Q le poids total de ces masses annulaires et du plateau.

Une tige AB peut osciller (frottement négligé) autour de l'axe xx' perpendiculaire à ZZ' . La tige homogène, cylindrique, a des dimensions transversales négligées. On donne pour cette tige : masse : m , $AB = 4a$, $OA = a$.

Le contact entre l'extrémité arrondie A de la tige et le plateau est caractérisé par un frottement non négligeable et connu : coefficient $f = \operatorname{tg} \varphi$.

1^{re} question. — Le moteur étant arrêté (aucune rotation du système) on place les charges de façon à avoir un angle $\alpha = \alpha_0$ donné.

a) Déterminer entre quelles limites peut varier Q pour avoir l'équilibre strict (pour cet angle α_0) et, en particulier, donner la charge Q à appliquer, en fonction de α_0 , pour avoir l'équilibre strict à la descente du plateau, à partir de la position définie par α_0 .

b) Montrer qu'il peut y avoir arc-boutement, c'est-à-dire que, quel que soit Q , le mouvement de descente du plateau est impossible pour des valeurs de α à déterminer.

c) Montrer que l'équilibre strict à la montée du plateau est stable tandis que l'équilibre à la descente est instable.

2^e question. — Le système tourne à la vitesse constante ω .

a) Déterminer le système des forces d'inertie d'entraînement de la tige AB .

b) Déterminer en fonction de α et ω la valeur de Q correspondant, à partir d'une position donnée, à l'équilibre strict à la montée du plateau.

3^e question. — L'ensemble plateau masses annulaires ayant un poids donné Q_1 on diminue progressivement la vitesse ω jusqu'à ce que l'angle α soit égal à 60° . Soit ω_1 la vitesse correspondant à l'équilibre strict à la montée du plateau à partir de $\alpha = 60^\circ$.

On diminue ensuite ω jusqu'à ce que $\alpha = 30^\circ$. Soit ω_2 la vitesse correspondant à l'équilibre strict à la montée du plateau à partir de $\alpha = 30^\circ$ (Q valant toujours Q_1).

On pourra supposer que le passage de ω_1 à ω_2 est suffisamment lent pour admettre que l'on a une succession d'états d'équilibre, et on prendra $f = 0,4$, $Q_1 = mg/3$.

Calculer les vitesses ω_1 et ω_2 et le travail fourni par le moteur d'entraînement (on rappelle que tous les frottements sont négligés, sauf celui entre tige et plateau, et on désignera par des lettres les caractéristiques du système qui sembleraient nécessaires et non calculables en fonction des données précédentes).

Section Commerce

Mathématiques financières (4 heures).

1^{er} PROBLÈME. — Une société a emprunté le 1^{er} janvier 1945 une somme de 10.000.000 francs, remboursable du 1^{er} janvier 1951 au 1^{er} juillet 1970 par quarante semestrialités décroissantes en progression arithmétique, la

dernière semestrialité étant égale au double de la première. Le taux annuel d'intérêt de l'emprunt est de 4 %.

Calculer le montant de la première et de la deuxième semestrialité.

2° PROBLÈME. — On désigne par x le taux de rendement d'un emprunt-obligations, par i le taux nominal d'intérêt ; par C la valeur nominale d'une obligation (égale à sa valeur de remboursement), par E_n sa valeur moyenne n périodes avant le terme final de l'emprunt.

L'emprunt est amortissable par *annuités constantes* ; ses coupons sont annuels.

1° Calculer la valeur de la nue-propriété unitaire Q_n et de l'usufruit unitaire P_n en fonction de E_n , C , x , i . Etablir le rapport $h_n(x, i)$ de la nue-propriété unitaire à l'usufruit unitaire, en fonction de x , i , n .

2° Montrer que l'on peut calculer x au moyen de la formule :

$$(1) \quad x = \frac{Ci + (C - E_n) h_n(x, i)}{E_n}.$$

Comment se décompose d'après cette formule (1), le revenu de l'obligation ?

3° On peut, à l'aide de la formule (1), calculer x en remplaçant successivement $h_n(x, i)$ par des valeurs (dépendant évidemment de x) de plus en plus approchées. Les tables d'Izarn donnent d'ailleurs pour diverses valeurs de i , de x , de n , les valeurs correspondantes de $h_n(x, i)$. En voici un exemple :

PERIODES	TAUX $i = 0,04$.		
	$x = 0,06$	$x = 0,065$	$x = 0,07$
..... 20	 0,0681 861	 0,0671 081	 0,0660 705

Application numérique. — Une personne achète au prix de 8.000 francs une obligation de 10.000 francs, 4 %, amortissable au plus dans vingt ans par annuités constantes (coupons et amortissements annuels). Calculer le taux approximatif donné par la formule (1) lorsqu'on remplace $h_n(x, i)$ par $\frac{i}{n}$.

Le Gérant : L. PARAZINES.

ÉDITIONS

122, Boulev. St-Germain



MAGNARD

PARIS (6^e)

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

Collection DESBATS

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Agréé des Mathématiques, Professeur au Lycée Saint-Louis*

- Des ouvrages simples et clairs.
- Une typographie aérée.
- Des figures qui facilitent la compréhension, en particulier les figures de l'espace qui donnent l'impression du relief.

Classe de Mathématiques : MÉCANIQUE — ALGÈBRE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE et GÉOMÉTRIE COTÉE

Classe de Philosophie : ALGÈBRE et TRIGONOMÉTRIE

Collection FOULON

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Professeur agrégé des Mathématiques*

Classe de Mathématiques : ARITHMÉTIQUE — TRIGONOMÉTRIE

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE

SPÉCIMENS OFFERTS SUR DEMANDE

LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

8, Rue Férou, PARIS-VI^e

LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES

par
et

M. MONGE

M. GUINCHAN

*Ancien élève de l'École Normale Supérieure
Professeur au Lycée Michelet*

*Licencié ès-Sciences
Professeur de Cours Complémentaire*

NOUVEAUTÉ :

ARITHMÉTIQUE, ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE
CLASSE DE QUATRIÈME

Enseignement long—Un volume (16×21,5), de 336 p., cartonné.... *Sous presse*

Enseignement court—Un volume (16×21,5), de 360 p., cartonné.... *Sous presse*

Cours Complémentaire—Un vol. (16×21,5), de 392 p., cartonné.. *Sous presse*

PRÉCÉDEMMENT PARUS :

CLASSE DE SIXIÈME—Un volume (16×21,5) de 184 p., cartonné.. **270 »**

CLASSE DE CINQUIÈME—

Enseignement long—Un volume (16×21,5), de 236 p., cartonné.... **300 »**

Enseignement court—Un volume (16×21,5), de 280 p., cartonné... **350 »**

Roland MAILLARD et

Professeur de Mathématiques spéciales
au Lycée Charlemagne.
Chargé d'un cours
à l'École Normale Supérieure

Albert MILLET

Professeur agrégé
au Lycée Janson-de-Sailly
et à l'École Normale Supérieure
de l'Enseignement Technique

COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second Degré

EN VENTE :

Classe de Sixième classique et Moderne Mathématiques. Un vol. in-16, broché ou cartonné, de 192 p., avec 900 exercices et problèmes, un complément de dessin géométrique et de dessin décoratif, et des planches hors texte en couleurs.

Classe de Troisième et Brevet d'études Mathématiques. Un vol. in-16, broché, de 304 pages, avec 1185 exercices et problèmes.

Classe de Seconde classique A et B Mathématiques. Un vol. in-8, broché de 320 p., avec 714 exercices et problèmes.

Classe de Seconde classique C et Moderne Algèbre. Un vol. in-8, broché, de 256 p., avec 633 exercices et problèmes.
Géométrie. Un vol. in-8, broché, de 440 p., avec 724 exercices et problèmes.

Classe de Première classique C et Moderne Algèbre et Trigonométrie. Un vol. in-8, broché, de 288 p., avec 634 exercices et problèmes.

Géométrie. Un vol. in-8, broché, de 336 p., avec 528 exercices et problèmes.

Classe de Mathématiques

Algèbre. Un vol. in-8, broché, de 368 p., avec 890 exercices et problèmes.

*Une
nouvelle
présentation
typographique*

*Une méthode
efficace*

*Une culture
mathématique*

A PARAÎTRE :

Classe de Cinquième Mathématiques. (Juillet 1951)

Classe de Quatrième Mathématiques. (Sept. 1951)

Classe de Première classique A et B Mathématiques. (Sept. 1951)

Classe de Mathématiques Géométrie. (Juin 1951)

Livre du Maître de Sixième (Corrigés). (Avril 1951)

Livre du Maître de Troisième (Corrigés). (Juin 1951)

HACHETTE

LAROUSSE

13, rue Montparnasse — PARIS-VI^e

Nouvelle édition mise à jour

LA SCIENCE

SES PROGRES, SES APPLICATIONS

en deux volumes

format grand in-4° : 25×32 cm., 2.360 héliogravures, 12 planches hors texte, reliure artistique.

UN TABLEAU D'ENSEMBLE DE LA SCIENCE
mathématique et physico-chimique depuis ses
origines jusqu'aux découvertes et applications
les plus récentes.

RADIO-RADAR-TELEVISION

par **MARCEL BOLL**

Un fort volume de 430 pages, 240 gravures et
un index, couverture cartonnée en couleurs,
format 13,5×20 cm.

Renseignements sur demande : **CHEZ TOUS LES
LIBRAIRES**

J.-B. BAILLIÈRE ET FILS, ÉDITEURS, 19, RUE HAUTEFEUILLE, PARIS-6°

COURS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

A l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques ou physiques
et des élèves des écoles d'ingénieurs

par **Robert DELTHEIL**

Recteur honoraire de l'Académie de Toulouse
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

TOME I : Compléments d'Algèbre et de Trigonométrie. Premières notions de Géométrie analytique. Éléments de Calcul différentiel.

Un vol. in-4 couronne (23,5 x 18,5) de 383 p., avec 161 fig. **2.000 fr.**

TOME II : Éléments de calcul intégral. Applications géométriques de l'analyse.

Un vol. in-4 couronne (23,5 x 18,5) de 400 p., avec 200 fig. **2.000 fr.**

PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

A l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques ou physiques
et des élèves des écoles d'ingénieurs

par **Robert DELTHEIL**

Solutions des 567 exercices et problèmes proposés dans les tomes I et II
du **COURS DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES** du même auteur

Deux volumes in-4 couronne (18,5 x 23,5).

TOME I : Solutions des problèmes 1 à 292 **1.500 fr.**

TOME II : Solutions des problèmes 293 à 567 **1.800 fr.**

GÉOMÉTRIE

Classe de mathématiques élémentaires

GÉOMÉTRIE (Transformations coniques)

par **R. DELTHEIL** et **D. CAIRE**

4^e Edition. Un volume de 303 pages avec 252 figures .. **600 fr.**

Préparation aux grandes écoles

COMPLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE

par **Robert DELTHEIL** et **Daniel CAIRE**

Un volume 16 x 25 de 456 pages avec 180 figures **2.000 fr.**

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE et GÉOMÉTRIE COTÉE

par **R. FERREU**

Classe de mathématiques **110 fr.**

Préparation à St-Cyr et à l'Institut Agronomique **135 fr.**

Couverture page IV

EDITIONS F.L.

10, rue Saint-Séverin -- PARIS-5°

R.C. Seine : 355.332 B

S.A.R.L. au capital de 100.000 fr.

C.C.P. : 631.304 Paris

Ligne téléphonique : ODÉon 56-70

Nous avons voulu, pour la collection de livres classiques dont nous vous présentons la liste ci-dessous, procurer aux Maîtres et à leurs Elèves, sous la signature d'excellents Professeurs de Lycées, des ouvrages qui, tout en étant précis, complets, rédigés et mis à jour dans l'esprit des programmes actuels, contiennent

de NOMBREUX PROBLEMES et EXERCICES CORRIGES

MATHÉMATIQUES

COURS AVEC EXERCICES ET-PROBLEMES CORRIGES

Classe de Première (C et M).

I. — ALGÈBRE ET TRIGONOMETRIE (nouvelle édition, revue et corrigée).

P. EVRARD, Professeur agrégé des lycées de Paris.

Programme du 18 avril 1947.

224 pages, 117 figures, 250 grammes..... 260 fr.

II. — GEOMETRIE DANS L'ESPACE.

P. EVRARD.

Programme du 18 avril 1947.

160 pages, 223 figures, 150 grammes 260 fr.

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, PARIS-V^e

Collection **BRACHET-DUMARQUÉ**

avec la collaboration de **P. COUDERC** pour la Cosmographie

Vient de paraître :

ALGÈBRE, classes de 2^e et 1^{re} A et B.

COSMOGRAPHIE, Classe de Mathématiques.

COSMOGRAPHIE, classe de Sciences expérimentales.

MATHÉMATIQUES { I. *Algèbre-Trigonométrie.* { Classe de
II. *Cosmographie.* { Philo-lettres.

Éléments d'ARITH-ALGÈBRE, classes de 5^e, 4^e, 3^e. SOLUTIONS.Éléments de GÉOMÉTRIE, classes de 5^e, 4^e, 3^e. SOLUTIONS.

PETITES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort).

Modèle commode pour Cours et Examens (Bacc. B.E.P.C.). Mathématiques et Physique.

Sous presse :

AIDE-MÉMOIRE DE MATHÉMATIQUES. classes de Première.

Tout le cours condensé dans un cahier illustré de 20 pages.