

Sur une propriété de l'hyperbole et quelques conséquences

Soit une hyperbole d'asymptotes $x'ox$ et $y'oy$. Si l'on mène d'un point I de son plan, une droite variable coupant l'hyperbole en A et B et les asymptotes en C et D on a :

$$\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \mu.$$

μ étant une constante dépendant de la position de I et de l'hyperbole.

Soient α et β les projections de A sur $x'ox$ et $y'oy$, γ et δ celles de I, X_1 et Y_1 les coordonnées de I. On a : $\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} = \frac{c^2}{4}$, c étant la distance focale de l'hyperbole.

$$\text{Or : } \frac{\overline{CA}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{\alpha A}}{\overline{I\gamma}} = \frac{\overline{O\beta}}{\overline{O\delta}} \quad (1), \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\delta I}} = \frac{\overline{O\alpha}}{\overline{O\gamma}} \quad (2).$$

Par multiplication, membre à membre, de (1) et (2) nous obtenons :

$$\frac{\overline{CA} \cdot \overline{AD}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \frac{\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta}}{\overline{O\delta} \cdot \overline{O\gamma}} = \frac{-\frac{c^2}{4}}{X_1 \cdot Y_1} = \lambda \quad (\text{Constante}).$$

Si M est le milieu commun de AB et DC, $\overline{CA} \cdot \overline{AD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 = (\overline{IM}^2 - \overline{MA}^2) - (\overline{IM}^2 - \overline{IC}^2) = \overline{IA} \cdot \overline{IB} - \overline{IC} \cdot \overline{ID}$.

$$\text{Donc : } \frac{\overline{CA} \cdot \overline{AD}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB} - \overline{IC} \cdot \overline{ID}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \lambda.$$

$$\boxed{\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \lambda + 1 = \frac{X_1 Y_1 - \frac{c^2}{4}}{X_1 Y_1} = \mu}$$

Conséquence I : Polaire de I par rapport à l'hyperbole.

Soit J le conjugué de I par rapport à A et B, et K son conjugué par rapport à C et D :

$$\frac{2}{\overline{IK}} = \frac{1}{\overline{IC}} + \frac{1}{\overline{ID}} = \frac{\overline{IC} + \overline{ID}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \frac{2 \overline{IM}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} \quad (1)$$

$$\frac{2}{\overline{IJ}} = \frac{1}{\overline{IA}} + \frac{1}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IA} + \overline{IB}}{\overline{IA} \cdot \overline{IB}} = \frac{2 \overline{IM}}{\overline{IA} \cdot \overline{IB}} \quad (2)$$

En divisant (1) et (2), membre à membre, on obtient :

$$\frac{\overline{IJ}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \mu.$$

Le lieu de K est la polaire Δ de I par rapport à $x'ox$ et $y'oy$. Le lieu de J appartient donc à la droite déduite de Δ par l'homothétie (I, μ).

Conséquence II : Si une hyperbole équilatère passe par trois points A, B, C, elle passe aussi par l'orthocentre D du triangle ABC.

Soit E le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, et D son second point d'intersection avec l'hyperbole, AB coupe les asymptotes $x'ox$ et $y'oy$ en B' et A', et CE les coupe en D' et C'.

OB' et C'E sont hauteurs du triangle A'B'C', D' en est l'orthocentre.

Donc : $\overline{ED'} \cdot \overline{EC'} = -\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}$.

Mais d'après le théorème démontré au début :

$$\frac{\overline{ED} \cdot \overline{EC}}{\overline{ED'} \cdot \overline{EC'}} = \frac{\overline{EA} \cdot \overline{EB}}{\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}} = \mu.$$

Il en résulte que : $\overline{ED} \cdot \overline{EC} = -\overline{EA} \cdot \overline{EB}$, ce qui montre que D est l'orthocentre du triangle ABC.

Diverses propriétés connues pourraient être tirées de ce théorème. Par exemple : les cordes communes à une hyperbole et à un cercle sont deux à deux également inclinées sur les axes de l'hyperbole.

C. NOTARI (Tunis).