

Notes diverses

Sur les points d'inflexion

Dans la classe de Mathématiques Élémentaires, ces points intéressent les élèves par leur nouveauté et aussi parce qu'on les voit sur les courbes. C'est pourquoi, après l'étude du trinôme bicarré et du polynôme du troisième degré pour lesquels l'équation $y'' = 0$ donne ces points sans difficulté, les élèves ne manquent pas de soulever la question des points d'inflexion pour la fonction rationnelle du deuxième degré $y = \frac{u}{v}$, u et v étant deux trinômes du second degré. Les remarques suivantes peuvent alors faire l'objet d'un exercice.

On calcule aisément :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{v^2(vu' - uv')' - 2(vu' - uv')vv'}{v^4},$$

et les abscisses des points d'inflexion sont les racines du polynôme du troisième degré : (1)

$$s = v(vu'' - uv'') - 2v'(vu' - uv') = v(vu'' - uv'') - 2v'(vu' - uv').$$

Une étude rapide de sa variation permet de connaître le nombre de ses

(1) En laissant de côté les cas particuliers.

racines et leur valeur approximative. Or, si on calcule à cet effet sa dérivée z' , on trouve, en notant que u'' et v'' sont des constantes :

$$z' = v(v'u'' - u'v'') - v'(vu'' - uv'') - 2v''(vu' - uv'), \text{ ou simplement :} \\ z' = -3v''(vu' - uv').$$

En supposant que v soit un véritable trinôme du second degré, $v'' \neq 0$. Donc $y' = 0$ et $z' = 0$ ont les mêmes racines : *le maximum et le minimum des fonctions y et z existent simultanément et ont les mêmes abscisses :*

D'où les conséquences suivantes :

1° Si y' ne s'annule pas, la fonction z n'a qu'une racine : *lorsque la fonction y varie toujours dans le même sens, elle a un point d'inflexion et un seul.*

2° Si y' s'annule pour deux valeurs de x , il peut y avoir un ou trois points d'inflexion. Or, la fonction z a elle-même toujours un point d'inflexion donné par $z'' = 0$ ou $(vu' - uv')' = 0$, et dont l'abscisse est par conséquent la demi-somme des abscisses du maximum et du minimum de la fonction y . Donc : *lorsque la fonction y a un maximum et un minimum, elle a un ou trois points d'inflexion :*

Si elle en a un seul, il n'est pas situé entre le maximum et le minimum. Si elle en a trois, un seul est situé entre le maximum et le minimum.

R. ROSTOLLAND,
professeur agrégé
au Lycée de St-Germain-en-Laye.