

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.)

SOMMAIRE

PREMIÈRE PARTIE

I. Assemblée générale ordinaire de 1951	127
II. Réunion du Bureau : 6 décembre 1950	128
III. Audience de M. le Directeur général MONOD	129
IV. Préparation des questions à l'ordre du jour de l'Assemblée générale..	130
V. Document officiel : <i>Rapport sur le Concours général des Mathématiques pour la classe de Première en 1950</i> , par M. J. DESFORGE, Inspecteur général	144
VI. Activité des Régionales	154
VII. Le II ^e Congrès international des Mathématiciens : <i>Compte rendu de</i> M. A. MONJALLON	159

DEUXIÈME PARTIE

<i>Erratum</i>	162
J. ITARD : <i>Les fonctions logarithmiques et exponentielles</i>	162
R. ROSTOLLAND : <i>Sur les points d'inflexion</i>	170
R. ROSTOLLAND : <i>Fonctions et Transformations</i>	171
E. CARALP : <i>Polaire d'un point par rapport à une droite</i>	172
C. NOTARI : <i>Sur une propriété de l'hyperbole et quelques conséquences</i> ...	173
Bibliographie	174
Livres reçus	177
Informations	177

Cotisations, Abonnements, Expédition des Bulletins 7, rue Candelot, Bourg-la-Reine

Abonnement d'un an au *Bulletin*, (prix net) : France 400 fr.
 Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 80 fr.
 Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.
 Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. POCHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.).
Vice-Présidents : M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris, 9^e.
Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14^e).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelis, Neuilly (Seine).
M. EDDE, 51, rue des Rosiers, Saint-Ouen (Seine).
Secrétaires : M. BENOIST, Collège Diderot, Paris.
M. CROZES, 10, rue Buisson-Saint-Louis, Paris (10^e).
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16^e).
M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4^e).
M. RUFF, professeur au Lycée Voltaire (Paris).
Trésorier : M. MINOIS, 7, rue Colonel Candelot, Bourg-la-Reine (Seine).

Comité :

Membres élus

En 1947 : M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Louis-le-Grand*) ; M. DELTHEIL (*Faculté de Toulouse*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

En 1948 : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. EDDE (*E.N. Auteuil*) ; M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. MIRABEL (*St-Louis*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; Mlle PROTIN (*Jules-Ferry*).

En 1949 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (*E.N.P. St-Ouen*) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. LECOMTE (*St-Louis*).

En 1950 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (*J.-B. Say*) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

Membres de droit

Mlle DIONOT (*Sèvres*) ; Mme NICOURD (*Lyon, Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (*Castres*) ; M. DUVAL (*Dorian*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle MASSON ; *Enseignement moderne court :* MM. EDDE et GIRAULT ; *Enseignement technique :* M. BIGUENET ; *Ecoles Normales :* M. EDDE ; *Premier Cycle :* M. CARALP ; *Seconde et Première :* M. CROZES ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques :* M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (*S. Ex.*) ; *Mathématiques Supérieures :* M. MIRABEL ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles :* M. PÉTRUS ; *Définitions de mots et notations mathématiques :* *Axiomatique et Redécouverte :* M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours :* *Brevet et Ecoles Normales :* M. EDDE. — *Baccalauréat :* M. FAVRELLE. — *Grandes Ecoles :* M. CITAZAL. — *Concours général :* M. SINGIER ; *Histoire des Mathématiques :* M. ITARD ; *Mathématiques et Psychologie scolaire :* M. MONAVON ; *Cinéma d'Enseignement :* M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement :* MM. MONJALLON, JACQUEMART, BIGUENET ; *Enseignement de l'Astronomie :* M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon :* M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon :* M. EUVRARD (*Dijon*) ; *Lille :* M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon :* M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier :* M. JAUSSAUD (*Nîmes*) ; *Nancy :* M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes :* M. RENAUDT (*Rennes*) ; *Strasbourg :* M. EHRLHARDT (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc :* M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautey*) ; *Tunisie :* M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

N.-B. — Adresser, soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4^e, toute communication destinée à la Deuxième Partie du *Bulletin*.

EDITIONS F.L.

10, rue Saint-Séverin -- PARIS-5°

R.C. Seine : 355.332 B

S.A.R.L. au capital de 100.000 fr.

C.C.P. : 631.304 Paris

Ligne téléphonique : ODÉon 56-70

Nous avons voulu, pour la collection de livres classiques dont nous vous présentons la liste ci-dessous, procurer aux Maîtres et à leurs Elèves, sous la signature d'excellents Professeurs de Lycées, des ouvrages qui, tout en étant précis, complets, rédigés et mis à jour dans l'esprit des programmes actuels, contiennent

de NOMBREUX PROBLEMES et EXERCICES CORRIGES

MATHÉMATIQUES

COURS AVEC EXERCICES ET PROBLEMES CORRIGES

Classe de Première (C et M).

I. — ALGÈBRE ET TRIGONOMETRIE (nouvelle édition, revue et corrigée).

P. EVRARD, Professeur agrégé des lycées de Paris.

Programme du 18 avril 1947.

224 pages, 117 figures, 250 grammes..... 260 fr.

II. — GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

P. EVRARD.

Programme du 18 avril 1947.

160 pages, 223 figures, 150 grammes..... 260 fr.

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, PARIS-V°

Collection BRACHET-DUMARQUÉ

avec la collaboration de P. COUDERC pour la Cosmographie

Vient de paraître :

ALGÈBRE, classes de 2° et 1^{re} A et B.

COSMOGRAPHIE, classe de Sciences expérimentales.

MATHÉMATIQUES { I. Algèbre-Trigonométrie.
II. Cosmographie.

Classe de Philo-littres

Eléments d'ARITH-ALGÈBRE (5°, 4°, 3°). SOLUTIONS

Sous presse :

COSMOGRAPHIE, Classe de Mathématiques.

Eléments de GÉOMÉTRIE (5°, 4°, 3°). SOLUTIONS

PETITES TABLES TRIGONOMÉTRIQUES NATURELLES.

(Dépliant à trois volets, sur papier fort).

Modèle commode pour { Cours et Examens (Bacc, B.E.P.C.).
Mathématiques et Physique.

LIBRAIRIE VUIBERT, 63, Boulev. St-Germain, PARIS-5^e

Vient de paraître :

ANNALES DU BACCALAURÉAT 1950

Fascicule 1 : Mathématiques 140 fr.

Éditées sans interruption depuis 1884, nos *Annales* contiennent la totalité des questions de cours et des problèmes (avec les figures) proposés aux deux sessions de l'examen, dans tous les centres de la métropole, de l'Union française et de l'Étranger.

ANNALES DU B.E.P.C. 1950

Fascicule 7 : Mathématiques 100 fr.

Comme leurs aînées, les *Annales du Baccalauréat*, ces *Annales* sont appelées à rendre les plus importants services à MM. les Professeurs et à leurs élèves.

ANNALES CORRIGÉES DU B.E.P.C.

Fascicule 7 : Corrigé de Mathématiques 100 fr.

Contient le développement d'une partie des sujets proposés aux plus récentes sessions de l'examen.

Sous presse :

L'ACCÈS AUX PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

Introduction à l'Axiomatique du Plan

Par G. BOULIGAND, professeur à la Sorbonne, correspondant de l'Institut. — Vol. 22/14 cm., de 100 pages . . . Mars 1951

Rappel :

L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES AU BACCALAURÉAT

Comment la préparer. Comment la réussir

Par A. MONJALLON, professeur au Lycée St-Louis. — 2 vol.
22/14 cm. : I. 1^{re} Partie du Baccalauréat (200 pages), 2^e éd. 200 fr.
II. 2^e Partie du Baccalauréat (232 pages), 2^e éd. 250 fr.

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Assemblée générale ordinaire de 1951

L'Assemblée générale aura lieu :

**le dimanche 18 mars 1951, à huit heures et demie
au Musée Pédagogique, 29, rue d'Ulm**

Le présent avis tient lieu de convocation. Les membres de l'Association sont priés d'apporter le présent *Bulletin*. Ils voudront bien aussi remettre en séance, ou faire parvenir pour le 1^{er} avril 1951, un résumé de leurs interventions, s'ils veulent être sûrs qu'il en soit fait état.

Ordre du jour

- 1° Compte rendu financier de l'exercice 1949-1950.
- 2° Rapport du Président.
- 3° Les épreuves de mathématiques aux examens et concours (B.E.P.C., B.E., E.N., Baccalauréats, Grandes Ecoles).
- 4° Rapport des correspondants régionaux sur la méthode suivie pour choisir les textes d'examens dans leurs Académies.
- 5° Réforme de l'Enseignement.
- 6° Horaires et programmes.
- 7° Unification des définitions de mots et notations mathématiques.
- 8° Matériel d'enseignement.
- 9° Modification des statuts.
- 10° Elections au Comité ; dépouillement du scrutin.

Préparation à l'Assemblée générale

Les membres de l'Association qui désirent envoyer leur contribution à l'étude des questions inscrites ou non à l'ordre du jour ci-dessus sont priés de bien vouloir les faire parvenir, soit au Président : M. POCHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.), soit aux Rapporteurs.

Ils trouveront, encartées au milieu de ce *Bulletin*, les instructions et feuilles de vote nécessaires.

Simplifiez la tâche du Bureau en envoyant tous les bulletins de vote à l'adresse personnelle du président et non au Musée pédagogique.

II. Réunion du Bureau

6 Décembre 1950

Tous les membres du Bureau étaient présents.

M. POCHARD annonce que M. MIRABEL n'adhère plus à l'A.P.M. à dater du 1^{er} octobre 1951, et fait remarquer que notre collègue ne donne pas sa démission du Comité, car, a-t-il précisé, « démission » implique « conflit », mais cesse, *ipso facto*, d'en faire partie. Notre subtil collègue a voulu marquer par cette nuance qu'étant las d'être toujours sur la brèche il entendait se retirer sous sa tente sans pour cela désavouer l'action de l'Association dont il a été pendant de nombreuses années un des animateurs.

Le Bureau, unanime, regrettant la retraite de M. MIRABEL, décide de lui continuer le service du *Bulletin*. (Nous devons ajouter que notre collègue a accepté cette marque normale de courtoisie).

Les membres du Bureau précisent ensuite la répartition des tâches matérielles nécessaires à la bonne marche de l'Association.

M. BIGUENET demande que lui soient donnés les noms des membres de l'Association qui la représenteront dans les commissions créées au Secrétariat d'Etat à l'Enseignement Technique pour étude de la réforme des professorats techniques. Le Bureau désigne Mme DOMANGE, professeur au Lycée Fénelon et membre du Jury du professorat technique, M. JACQUEMART, puis MM. ELUECQUE et SINGIER, professeurs au Lycée Saint-Louis et à l'E.N.S. Technique.

Le Président dit enfin au Bureau sa satisfaction d'avoir reçu près de cinquante lettres venues de toute la France, protester contre le retard apporté à la publication du *Bulletin* de rentrée de l'A.P.M., ce qui prouve l'intérêt que beaucoup prennent à la bonne marche de notre Association.

NOTA. — Les épreuves corrigées du bulletin « Textes de Baccalauréat, juillet » ont été renvoyées à l'imprimeur le 7 octobre.

H. POCHARD.

III. Audience de Monsieur le Directeur général Monod

Mlle COURTIN, Présidente de l'Union des Physiciens, et moi, avons été reçus par M. MONOD, le 29 janvier.

M. le Directeur nous a indiqué que les journées d'étude de Physique et de Mathématiques, prévues à Nancy pour le début des vacances de Pâques, seraient ouvertes aux professeurs des Académies de Besançon, Lille, Nancy, Strasbourg.

Mlle COURTIN a alors remercié M. le Directeur de l'intérêt toujours renouvelé avec lequel il organise ces journées d'étude si fécondes et si appréciées.

J'ai ensuite soumis quatre vœux à M. MONOD :

1° L'Union des Physiciens a demandé l'an dernier (sur la proposition de M. DANJON) que six conférences d'une heure et demie soient faites par le professeur de physique aux élèves de Mathématiques Élémentaires pour leur permettre de comprendre la fin du programme de Cosmographie.

L'A.P.M. demande que, si ces conférences sont instituées, les sujets qu'elles exposent ne soient pas mis au programme du Baccalauréat.

M. MONOD a semblé frappé par l'anomalie qui consiste à laisser au programme du Baccalauréat des questions qui ne peuvent être convenablement traitées. J'ai suggéré que l'on pourrait réserver ces questions pour l'oral de l'examen. M. le Directeur n'a pas refusé *a priori* et a demandé un rapport qui sera soumis à l'Inspection générale.

2° Une circulaire du 22 août 1891 sur le choix des livres scolaires ressuscitée au B.O. N° 38, page 3003 prévoit entre autres choses que le changement de livres classiques dans un établissement ne peut être fait qu'après autorisation spéciale du Recteur.

M. le Directeur a calmé les inquiétudes de l'A.P.M. en précisant que ce n'était pas du tout pour rétablir cette disposition tombée en désuétude que la circulaire en question avait été rappelée. Il a reconnu que s'il y avait un jour désaccord sur un tel sujet entre les professeurs et le chef d'établissement, l'Inspection générale serait toute indiquée pour trancher.

3° J'ai demandé une heure de travail dirigé dans les classes de Mathématiques Élémentaires. M. le Directeur a refusé, faute de crédit, mais a déclaré qu'il accepterait pour des classes exceptionnellement nombreuses. (Ce terme semble pouvoir s'appliquer à des classes de plus de quarante élèves).

4° M. le Directeur a rejeté sans hésitation le vœu de notre Association demandant que soit créée à l'écrit du Baccalauréat de sciences expérimentales une épreuve de Mathématiques. La raison donnée par lui est que les élèves de cette classe ont déjà trop de travail. Il m'a toutefois semblé, d'après les paroles de M. MONOD, que la chose serait peut-être possible dans quelques années, lorsque l'actuel programme de sciences naturelles de la classe de sciences expérimentales serait réparti entre cette section et celles de 1^{re} et de 2^e C'.

Le Président.

IV. Préparation des questions à l'ordre du jour de l'Assemblée générale

PREMIERE QUESTION

Compte rendu financier de l'exercice 49-50

RECETTES

Cotisations et abonnements	600.400 fr.
Versements complémentaires (1)	800 »
Expéditions isolées	5.135 »
Remboursement de frais d'expédition	345 »
TOTAL DES RECETTES	606.680 fr.

DÉPENSES

<i>Bulletins et Fascicules d'énoncés : N^{os} 131, 132, 133, 134,</i>	
135, E30 (frais d'impression et d'expédition)	288.425 fr.
<i>Annales du Buccalauréat</i>	108.480 »
Abonnement <i>Education nationale</i>	900 »
Frais de M. JACQUEMART, du 9-1-1949 au 5-10.....	515 »
Frais d'encaissement de chèque	15 »
Banquet du 22-5-1950 à Sèvres	10.400 »
Frais de M. HUISMAN	500 »
Frais de M. MONJALLON, du 1-10-1949 au 22-4-1950.....	8.600 »
Frais de Mlle AFFRE, du 1-1-1949 au 30-9-1950	1.500 »
TOTAL DES DÉPENSES	419.335 fr.

Actif au 30 septembre 1950

Réservé 33 rachats de cotisation	5.930 fr.
Disponible (solde créditeur 1949-50)	98.555 »
Excédent (exercice 1949-50)	187.345 »
TOTAL	291.830 fr.

Répartition de l'actif

Un fichier (achat 1936)	622 fr.
En caisse	291.208 »
TOTAL	291.830 fr.

(1) Versements complémentaires bénévolement faits par : MM. BOUTIN, BRACHET, Mlle CHAUMONT, Mme FLAMANT.

TROISIEME QUESTION

Les épreuves de Mathématiques aux examens et concours

B.E.P.C., B.E., Concours d'E.N. — Les textes des épreuves proposées à ces examens et concours en 1950 témoignent d'un souci certain de gradation des questions, en particulier en géométrie où les candidats sont souvent bien guidés dans la recherche des propriétés qu'on veut leur faire découvrir. Quelques-uns, parmi eux, ne manquent ni d'intérêt, ni d'originalité. Malheureusement, la plupart des autres appellent encore un trop grand nombre de critiques, tantôt plus légères parce que de détail, mais non sans importance cependant, tantôt beaucoup plus graves parce qu'elles risquent de fausser l'examen et de léser les candidats. Aussi les membres de l'Association doivent-ils redoubler de vigilance et continuer, dans leurs Académies respectives, à mener une action énergique pour améliorer le choix et la rédaction des sujets futurs et — dans l'immédiat — de ceux de 1951.

La première qualité d'une épreuve est d'être conforme au programme de l'examen. Or, qu'il s'agisse du B.E.P.C. (enseignement long), ou du B.E. (enseignement court), ou du concours d'entrée dans les E.N. qui porte sur la partie commune à ces deux enseignements, le programme est — sur certains points particuliers — tout à fait net. Il porte, par exemple, en algèbre : « Equations et inéquations *numériques* du premier degré à une inconnue. Interprétation graphique. Problèmes conduisant à une équation *numérique* du premier degré, ou à un système de deux équations *numériques* du premier degré, etc... » Pourquoi, dans ces conditions, *une vingtaine* de textes contiennent-ils des équations avec paramètres, des systèmes paramétriques, des fonctions linéaires paramétriques, des études d'intersection d'une droite fixe avec une famille de droites dépendant d'un paramètre ? Certaines Académies ont d'ailleurs récidivé une, et même deux fois, dans ce domaine (Dijon, Montpellier, Besançon, Rennes, Lyon). Pourquoi aussi Paris (B.E. P.C., juillet) propose-t-il un système, numérique il est vrai, mais de *trois* équations à *trois* inconnues ? Nombre de bons élèves de Troisième ont pu être désorientés en présence de ce sujet. Peut-on, d'autre part, *exiger* des élèves de Troisième qu'ils connaissent la condition d'orthogonalité de deux droites représentant des fonctions linéaires ? Qu'ils sachent la condition de parallélisme est à peu près indispensable, mais celle d'orthogonalité ? Quelques rares Académies fournissent très judicieusement la condition aux candidats, évitant ainsi à ceux qui n'ont pas vu traiter la question de se trouver handicapés ; mais, en revanche, huit textes au moins la leur laissent deviner : c'est abusif. Il est impossible enfin de ne pas signaler le sujet de Rennes (E.N., octobre) ; il propose un problème d'*arithmétique* dont la solution correcte fait appel, pour quatre résultats sur six, aux propriétés des fractions irréductibles. Ailleurs encore, quelques résolutions en nombres entiers exigeraient l'emploi de théorèmes sur les nombres premiers entre eux. Toutes ces questions sont nettement étrangères au programme, dans sa

lettre comme dans son esprit, et il est inadmissible qu'elles aient pu être proposées.

Une autre façon de contourner l'esprit des programmes consiste à donner des problèmes trop longs ou trop difficiles. Certaines Académies ont excellé dans ce domaine, même pour le seul B.E.P.C. (Montpellier, Lyon, etc.). Mais ce sont surtout les textes de concours d'E.N. qui dépassent les limites, et si Bordeaux, Caen, Paris-Seine, en première session, et Aix-Marseille, Besançon, Lyon, Nancy, Rennes, Caen, en deuxième session, prennent à cet égard des places de choix, c'est manifestement le sujet de Rennes première session, qui bat tous les records. On semble vraiment trop oublier que l'épreuve s'adresse à des élèves de Troisième et que les candidats disposent au total de deux heures pour lire et comprendre les énoncés, effectuer la recherche et rédiger les solutions des deux problèmes. On objectera peut-être — au moins pour l'admission dans les E.N. — qu'il s'agit d'un concours. Mais n'est-ce pas précisément fausser le concours que d'en élever le niveau à celui de la classe supérieure ? Le résultat est très simple : d'excellents élèves de Troisième, jeunes et intelligents, ne peuvent traiter correctement que l'une des questions — ou les deux très imparfaitement — et obtiennent une note tout juste moyenne, alors que les candidats de qualité médiocre, qui ont déjà fait une Seconde parviennent à faire aussi bien ou même un peu mieux. Est-ce bien là l'objectif poursuivi ?

En liaison avec ce qui précède, une autre question mérite de retenir l'attention : l'abus des *lieux géométriques*, présentés comme tels. Si l'on désire que les candidats donnent une solution rigoureuse, avec directe, limites et éventuellement réciproque, c'est en général assez long, parfois même délicat, sinon impossible au niveau de la classe (Ex. : Grenoble, E.N., 1^{re} session), et il faut être très prudent. Or, 25 % des textes proposent, un, deux et même trois lieux : c'est vraiment excessif. L'Académie de Lyon prend nettement la tête sur ce plan, suivie, à un degré moindre, par une dizaine d'autres, dont encore Montpellier. Il semble que la sagesse soit dans le camp des auteurs mieux avisés qui demandent seulement de démontrer qu'un point variable décrit une ligne fixe et au besoin de la limiter. Ainsi la question de la réciproque ne se pose pas, la solution en est raccourcie d'autant, et le candidat peut faire un raisonnement rigoureux au lieu de produire une affirmation plus ou moins gratuite. Il conviendrait donc de n'employer l'expression « *lieu géométrique* » que lorsqu'on exige du candidat une solution possible et complète.

Il faudrait, pour que ce rapport fût complet, ajouter à ces remarques fondamentales une multitude d'autres critiques. Leur énumération serait beaucoup trop longue et deviendrait fastidieuse, tellement on les a répétées. Quelques-unes cependant ne sauraient être passées sous silence. Comment un choix sérieux des épreuves permettrait-il de trouver :

— des textes mal choisis, ou mal rédigés, ou trop classiques — si classiques même qu'on les rencontre dans la plupart des manuels, dans les mêmes termes et avec les mêmes nombres ou les mêmes lettres, au point que deux

textes d'algèbre d'Académies différentes (Besançon, B.E.P.C. et Grenoble, B.E.) puissent présenter, *mot à mot*, une identité totale !

-- des énoncés incomplets, des fautes de lettres, des fautes d'impression comme « *sera contre* » pour « *rencontre* », des expressions algébriques si mal écrites (Strasbourg, E.N. juillet) qu'elles prêtent à équivoque ;

— des imprécisions regrettables, atteignant parfois la proportion d'une par question (Ex. : Poitiers, B.E.P.C., 2^e session) ;

— des expressions dépourvues de sens (telles : « *en avant d'une ville* ») ou équivoques (« *ensemble* » pour « *simultanément* ») ;

— des questions conduisant à des calculs impossibles (Nancy, B.E.P.C., 1^{re} session) ou à des réponses multiples, en fonction de variables non indépendantes (Lille, E.N., 2^e session) ;

— des notations et abréviations incorrectes (frs., $\overline{OM}$ pour $\overrightarrow{OM}$, etc...) ;

-- enfin tant d'expressions impropres ou manquant de rigueur, telles que : l'extrémité d'un diamètre (comme s'il n'y en avait qu'une), le rayon porté par un diamètre (comme s'il était unique) ; inversement — et sans doute par compensation — une parallèle ou une perpendiculaire à une droite par un point, une circonférence passant par trois points, etc... (comme s'il y en avait plusieurs) ; segment pour vecteur, milieu d'une droite, aires de même valeur pour aires égales, sans compter les innombrables emplois de *surface* pour *aire* (les deux mots étant parfois incorporés dans un même texte), et de *limiter le lieu* après l'avoir trouvé ; grandeurs pour nombres, valeur pour mesure algébrique, deux équations pour système, ensemble de deux nombres appelé les solutions d'un système de deux équations, etc., etc...

Tout cela montre combien l'élaboration des sujets d'examens doit être faite avec minutie et sévèrement contrôlée, avant et après impression. Il est inadmissible que les textes proposés aux candidats ne soient pas impeccables à tous égards, et que les bons élèves — il n'en manque pas, heureusement — puissent y découvrir des fautes contre lesquelles nous luttons dans nos classes d'un bout à l'autre de l'année scolaire.

Je ne saurais terminer ce rapport sans remercier chaleureusement les quelques collègues qui ont bien voulu m'adresser des textes, ainsi que leurs remarques sur les sujets proposés. Leur très petit nombre accroit d'autant la valeur de leur geste. Qu'ils veuillent bien trouver ici l'expression de ma gratitude.

R. EDDE.

Baccalauréat. — On est surpris et peiné de retrouver chaque année parmi les sujets proposés quelques questions, toujours les mêmes, étrangères aux programmes. Le signe du trinôme ne doit être traité en Première AB que sur des exemples numériques, mais Grenoble, Toulouse et La Guyane demandent la discussion du signe d'un trinôme à coefficients littéraux.

Calculer deux nombres connaissant leur somme et leur produit est une question de Première CM que Strasbourg a posée en AB.

La dérivée en Première n'est connue que pour une valeur donnée de la

variable. Aix CMT réclame pourtant la vitesse dans le mouvement rectiligne d'équation $x = 3t^2 - 2t$ et Clermont l'imite dans son problème. Le problème d'Alger CMT demande la dérivée d'une fonction du second degré et celui d'Aix la dérivée d'une fonction homographique avec, dans les deux cas la recherche des points de la courbe où la tangente a une pente donnée.

Besançon AB demande la projection de l'angle droit. Comme en juin 1949 deux de ses questions sur trois sont étrangères au programme.

Le problème de Clermont AB fait intervenir l'aire d'une zone.

Enfin, Montréal (2^e partie M) propose en question de cours l'étude de la fonction $y = \frac{\sin x}{2 \sin x + 1}$. Cette fonction n'est pas de celles que le programme indique. Et Montréal AB invite le candidat à traiter comme question de cours : Lieu des points équidistants de deux plans sécants donnés.

Ailleurs, les questions sont bien choisies dans les programmes, mais le choix de la méthode n'est pas laissé au candidat. On réclame, à Aix, la définition des asymptotes de l'hyperbole, lorsque cette courbe est définie par ses sommets et ses foyers. Paris pose une question de cours d'arithmétique qui n'est pas nécessairement traitée dans nos classes avec la même généralité et conseille pour la traiter une méthode intéressante et pour beaucoup nouvelle ; le candidat s'est en réalité trouvé devant un problème.

Nous exigeons de nos élèves une parfaite correction de langage. Evitons d'exposer dans les textes d'examens les négligences que nous avons l'habitude de leur reprocher. Un correspondant me signale des expressions telles que : la courbe $y = x^2 + x$, le point $x = 2$; je relève aussi les tangentes horizontales de Grenoble (2^e partie M), la courbe de variation de Toulouse et surtout le vecteur M_1M_2 positif de La Guyane. Les mots perpendiculaire et orthogonal n'ont pas encore pour tous la même signification.

L'ampleur du travail qui leur était demandé a pu en gêner d'autres, par exemple ceux qui ont eu à traiter l'une des questions suivantes :

Besançon AB : Angles dièdres. Plans perpendiculaires.

Rennes AB : Tangentes et plan tangent à la sphère. Définition d'un cône et d'un cylindre circonscrits à la sphère.

Strasbourg AB : Sections planes de la sphère. Plans tangents.

Montpellier M : Sections planes du cône de révolution.

Parmi les problèmes, ceux proposés à la deuxième partie à Bordeaux en septembre et aux Antilles en juin, ont des énoncés presque aussi imposants que les sujets de concours général. Ceux donnés en juin à Besançon et à Bordeaux sont à peine plus courts.

Des correspondants ont signalé la difficulté des problèmes donnés en Mathématiques à la première session par Aix et Dijon. Ce sont des problèmes intéressants sur les transformations ponctuelles qui conviennent parfaitement aux très bons élèves, mais qui ont dû arrêter trop vite le candidat moyen.

Caen, par contre, à la série CM, propose sur le tétraèdre qui a un trièdre trirectangle, un problème plus que classique qu'il avait proposé l'année précédente à la série AB en grande partie.

Les erreurs matérielles ont été, semble-t-il, moins nombreuses cette année ; elles ont été rectifiées dès le début des séances sans provoquer d'incidents. A Poitiers, pourtant, le problème d'arithmétique, qui avait été composé pour les candidats de la série Mathématiques, a été par erreur proposé aussi à ceux de la série Mathématiques et Technique. La question était en dehors de leur programme et il fallut leur faire subir une autre épreuve.

Ce rapport, pour être utile, devait insister sur les imperfections des sujets. Pour être juste, il doit aussi reconnaître que la plupart des problèmes de 1950 sont bien adaptés aux programmes et aux possibilités des candidats et qu'ils ont mieux que les années précédentes évité la répétition textuelle de sujets anciens. Les questions de cours ont été puisées dans toutes les parties du programme et se sont en outre diversifiées par les applications qu'elles ont exigées.

Les critiques les plus importantes sont relatives au respect des programmes. Souhaitons l'organisation d'un contrôle plus efficace sur ce point.

R. FAVRELLE.

Le rapporteur remercie les collègues qui lui ont fait parvenir textes et critiques, et particulièrement ceux à qui il n'a pas répondu personnellement.

CINQUIEME QUESTION

Réforme de l'Enseignement

Latin et Mathématiques

La grammaire latine est un ensemble arbitraire de règles fixes, ou tout au moins peut être considérée comme telle. On peut imaginer qu'on la modifie, on n'en aurait pas moins une grammaire latine qui permettrait tout aussi bien d'exercer la perspicacité de l'élève ainsi que sa mémoire (les textes étant bien entendu modifiés parallèlement).

La grammaire mathématique présente tout de même, avec la grammaire latine, une différence essentielle, car, une fois posés les postulats indispensables, on ne peut changer arbitrairement les règles, c'est-à-dire les théorèmes.

Une partie essentielle de la culture mathématique sera donc, dans les humanités classiques et modernes, l'élaboration par le maître et les élèves de la grammaire. C'est là un exercice intellectuel fécond et le latin n'offre rien de comparable.

Une fois la grammaire mathématique établie, mais à ce moment-là seulement, on peut poursuivre un parallèle intéressant entre l'étude d'un problème de mathématiques et celle d'une version latine. Il semble toutefois que la nécessité de feuilleter un énorme dictionnaire introduise vraiment trop de travail manuel dans la version latine.

Il importe de noter que le mathématicien ayant « in fine » un travail

comparable à celui du professeur de latin, il doit lui être accordé, dans toutes les classes, *un temps très supérieur* à celui dont dispose le latiniste, car il lui faut d'abord établir sa grammaire.

Les mathématiques ainsi enseignées en établissant toute la grammaire, puis en faisant de nombreuses « versions » constituent peut-être les « mathématiques culturelles (idéales) » pour les esprits pouvant les digérer et elles constituent, semble-t-il, un enseignement très supérieur à celui du latin.

En général, à l'Etranger, on admet beaucoup plus largement la grammaire mathématique qu'en France.

Dans ces conditions, l'enseignement des mathématiques est amputé partiellement ou totalement de la partie culturelle par laquelle il est plus complet que le latin. Il n'en reste pas moins alors, dans l'application de la grammaire mathématique, un champ de culture de même étendue que celui que peut procurer le latin.

Dans ces conditions, on peut, semble-t-il, envisager, suivant la puissance de travail et les goûts des élèves, deux sortes de culture mathématique : l'une, réservée à l'élite (mathématiques culturelles idéales), et l'autre destinée à un plus grand nombre (mathématiques culturelles simples), et trouvant naturellement sa place dans la section des Sciences pures et à un degré encore important, mais plus divers et dont, à vrai dire, je n'apprécie pas pleinement l'étendue dans les « Sciences Techniques » (Cf. Projet de Réforme de l'Enseignement, titre V, article 20).

Les préliminaires précédents étant adoptés, on peut se demander avec une légitime curiosité s'il n'existe pas des langues vivantes offrant les mêmes ressources que le latin.

H. POCHARD,

Professeur au Lycée Condorcet.

Dans quelle mesure l'allemand pourrait-il remplacer le latin comme discipline de base ?

A. LES AVANTAGES DU LATIN.

C'est :

1) *La langue-mère* du français, permettant de comprendre les origines du français, tant pour le vocabulaire que pour la syntaxe.

2) *Une langue synthétique*, dont la grammaire force l'élève à une excellente gymnastique d'assouplissement.

3) *Une langue de culture*, canal de la civilisation antique et tradition dont s'est nourrie notre littérature.

4) *La langue universelle* du Moyen Age et de l'élite européenne moderne, présidant actuellement encore à l'élaboration de la terminologie scientifique internationale.

B. LES DÉSAVANTAGES DU LATIN.

1) Au stade très élémentaire où les élèves restent dans la moyenne des

cas, la pratique constante de la version (trop souvent mot à mot), la dérivation des règles de grammaire française à partir du latin, aboutit fréquemment à une *dislocation du français*, qui se transforme en jargon, et s'ajoute à l'ignorance de la grammaire française proprement dite.

On pourrait d'ailleurs penser que l'afflux des élèves vers le latin, en une période de démocratisation du recrutement, correspond plus souvent à un snobisme qu'à une aptitude à utiliser cette discipline. L'étude du latin dans des couches de population qui manient souvent le français avec peu d'aisance, ne fait que précipiter la décadence du français lui-même.

2) La gymnastique intellectuelle qui accompagne l'étude de la grammaire et de la syntaxe latines n'est pas comparable à l'assouplissement et à l'enrichissement qui permet l'étude du grec. Le latin est une langue essentiellement pratique, plus *traditionaliste* que logique. C'est une langue de juristes, de soldats et de maçons, non pas d'artistes ni de philosophes. L'« usage » l'emporte sur la rigueur de la pensée, et nos élèves, ne pouvant « vivre » cet usage, sont forcés de l'apprendre.

3) La *civilisation* antique, vue à travers le prisme du latin, apparaît *bien défigurée*. Les Latins sont des imitateurs et non des créateurs. La grandeur antique apparaît mieux à travers la forme d'un vase grec ou d'une traduction de Sophocle qu'à travers les joutes oratoires de Cicéron ou les *Annales guerrières* de César et de Salluste, dont la jeunesse actuelle ne peut guère tirer profit.

4) L'*universalisme du latin* semble définitivement révolu. La technique même emprunte aussi bien sa terminologie au grec et à d'autres langues modernes. Si le grec a gardé son actualité spirituelle, le latin n'est plus qu'un puissant *phénomène historique*, intéressant à titre rétrospectif, non plus présent.

C. QUELLE DISCIPLINE POURRAIT ÊTRE SUBSTITUÉE AU LATIN ?

Ne pourrait-on chercher, en cette époque d'évolution précipitée et d'incohérence, ce qui permettrait à la jeunesse de mieux connaître l'échiquier où, bon gré, mal gré, elle se trouve placée ; de saisir, tout en consolidant sa charpente intellectuelle, un *aspect simultané, synthétique du monde*, et des forces qui jouent dans l'Europe actuelle un rôle souvent déterminant ?

Si l'on admet l'importance des *langues modernes*, laquelle réunirait le maximum d'avantages pédagogiques pour être choisie comme discipline de base dans nos programmes ?

Il semble, du point de vue *grammatical*, que l'anglais, aussi bien que les langues romanes, présentent, après une apparente facilité, des subtilités trop complexes pour être comprises au niveau relativement simple du baccalauréat. L'élève croit apprendre facilement. Il ne rencontre pas dès le début certains obstacles qui le forcent à réfléchir et à gagner en vigueur par l'exercice de raisonnement grammatical.

L'*allemand*, sous cet angle, semble seul :

1) Permettre une *gymnastique* comparable à celle du latin. Et ses effets

peuvent être beaucoup *moins artificiels*, car il ne s'agit plus d'une langue morte, mais d'une langue vivante. Les exercices portent autant sur le thème et la narration — pratiquement abandonnés en latin — que sur la version, et, par la conversation, les applications doivent prendre un caractère de rapidité et de variété qui donnent à quatre ou cinq heures de langue vivante par semaine une *efficacité* rarement obtenue pendant un horaire équivalent en latin.

2) Sous l'angle de la *civilisation*, l'allemand ne peut évidemment prétendre à l'universalité — morte aujourd'hui — du latin, mais il supporte la comparaison avec l'anglais. L'Europe Centrale, de Vienne à Berlin, et de Hambourg à Zurich, représente un faisceau de races et de traditions très diverses. Tandis que la Grande-Bretagne s'est souvent complue dans sa position insulaire, les pays germaniques sont restés des *carrefours*, brassant l'Orient et l'Occident, et ils ont formé, surtout depuis le XVIII^e siècle, un *creuset* où se sont élaborées des œuvres qui ont puissamment marqué la pensée européenne : la philosophie de *Kant* ou de *Schopenhauer*, de *Hegel* ou de *Nietzsche*, — le « Faust » et les ballades de *Goethe*, — le mouvement romantique allemand, le lyrisme d'un *Hölderlin* ou d'un *Rilke*, ont exercé une influence souterraine considérable, qui devrait être plus connue de la jeunesse française.

3) Et ce serait une erreur de discréditer cette production en la qualifiant de nébuleuse ou de baroque. La médiocrité existe en Allemagne comme ailleurs, mais les grands auteurs allemands atteignent une *vigueur* et une *pureté de forme* indiscutable. Pour ne pas parler de l'œuvre de *Goethe* et de celle de *Schiller* — souvent mal comprises, parce que trop célèbres — on peut citer : les drames de *Kleist*, les contes de *Grimm*, les nouvelles romantiques de *Fouqué* et d'*Eichendorff*, les poésies de *Heine*, dont la forme est très accessible aux élèves et leur apporte à la fois l'évasion imaginative et la précision rigoureuse.

Sur un plan plus moderne, les romanciers de la seconde partie du XIX^e siècle — le Suisse *Gottfried Keller* et l'Allemand du Nord *Storm* — présentent des œuvres pleines d'humour ou de drame, rédigées dans une prose solide et pure. Enfin, peu d'auteurs européens ont atteint dans le lyrisme la perfection sévère d'un *Rilke* ou d'un *George*. Les romanciers modernes, tels *Wiechert* ou *Carossa*, l'un Prussien oriental, l'autre Bavarois, tel le prix Nobel : *Hermann Hesse*, sont d'une lecture fort belle, riche en observations pittoresques ou profondes, qui apprennent beaucoup aux élèves sur la réalité du pays voisin.

CONCLUSION.

Si le sujet pouvait avoir un défaut, ce serait d'être trop *vaste*, trop divers. L'allemand, pris comme discipline de base, embrasse à la fois la littérature et la géographie, la grammaire et la technique, la philosophie, l'histoire et la musique. C'est au professeur de choisir, de construire, mais il peut plonger l'enfant dans un milieu toujours vivant qui stimule son effort, et lui

ouvrir la perspective de *voyages* qui élargiront ses vues et l'avertiront d'une réalité trop souvent ignorée, dont l'étude permet de discerner et d'apprécier plus justement encore les qualités spécifiquement françaises, parfois très menacées.

(X..., *Agrégée d'allemand*).

Au sujet d'une réforme de l'Enseignement des Mathématiques

La Commission de l'A.P.M. déclare que les Mathématiques figurent parmi les disciplines fondamentales du cycle d'orientation de 11 à 13 ans. C'est admettre qu'il est possible de déceler les aptitudes aux mathématiques d'enfants de Sixième et Cinquième, alors qu'il est avéré que, pour la grande majorité des enfants, un tel jugement ne peut sérieusement être formulé qu'au niveau de la Troisième ; certains, même, plus tard brillants, ne se révèlent qu'en Seconde ou Première.

La querelle du latin est passionnante. Mais l'A.P.M. resterait dans son rôle en étudiant aussi les problèmes posés par l'enseignement des Mathématiques et notamment les programmes pour débutants.

Les Mathématiques ont une valeur formatrice. De plus, elles sont nécessaires pour l'acquisition de toute culture scientifique. Enfin, elles sont un moyen d'expression qui devient pour les relations humaines (notamment sur le plan technique et social), aussi important que le langage courant.

Le problème de la réforme se pose donc pour l'A.P.M. dans les termes suivants : assurer à tous les enfants une formation mathématique d'un niveau voisin de celui de Première C ou M actuel.

Après l'acquisition en Sixième et Cinquième des techniques et notions de base, cette formation doit s'effectuer à un rythme variable suivant le caractère littéraire ou scientifique de la section.

Au niveau de la Quatrième et de la Troisième nous avons dans une même classe des élèves déjà ouverts au raisonnement et d'autres qui restent des enfants. Ces derniers voient leur valeur sanctionnée par des notes très faibles ; rebutés par ce premier contact, ils seront définitivement perdus, surtout s'ils se trouvent dans ces classes où l'hostilité aux Mathématiques est une règle de conduite.

Pour éviter ce grave écueil, je propose que l'initiation n'ait pas pour objectif immédiat le raisonnement, mais qu'une place importante soit faite aux applications numériques et graphiques, même si les propositions utilisées ne sont pas démontrées au préalable. Ainsi, un élève retardé pourrait obtenir des notes moyennes qui sanctionneraient son aptitude à saisir, non le raisonnement, mais les techniques et le langage mathématique.

Je verrais volontiers figurer, dans les horaires et programmes, le titre : *Mathématiques pures et appliquées*. Elles seraient plus « pures » dans les sections d'élèves avancés ; elles comporteraient plus d'applications dans les sections de « retardés ».

En somme, je propose d'étendre aux autres branches, mais par une disso-

ciation moins brutale, ce qui se pratique actuellement pour une partie de l'arithmétique où la justification des règles opératoires vient après une longue pratique des opérations. Cette conception nous permettrait de substituer à l'ordre logique, l'ordre « pédagogique ». Elle ne serait pas absolument nouvelle dans l'Enseignement.

Elle présente enfin des avantages pédagogiques certains : un théorème dont les termes auront été l'objet de nombreux exercices, sera mieux conçu quand viendra l'heure de la démonstration. Et, à tout prendre, le processus historique d'élaboration des propositions mathématiques est-il si éloigné de celui-là ?

M. REPELLIN (*Besançon*).

SIXIEME QUESTION

Horaires et Programmes

Programmes de la classe de Première (M. CROZES). — Nous avons fait au Comité et en Commission l'étude qui nous avait été demandée, lors de la dernière Assemblée générale. De nombreuses propositions ont été faites. Toutefois, compte tenu de notre double souci de ne pas surcharger le programme d'une part, de ne pas en abaisser le niveau d'autre part, nous avons décidé de n'agir qu'avec prudence et de ne prendre aucune décision avant d'avoir recueilli l'opinion de nos collègues sur les diverses modifications envisagées. Nous leur soumettons donc un questionnaire pour referendum.

Questionnaire relatif aux classes de Première CM

1. ALGÈBRE. — L'étude des mouvements doit-elle être abandonnée ?
2. TRIGONOMETRIE. — L'étude des formules de transformations doit-elle être entreprise ?
3. DESCRIPTIVE. — Doit-on remplacer le paragraphe terminal du programme actuel par l'indication suivante à porter au paragraphe II après « projection d'un point, d'une droite, d'un segment » :
« Représentation et détermination d'une figure par la méthode des projections orthogonales, principes de la géométrie descriptive et de la géométrie cotée ».
4. ÉPURES DANS LE PROGRAMME. — Au cas où la modification précédente serait admise, conviendrait-il d'indiquer au programme certaines épures particulières ? Signaler les plus intéressantes.
5. PERSPECTIVE. — Devra-t-on mentionner, à l'alinéa I, après parallélisme des droites et des plans : « Principe de la représentation des figures de l'espace à l'aide d'une perspective ou d'une perspective cavalière » ?
6. TRIÈDRES. — Leur étude doit-elle être reprise en Première ?

7. TRIANGLES SPHÉRIQUES. — L'étude des trièdres pourrait-elle être rajeunie par l'étude simultanée des triangles sphériques ? L'ordre triangle-trièdre ou trièdre-triangle étant laissé au choix du professeur.

8. AIRES ET VOLUMES. — Le programme actuel doit-il être :

- a) Maintenu sous sa forme actuelle ?
- b) Abrégé, les démonstrations relatives à la pyramide et à la sphère cessant d'être « matière à examen » ?
- c) Supprimé ?

SEPTIEME QUESTION

Unification des définitions de mots et notations Mathématiques

Rapporteur : M. CROZES

Rappel des décisions de la dernière Assemblée générale. — En ce qui concerne les arcs, ont été conseillées les notations :



$\overrightarrow{AB}$ (surmonté d'un arc fléché) : arc orienté, élément géométrique ;

$\widehat{AB}$ (surmonté d'un arc ordinaire) : mesure algébrique d'un arc orienté ;
arc AB : module de l'arc, nombre arithmétique.

En ce qui concerne les *systèmes de vecteurs*, il est conseillé de n'employer le mot « *résultante* » que pour désigner, lorsqu'il existe, le vecteur équivalent à un système de vecteurs, le terme « *somme vectorielle* » étant appliqué dans tous les autres cas.

Torseurs. — Au cours de la discussion, M. BELGODÈRE avait signalé le terme : *torseur* (notation $\vec{T}$) désignant un système de vecteurs glissants, système défini à une égalité près, étant entendu que deux torseurs sont *égaux* (notation $\vec{T} = \vec{T'}$) s'ils ont même somme vectorielle et même moment résultant par rapport à un point. L'emploi de ce terme ayant rencontré un accueil favorable, nous le proposons cette année pour décision à l'Assemblée générale.

« **Normalisation** » des symboles mathématiques. — Nous prions nos collègues de se reporter à l'étude documentée de M. BELGODÈRE, parue dans notre *Bulletin* N° 134, en mai 1950, et proposant pour étude à l'A.P.M. les six points suivants : 1. Egale environ ; 2. Logarithmes ; 3. Angles ; 4. Imaginaires ; 5. Unités d'angles et d'angles solides ; 6. Grands nombres. Nous nous proposons d'ailleurs d'y revenir bientôt.

Lieux géométriques. — C'est à propos de l'exemple suivant : « Lieu géométrique des droites parallèles à un plan P, et passant par un point A extérieur » qu'une étude critique de la notion de lieu géométrique s'est imposée. Trois points de vue ont été soutenus par nos correspondants.

a) *Thèse*. — L'expression « lieu géométrique des droites... » désigne la figure formée par l'ensemble des droites caractérisées par l'énoncé ; il convient donc de répondre : ce lieu est un faisceau de droites, faisceau complet de sommet A et de plan P' parallèle à P. En effet, on ne doit pas dire que P' est le lieu, car toute droite de ce plan n'est pas impliquée par le problème posé.

b) *Antithèse*. — La notion de lieu géométrique doit rester strictement ponctuelle. Le terme « lieu de droite » ne désigne pas les droites, mais les divers points de ces droites. On peut donc bien dire que P' est le lieu, puisque par tout point de ce plan passe une droite satisfaisant aux conditions de l'énoncé.

c) *Essai de synthèse*. — Intervenant dans le débat, M. FAVRELLE pense que c'est l'expression, « Lieu géométrique » elle-même, qui est en cause. « Depuis longtemps, écrit notre collègue, je pense que le choix malheureux de ce terme, auquel on attribue une signification si différente de celle qu'il possède dans le langage vulgaire, contribue à exagérer les difficultés que la notion même soulève chez les élèves. D'autre part, il fait double emploi avec l'expression : ensemble de points (ou de droites, ou de lignes) que je souhaiterais voir seule conservée. Le mot « ensemble » garde en effet en mathématiques son sens vulgaire et, de plus, il recouvre une notion utilisable au delà des éléments enseignés dans nos classes. Les notions de « sous-ensemble », « d'intersection de deux ensembles » doivent être assimilables pour de jeunes élèves. » En bref, il est proposé ici de remplacer l'expression « Lieu géométrique » par le terme « Ensemble ».

Lignes représentatives ou courbes représentatives. — Notre enquête a été ouverte par une étude de M. SOURISSE analysant la confusion créée dans l'esprit des jeunes élèves par le conflit du langage mathématique et du langage vulgaire, lorsqu'il est parlé de la « courbe » représentant la fonction $y = ax + b$.

M. FAVRELLE suggère la solution suivante : « La fonction fait correspondre à certaines valeurs de la variable x , certaines valeurs de la variable y , à chacun des couples $[x, y]$ correspond un point M de coordonnées x et y . Le point M « appartient » à la fonction. Le « graphique » de la fonction est l'ensemble des points qui lui appartiennent. Ce langage n'aura pas à être modifié pour les fonctions dont le graphique n'est pas une courbe.

— présenter aux élèves la fonction $y = \sqrt{-x^2}$ par exemple, — il s'étend à des inégalités à deux variables et à des systèmes de telles inégalités, il peut être employé dans des espaces comportant plus de deux dimensions.

Les transformations ponctuelles conservant les longueurs. — Nous croyons souhaitable de reprendre l'étude, abandonnée depuis quelque temps, de la terminologie de ces transformations.

1) Comment doit-on nommer une transformation ponctuelle conservant les longueurs ?

2) Parmi les transformations précédentes comment doit-on distinguer celles qui, pour un espace donné, conservent l'orientation et celles qui changent l'orientation ?

Certes, notre langage est engagé par notre conception de l'objet étudié et ce sont ici les principes mêmes de la géométrie qui sont en cause. Il est possible que les travaux de notre Commission « Axiomatique et redécouverte » et ceux des groupes qui, dans nos régionales, étudient la « géométrie fondamentale » nous apportent bientôt des vues nouvelles sur ce problème. Nous faisons appel aux collègues qui nous ont déjà, au cours des années précédentes, apporté une précieuse documentation relative aux déplacements, et à tous ceux que cette question intéresse pour qu'ils nous aident à faire le point.

NEUVIEME QUESTION

Modification des statuts

MM. LECOMTE et MIRABEL doivent être remplacés au Comité en plus des six membres sortant cette année. Le Comité a décidé, dans sa séance du 25 janvier 1951, que les candidats qui seraient classés septième et huitième aux prochaines élections, remplaceraient respectivement M. LECOMTE dans la série élue en 1949, et M. MIRABEL dans la série élue en 1948.

Le candidat classé septième sera donc élu pour deux ans et le huitième pour un an.

Cette décision a été prise par le Comité pour régler une situation non prévue par les statuts.

Il vous propose, pour en éviter le retour, d'ajouter à l'article VI des statuts, après le deuxième alinéa (*Bulletin* N° 126, page 3) :

Lorsqu'un membre du Comité cesse de faire partie de l'Association, il est remplacé pour la fin de son mandat par celui des candidats non élus qui a obtenu le plus de voix aux dernières élections. Si, toutefois, la précédente condition désignait des candidats ex-æquo, ils seraient départagés par tirage au sort.

Nous vous proposons, en outre, de supprimer à la deuxième ligne de l'article V, les mots : « *aux vacances de Pâques* », pour permettre au Comité de convoquer l'Assemblée générale à la date où le plus grand nombre possible de collègues semble devoir être à Paris. Par exemple, si des journées d'étude pour les mathématiciens étaient une année organisées à Sèvres à la Pentecôte, il serait tout indiqué de fixer l'Assemblée générale à cette époque.

H. POCHARD.

V. Document officiel

Rapport sur le concours général de mathématiques pour la classe de Première, en 1950

[Le Jury était composé ainsi : M. DESFORGE, inspecteur général, président ; Mlle BARBIER, professeur de mathématiques au lycée Victor-Duruy ; Mlle LECONTE, professeur de mathématiques supérieures au lycée Fénelon ; M. FLAVIEN, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand ; M. ITARD, professeur de mathématiques supérieures au lycée Henri-IV ; M. MIRABEL, professeur de mathématiques supérieures au lycée Saint-Louis].

L'énoncé proposait l'étude de quelques propriétés des droites tangentes à la fois à deux sphères données, extérieures l'une à l'autre. Il ne pouvait être question, au niveau de la Première, de laisser aux candidats une grande liberté pour procéder à l'examen d'un problème dont les éléments ne devaient guère leur être familiers, car la notion de droite tangente à une sphère n'est pas particulièrement développée dans le programme de cette classe. Il a donc paru convenable de donner au départ des indications précises, afin d'orienter la recherche dans une direction raisonnable, et afin d'établir quelques résultats simples permettant ensuite d'aborder les parties plus difficiles. D'ailleurs, tenant compte de l'expérience des concours antérieurs, il était intéressant de ne pas se borner à des questions de géométrie, et de faire appel, d'une façon assez substantielle, aux connaissances que doivent acquérir les élèves en algèbre et en trigonométrie.

Le début avait essentiellement pour objet d'éviter aux candidats de fâcheux contresens au sujet des tangentes communes à deux sphères, en leur donnant le moyen de construire simplement l'une quelconque de ces droites, et en leur faisant prendre conscience, à partir d'une figure élémentaire très maniable, de la nature et de quelques propriétés immédiates des êtres géométriques qu'ils avaient à étudier.

Il s'agissait d'abord de déterminer les tangentes communes aux deux sphères (A) et (B) passant par un point P de la sphère (A), et de discuter leur nombre. Les résultats ont été assez généralement énoncés d'une façon correcte, mais les démonstrations sont trop souvent incomplètes ; une suite d'affirmations exactes ne constitue pas obligatoirement une solution ; les défauts de raisonnement que l'on relève à cet égard dans de nombreuses copies, même dans les meilleures, semblent provenir pour beaucoup d'une certaine négligence dans l'effort d'analyse des idées que l'on veut exposer et dans la mise au point d'une rédaction fidèle, et aussi d'une certaine confusion entre les notions de « condition nécessaire » et de « condition suffisante ». Ne peut-on demander à des élèves de Première de comprendre les différences de sens que présentent des propositions telles que les suivantes, toutes les trois relatives à une sphère (B) et à un cercle (γ) de cette sphère :

« les tangentes au cercle (γ) sont tangentes à la sphère (B) ;

« les tangentes à la sphère (B), situées dans le plan du cercle (γ) sont tangentes au cercle (γ) ;

« les tangentes à la sphère (B), situées dans le plan du cercle (γ), sont les tangentes au cercle (γ) » ? Il peut être fort utile de procéder parfois à une étude grammaticale des mots et des phrases que l'on emploie dans certaines démonstrations.

Supposant ensuite le point P pris sur un demi-grand cercle (α_1) de la sphère (A), limité par la droite des centres A, B des deux sphères, on demandait de définir l'arc sur lequel doit se trouver le point P pour qu'il existe au moins une tangente commune passant par P. La plupart des candidats se bornent à faire des constatations sur la figure, sans essayer de présenter une justification logique qui était cependant à leur portée : le calcul de la distance du centre B à la tangente au demi-cercle (α_1) en un point quelconque P, en fonction du rayon a de (A), de la distance $2d$ des centres et de l'angle λ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$, puis la comparaison de cette distance au rayon b de (B) conduisaient à la condition

$$|a - 2d \cos \lambda| \leq b,$$

équivalente à la double inégalité

$$a - b \leq 2d \cos \lambda \leq a + b,$$

qui précisait les limites entre lesquelles doit être compris $\cos \lambda$ pour que le point P vérifie la condition demandée ; l'arc utile du demi-cercle (α_1) s'en déduisait, et l'interprétation géométrique des positions limites confirmait sans difficulté les remarques intuitives suggérées par l'examen de la figure. Ces résultats s'appliquent, avec des changements évidents, à un point Q de la sphère (B), et l'on obtient ainsi une détermination rigoureuse des lieux géométriques des points de contact des tangentes communes avec l'une et l'autre des sphères données.

Le calcul des hauteurs et des aires des zones sphériques constituant ces lieux n'exigeait qu'un peu d'attention (l'explication géométrique de l'égalité des hauteurs, qui se rattache simplement aux propriétés de l'axe radical de deux cercles, n'était, bien entendu, pas demandée) ; il est assez correctement présenté dans les bonnes copies, mais il donne à beaucoup l'occasion de commettre des erreurs et des maladresses qu'un contrôle rapide ou un instant de réflexion auraient souvent permis de redresser ou d'éviter.

La partie II du problème concernait le cas des sphères égales et commençait par l'étude de la projection orthogonale F du milieu O du segment AB sur une tangente commune PQ. Une application immédiate du théorème de Thalès, puis l'égalité des triangles rectangles FPA et FQB permettaient d'établir successivement que F est le milieu du segment limité par les points de contact P et Q et que la droite OF est en général la perpendiculaire commune aux deux droites AB et PQ (par précaution, l'énoncé attirait l'attention sur les tangentes communes situées dans un plan passant par AB). La représentation des projections orthogonales de la figure formée par les cinq segments AB, PQ, AP, OF, BQ, faites sur un plan parallèle à AB et PQ, puis sur un plan perpendiculaire à PQ, puis sur un plan perpendiculaire

à AB, fournissait ensuite aux candidats l'occasion de voir avec netteté la disposition dans l'espace des éléments qu'ils devaient un peu plus loin étudier au point de vue métrique.

Les premières questions sont traitées, plus ou moins habilement, dans un grand nombre de copies ; pourtant, la démonstration de l'orthogonalité des droites AB et OF a été assez souvent inachevée ou laissée de côté. Quant à la justification de la forme des trois projections, qui ne faisait appel qu'à des résultats très élémentaires sur la projection du milieu d'un segment et sur la projection d'un angle droit, elle n'apparaît que dans une douzaine de compositions ; très rares sont celles qui signalent la différence que présentent, malgré leur analogie d'apparence, les deux projections sur les plans perpendiculaires à AB et à PQ, en ce qui concerne la conservation de certaines longueurs et de certains angles.

Le travail ainsi préparé, le calcul (en fonction de a , de d et du cosinus de l'angle λ des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$) des longueurs PQ et OF et des cosinus des trois angles $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$, $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$ et $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BQ})$, ne mettait en œuvre que l'application de résultats classiques aux configurations géométriques qui venaient d'être précisées. Différentes méthodes, plus ou moins compliquées, ont été utilisées par la cinquantaine de candidats qui ont abordé valablement cette question ; une manière logique de conduire les opérations était de calculer les segments PB et PO dans les triangles PAB et PAO, et d'en déduire, à partir de triangles rectangles et de triangles isocèles mis précédemment en évidence, les cinq expressions demandées. Si la détermination des longueurs PQ et OF a été faite correctement par une trentaine de candidats, celle des cosinus a été beaucoup moins bien réussie et une quinzaine seulement donnent des formules exactes, au moins pour l'un ou l'autre des angles.

La fin de cette deuxième partie comportait l'étude des trois cosinus ainsi calculés, considérés comme fonctions de la variable $x = \cos \lambda$. Deux d'entre elles apparaissaient comme des fonctions homographiques et la troisième comme une fonction linéaire de x , les coefficients dépendant simplement du

paramètre $m = \frac{a}{d}$, compris entre 0 et 1 ; la variable indépendante restait comprise dans l'intervalle (0, m) dont les limites avaient été trouvées dans la première partie du problème. La construction des courbes représentatives des trois fonctions dans un même système d'axes de coordonnées, la détermination des tangentes à ces courbes en quelques points remarquables, et la recherche de leurs positions relatives, étaient demandées seulement dans

l'hypothèse $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ces questions classiques n'exigeaient, pour être bien traitées, qu'un peu d'ordre et de méthode ; ayant constaté qu'à l'extrémité 0 de l'intervalle de variation de x les deux fonctions homographiques prenaient la même valeur $\frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}$, et qu'à l'extrémité m les trois fonctions

étaient égales à (-1) , les différences $y - z$, $y - u$, $z - u$ de ces fonctions prises deux à deux apparaissaient elles-mêmes comme des fonctions de x dont le signe dépendait des signes de binômes du premier degré très simples : on déduisait facilement de là la place de chacune des courbes par rapport aux deux autres, et la détermination des tangentes aux points limitant les arcs utiles des deux hyperboles permettait un contrôle des résultats.

Ce petit problème d'algèbre a été très généralement délaissé. Il est commencé correctement dans une dizaine de compositions, mais n'est achevé dans aucune. Il est bon de signaler quelques copies, très rares, où apparaît la très louable préoccupation de ne pas perdre de vue l'origine des éléments étudiés et de rétablir de temps en temps la liaison entre les opérations algébriques et les propriétés géométriques de la figure initiale : constater que les angles $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ et $(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB})$ sont toujours obtus, — qu'ils ne sont égaux entre eux que pour les valeurs extrêmes de λ , correspondant du reste aux tangentes communes situées dans un plan passant par AB, — que l'angle des rayons AP et BQ prend au contraire toutes les valeurs possibles..., constitue un ensemble de remarques sans doute élémentaires, mais qui n'en sont pas moins intéressantes, d'autant plus que certaines d'entre elles conduisent à des vérifications de bon sens, toujours fort utiles.

La dernière partie introduisait d'abord la sphère (S), lieu des sommets des cônes de révolution égaux circonscrits aux deux sphères (A) et (B), supposées maintenant inégales ($a > b$). Le calcul préalable, suggéré par l'énoncé, des sinus des demi-angles au sommet des cônes circonscrits à (A) et à (B) ayant pour sommet un point *quelconque* M de l'espace, facilitait la recherche et permettait de ramener, par un raisonnement très bref ne faisant intervenir que des conditions à la fois nécessaires et suffisantes, la détermination du lieu demandé à celle, classique, du lieu des points dont le rapport des distances aux centres A et B est égal au rapport des rayons correspondants a et b .

La plupart des compositions, assez nombreuses, où cette question est traitée, exposent la solution en commençant par la phrase habituelle : « Soit M un point appartenant au lieu cherché... », phrase qui amorce une chaîne de déductions ne pouvant conduire qu'à « des conditions nécessaires », et l'étude d'une réciproque s'impose alors logiquement. C'est bien là la démarche naturelle de la pensée en présence d'un problème nouveau, et c'est ainsi que, très normalement, l'on franchit l'étape de la découverte ; mais, au moment de la mise en forme définitive du raisonnement et des résultats, une réflexion critique peut intervenir, qui fera parfois apparaître que les deux phases « aller » et « retour » peuvent être condensées en une seule, à condition, bien entendu, de modifier la phrase d'introduction. Ce mode de présentation, qui n'est pas en général un mode d'investigation, et qui consiste, en fait, à faire apparaître une suite de transformations dont chacune remplace un problème par un problème équivalent, paraît accessible aux élèves de Première, pourvu qu'on leur en explique le mécanisme avec beaucoup de soin, et d'abord sur des exemples très simples et très clairs.

Ces remarques sont également valables pour les « problèmes de construction ».

L'énoncé attirait l'attention sur les points I et J de la sphère (S) situés sur la ligne des centres AB ; sans sortir du programme de la classe, ces points apparaissaient naturellement comme les centres d'homothétie des grands cercles, sections des sphères (A) et (B) par un plan passant par la droite AB.

L'étude des projections orthogonales H et K des points I et J sur l'une quelconque des tangentes communes aux sphères (A) et (B) constituait l'essentiel des dernières questions.

Par analogie avec le mode de raisonnement utilisé au début de la deuxième partie, l'application du théorème de Thalès aux deux droites PQ et AB, coupées par les quatre plans projetant orthogonalement, sur la tangente commune PQ, les quatre points de la division harmonique A B I J, permettait d'établir la similitude des triangles PAH et QBH, ainsi que celle des triangles PAK et QBK ; l'on en déduit immédiatement que les points H et K appartiennent à la sphère (S). Ces faits sont correctement présentés par une trentaine de candidats, qui ont également, presque tous, indiqué que les droites HI et KJ (lorsqu'elles existent) étaient respectivement bissectrice intérieure du triangle HAB et bissectrice extérieure du triangle KAB, mais aucun n'a songé à compléter ces remarques en étudiant les autres bissectrices des angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{AKB}$.

On proposait ensuite, en vue de préparer la recherche précise des lieux géométriques des points H et K, de déterminer les centres d'homothétie des deux cercles suivant lesquels le plan (R) perpendiculaire en H à la droite IH coupe les sphères (A) et (B), dans le cas général où la tangente commune PQ ne passe ni par I, ni par J, c'est-à-dire n'est pas dans un plan passant par la droite AB. D'abord, on établit facilement que le plan (R) est sécant pour chacune des sphères (A) et (B), puisqu'il contient les points P et Q de ces sphères sans être perpendiculaire à l'un ou à l'autre des rayons AP et BQ (sinon AP ou BQ serait parallèle à la normale IH au plan, et les deux droites AB et PQ seraient dans un même plan). Il est alors naturel de prendre comme plan de figure le plan ABH, qui est plan de symétrie pour l'ensemble des sphères (A), (B), (S) et pour le plan (R), donc pour les cercles de section (A') et (B') des sphères (A) et (B) par le plan (R) : la ligne des centres A' et B' de ces deux cercles n'est autre que la trace R' de (R) sur le plan ABH, trace perpendiculaire en H à IH et qui passe, par conséquent, par le point J diamétralement opposé à I sur la sphère (S). La droite PQ, tangente aux deux cercles (A') et (B'), coupant la droite des centres A'B' au point H, intérieur au segment PQ (puisque I est intérieur au segment AB), le point H apparaît comme le centre d' « homothétie négative » des deux cercles ; le point J est donc le centre d' « homothétie positive », puisque la division A'B'HJ, projection orthogonale de la division ABIJ sur la droite A'B', est harmonique. Le raisonnement peut du reste être présenté autrement, une fois constaté que la trace R' de (R) passe par

le point J : ce point étant centre d'homothétie des grands cercles de (A) et de (B) situés dans le plan de symétrie ABH, les cordes que ces deux grands cercles découpent sur la trace JA'B' sont homologues dans cette homothétie de centre J, et les deux cercles (A') et (B') ayant ces cordes pour diamètres admettent eux-mêmes J comme centre d'homothétie ; l'autre centre est par conséquent le point H, conjugué harmonique de J par rapport aux centres A' et B'. Les résultats analogues relatifs au point K et au plan perpendiculaire en K à la droite JK s'énoncent aisément.

Cette étude, un peu plus délicate, a été abordée convenablement, sinon adroitement, dans une quinzaine de copies, mais bien rares sont celles où est situé exactement le second centre d'homothétie des deux cercles, faute d'avoir vu, en général, que le plan perpendiculaire en H à IH passe par le point J.

La détermination du lieu géométrique de la projection orthogonale du point I sur les tangentes communes à (A) et à (B) est préparée par la connaissance des propriétés précédentes. On sait déjà que ce lieu est porté par la sphère (S), et, plus précisément, que tout point H' du lieu, correspondant à une tangente commune ne rencontrant pas la droite AB, est un point de (S) tel que le plan perpendiculaire en H à IH est sécant pour les sphères (A) et (B).

Pour les tangentes communes rencontrant la droite AB, qu'il est commode d'étudier d'abord, elles coïncident avec les génératrices des deux cônes circonscrits aux sphères (A) et (B) ayant pour sommets les points I et J : le lieu des projections de I sur les droites de ces deux familles comprend, d'une part le point I, d'autre part le cercle (h_0) de la sphère (S) décrit par la rotation autour de AB de la projection orthogonale H_0 du point I sur l'une des tangentes communes passant par J.

Il reste alors à étudier les points N de (S), distincts de I, tels que le plan (T) perpendiculaire en N à IN soit sécant pour les sphères (A) et (B). Le point N ne pouvant être confondu avec le point J d'après cette dernière hypothèse (car le plan perpendiculaire à IJ au point J est extérieur aux deux sphères), le plan ABN est bien défini et forme plan de symétrie pour l'ensemble des trois sphères et du plan (T) ; on retrouve alors, aux notations près, une figure déjà rencontrée, et l'on a justement établi tout à l'heure que le plan (T) passait par le point J et que les centres d'homothétie des deux cercles, sections de (A) et (B) par le plan (T) étaient le point J et le point N, — le raisonnement utilisant uniquement le fait que le point J est centre d'homothétie des deux grands cercles des sphères (A) et (B) situés dans le plan méridien ABN, et que les points N et J sont conjugués harmoniques par rapport aux centres des cercles sections de (A) et (B) par le plan (T), cercles qui sont évidemment extérieurs l'un à l'autre. Dès lors, par le point N passent deux tangentes communes à ces deux derniers cercles, donc aux sphères (A) et (B), et ce point N est bien la projection orthogonale de I sur une tangente commune aux deux sphères.

Ainsi, en dehors du point I et du cercle (h_0), le lieu géométrique cherché

coïncide avec le lieu des points N de (S) tels que le plan perpendiculaire en N à IN soit sécant aux sphères (A) et (B), c'est-à-dire tels que la droite JN soit sécante à ces deux sphères. La définition précise du lieu en résulte : il est formé par la calotte sphérique (S_1) et (S) contenant le point I et limitée au cercle (h_0) ; c'est aussi la partie de (S) située à l'intérieur du cône circonscrit aux sphères (A) et (B) ayant pour sommet le point J.

L'étude est analogue pour les projections du point J ; elle fait apparaître comme lieu la calotte sphérique (S_j) de (S) située à l'intérieur du cône circonscrit aux deux sphères (A) et (B) ayant pour sommet le point I.

La détermination de la distance IJ et des hauteurs h et k de ces deux calottes sphériques se ramenait à un calcul élémentaire de géométrie plane, qui pouvait, par exemple, faire intervenir les sinus des demi-angles au sommet des cônes circonscrits à la fois aux sphères (A) et (B). On constatait incidemment que les aires des deux calottes (S_1) et (S_j) ne dépendent pas de la distance des centres AB, ce qui s'explique par les propriétés harmoniques de la division ABIJ : en projetant successivement cette division sur un plan perpendiculaire à une tangente commune extérieure (passant par J), et sur un plan perpendiculaire à une tangente commune intérieure (passant par I), on établit facilement que les distances de I à une tangente commune extérieure et de J à une tangente commune intérieure sont les moyennes harmoniques respectivement du couple de nombres (a , b) et du couple ($-a$, b), et ces distances, indépendantes de d , sont justement les rayons des cercles ayant des aires équivalentes à celles des calottes (S_1) et (S_j).

La comparaison de la somme des hauteurs k et h à la distance IJ donnait immédiatement la condition nécessaire et suffisante pour que les deux calottes (S_1) et (S_j) aient une partie commune (pouvant se réduire, comme cas limite, à un cercle). Avec les notations de l'énoncé, cette condition est :

$$2d^2 \leq a^2 + b^2,$$

évidemment compatible avec l'hypothèse des sphères extérieures l'une à l'autre. Une interprétation géométrique simple peut en être donnée en faisant intervenir les cercles orthoptiques des cercles méridiens des deux sphères (A) et (B) dans un plan passant par AB. Le cas limite, correspondant à l'égalité, se présente lorsque, dans un plan méridien passant par AB, l'une des tangentes communes intérieures est perpendiculaire à l'une des tangentes communes extérieures, ou encore lorsque les cercles orthoptiques des deux cercles méridiens sont orthogonaux.

Six candidats ont abordé l'étude de ces lieux géométriques et ont donné, sinon des raisonnements complets, du moins des indications raisonnables et ont obtenu quelques résultats corrects.

L'énoncé proposait enfin la détermination des génératrices communes aux deux cônes de révolution égaux (M, A) et (M, B), circonscrits respectivement aux sphères (A) et (B), ayant pour sommet un point quelconque M de (S), qu'on peut naturellement supposer distinct de I et de J. Il revient évidemment au même de chercher les droites passant par M, tangentes communes aux sphères (A) et (B), et la question se liait ainsi aux résultats

précédemment acquis : il suffit de remarquer que les projections orthogonales H et K des points I et J sur l'une quelconque des tangentes communes sont deux points distincts, puisqu'ils sont conjugués harmoniques par rapport aux points de contact P et Q d'une telle droite avec (A) et (B) (sans pouvoir se confondre avec l'un de ces points P ou Q) ; ces points H et K étant sur la sphère (S), il en résulte que chaque tangente commune coupe (S) en deux points distincts, qui sont les projections orthogonales sur elle-même des points I et J.

En conséquence, les génératrices communes aux deux cônes (M, A) et (M, B) coïncident avec les tangentes communes aux sphères (A) et (B) qui sont perpendiculaires en M, soit à la droite IM, soit à la droite JM, c'est-à-dire qui sont situées, soit dans le plan (U) perpendiculaire en M à IM, soit dans le plan (V) perpendiculaire en M à JM. On est ainsi ramené à un problème déjà étudié : le plan (U), qui passe par J, contient deux génératrices communes si le point M est sur la calotte sphérique (S_1) ; lorsque M n'est pas sur le cercle de base limitant (S_1), ces deux génératrices sont distinctes et coïncident avec les tangentes communes intérieures aux deux cercles sections de (A) et (B) par le plan (U) ; si M est sur le cercle de base, elles sont confondues avec la tangente commune JM, le long de laquelle les deux cônes sont tangents. Les résultats sont analogues avec le plan (V), qui passe par I ; ils font intervenir la calotte sphérique (S_2).

La discussion du nombre des génératrices communes aux cônes (M, A) et (M, B) se déduit facilement de là ; ce nombre varie de zéro à quatre, suivant que les calottes sphériques (S_1) et (S_2) n'empiètent pas ou empiètent l'une sur l'autre, et suivant la position du point M sur l'une ou l'autre des zones définies sur la sphère (S) par les cercles limitant (S_1) et (S_2).

Ces dernières questions n'ont donné lieu qu'à de rares essais, d'ailleurs peu valables ; le lien entre la recherche de l'intersection des deux cônes de révolution et les propriétés des tangentes communes aux deux sphères n'a pas été dégagé nettement, et si un candidat commence la discussion du nombre de génératrices communes, c'est en affirmant *a priori* qu'il ne peut en exister plus de deux.



Les indications qui précèdent, systématiquement restreintes pour ne pas sortir du domaine des connaissances du programme de Première, montrent que l'épreuve ne dépassait pas les possibilités d'un bon élève ; elle n'exigeait, bien-entendu, aucune érudition, puisque l'énoncé, très explicite, proposait ou suggérerait les moyens d'aborder les différentes questions, toutes les fois qu'il pouvait se présenter une difficulté réelle de recherche pour des débutants. Sans doute le sujet peut paraître long, mais le fait que quelques candidats sont arrivés à présenter des résultats convenables sur un bon nombre de parties du problème prouve qu'il n'était pas impossible d'en traiter l'essentiel dans les délais imposés.

Plusieurs des rapports sur les concours antérieurs ont déjà signalé que

l'algèbre paraissait négligée au profit de la géométrie ; l'expérience de 1950 ne fait que confirmer cette remarque. En ne retenant que les meilleures compositions, la proportion est minime (une sur quatre environ) de celles dont les auteurs paraissent porter quelque intérêt aux questions d'algèbre. Evidemment, plusieurs ont l'excuse d'avoir laissé de côté les paragraphes relatifs aux fonctions pour avoir le temps de traiter la dernière partie du problème. Il n'en reste pas moins que les solutions présentées en algèbre ne sont guère satisfaisantes, et rares sont celles qui témoignent dans la conduite des raisonnements et des calculs, sinon d'une certaine maîtrise qu'on ne peut attendre de débutants, du moins d'une certaine attention réfléchie.

C'est là un fait méritant examen. Peut-être n'est-il pas inutile, à ce propos, d'insister encore sur l'importance de la discipline algébrique, qui ne doit pas être considérée comme une partie mineure des mathématiques, n'ayant guère d'autre objet que de fournir des formules et des procédés pratiques, mais qui doit, au contraire, avoir une place de choix dans l'enseignement du second degré, par la contribution qu'elle peut apporter à la formation intellectuelle et scientifique. Car, les définitions et les propriétés des nombres et des opérations élémentaires, une fois acquises, et raisonnablement acquises, pour constituer l'outillage indispensable, le développement du cours d'algèbre comporte essentiellement un ensemble de questions où la part de l'observation réfléchie, de l'imagination, du raisonnement logique est aussi importante qu'en géométrie élémentaire. Et l'algèbre n'est-elle pas à la base de la géométrie analytique comme de l'analyse, et de tous leurs prolongements théoriques et pratiques ?

Un autre fait que la majorité des compositions, même parmi les meilleures, met en évidence est le manque de rigueur logique dans la présentation des raisonnements relatifs aux lieux géométriques. Sans doute, les élèves savent bien que, si la recherche a commencé par l'hypothèse : « Soit M un point de lieu... », l'étude d'une réciproque des propriétés découvertes comme conséquences de cette hypothèse, ou une étude équivalente, s'impose. Mais la mise en application de cette règle de bon sens est très souvent incorrecte et les défauts semblent provenir, assez fréquemment, de ce que l'analyse des conditions nécessairement vérifiées par les points du lieu n'a pas été poussée assez loin.

Ainsi, pour prendre un exemple tiré de la dernière partie du problème, à propos du lieu des projections orthogonales du point I sur les tangentes communes aux sphères (A) et (B) , la mise en forme d'une solution précise est grandement facilitée si l'on a établi, non seulement que chacune de ces projections orthogonales H est un point de la sphère (S) , mais encore que le plan perpendiculaire en H à la droite IH est sécant ou tangent aux sphères (A) et (B) . Or, la plupart des candidats, après avoir constaté que le lieu est porté par la sphère (S) , s'efforcent de déterminer la région utile par des considérations telles que les suivantes : « Les positions-limites du point H « correspondent aux positions-limites du point P , déterminées dans la première partie en coupant les sphères par un plan passant par la droite AB ;

« les positions-limites des tangentes communes aux deux sphères sont les tangentes communes aux deux grands cercles, sections des sphères (A) et (B) par un tel plan ; les projections du point I sur ces tangentes sont le point I lui-même et les points H_0 et H'_0 symétriques par rapport à la droite AB. Le lieu des points H est donc la calotte sphérique engendrée par la rotation de l'arc de grand cercle $H_0IH'_0$ de (S), tournant autour de AB. » Il est bien évident que l'affirmation finale n'est pas la conclusion logique des remarques particulières formulées d'abord, et que la question n'est pas résolue ainsi. Il semble là qu'une confusion s'est établie, dans l'esprit de quelques débutants, qui ont pris pour de véritables démonstrations certaines remarques intuitives que l'on présente fréquemment pour préparer une détermination précise d'un lieu géométrique, en invoquant même parfois, assez fâcheusement, une vague raison de « continuité ». Bien entendu, il ne s'agit nullement de proscrire certains modes de raisonnement légitimement employés lorsque, par une suite de transformations ayant permis de substituer aux propriétés initiales de définitions des propriétés caractéristiques équivalentes, la recherche d'un lieu est pratiquement réduite à des constatations évidentes, se rapportant à des faits déjà connus ou faciles à établir rigoureusement (dans l'exemple actuel : rechercher des points N de la sphère (S) tels que la droite JN soit sécante ou tangente aux deux sphères données).

Il est intéressant de noter, cette année, une amélioration assez sensible de la rédaction et de l'orthographe. Sans doute on relève encore bien des fautes et des incorrections, et les meilleures compositions ne sont pas exemptes de certaines négligences qui pourraient laisser croire qu'il existe un « style mathématique » méprisant les règles les plus élémentaires de la correction grammaticale (j'allais dire : de la politesse) ; mais il n'y a là, très certainement, que fâcheuse habitude, sans aucune intention concertée. La phrase suivante, où la ponctuation est, bien entendu, respectée, en donne un exemple : « Soit PQ une tangente commune j'ai AP perpendiculaire PQ comme tangente, et BQ perpendiculaire PQ comme OF est perpendiculaire à PQ par AP, OF, BQ je peux faire passer des plans parallèles d'où le « le théorème de Thalès me donne immédiatement : F milieu de PQ... » Cependant, la recherche d'une expression correcte, à la fois complète et précise, si possible élégante, des idées et des faits semble avoir trouvé place parmi les préoccupations d'un certain nombre d'élèves, et il faut souhaiter que cette constatation ne soit point due à quelque hasard sans lendemain.

Dans l'ensemble, le concours de 1950 laisse une impression satisfaisante et confirme la valeur de l'enseignement donné dans nos établissements secondaires. Cette appréciation n'est point fondée, évidemment, sur la seule considération des meilleures copies ; elle tient compte surtout des résultats, incomplets sans doute, mais souvent de qualité fort honorable, obtenus par une bonne partie des candidats soumis à une épreuve à peu près nouvelle pour eux, par sa durée et par ses exigences.

Quelques précisions numériques compléteront ces conclusions. Sur les

cent cinquante-huit élèves qui ont pris part à l'épreuve, une trentaine environ ont remis des copies nettement insuffisantes. Par contre, trente-et-une compositions ont été soumises, après délibération du jury, à une seconde lecture, et le classement définitif a permis de proposer sept récompenses : un premier prix ; puis, assez nettement détachés, deux seconds prix *ex-æquo*, et, après une nouvelle coupure, quatre accessits, deux à deux *ex-æquo*. Une quinzaine de compositions, classées immédiatement après celles des lauréats, méritaient de retenir l'attention. Bien que les notes « chiffrées » ne constituent qu'un médiocre moyen pour traduire un véritable jugement de valeur, on peut situer approximativement les niveaux relatifs des candidats du peloton de tête en disant que si l'on attribue la note 15 au premier classé, les quinze copies suivant celles qui figurent au palmarès peuvent être cotées entre 8 et 10.

Il n'est pas sans intérêt d'ajouter, comme contribution à la petite histoire du Concours général, que, parmi les sept lauréats de 1950, figurent un élève de Première A (troisième accessit) et deux élèves d'École Normale, à qui ont été attribués un second prix et un troisième accessit ; les quatre autres sont des élèves de Première C. Disons enfin que le palmarès du Concours général de Mathématiques, pour la classe de Mathématiques, en 1950, contient en bonne place les noms de cinq élèves déjà cités au Concours de 1949, dans la classe de Première ; parmi eux, M. Jean-Pierre Barrat, du lycée Louis-le-Grand, mérite une mention particulière, puisqu'il a obtenu, au cours de ces deux années, les deux premiers prix de mathématiques et le premier prix de physique.

J. DESFORGE,
Inspecteur général.

VI. Activité des Régionales

Section de l'Académie de Dijon

Compte rendu de la séance du 22 décembre 1950

ANNALES DU BACCALAURÉAT. — Nos collègues regrettent que le changement d'édition des *Annales* ait entraîné la suppression de l'énoncé des questions de cours.

Sans demander le retour aux *Annales* Vuibert, ils désirent que l'an prochain les questions de cours figurent avec les problèmes pour chaque Académie. Par contre, la séparation nette des deux parties du bachot est heureuse.

SUJETS DU BACCALAURÉAT. — La section discutera les textes locaux des deux sessions dans une réunion de reprise tenue dans le courant du mois d'octobre et enverra à l'A.P.M. textes et commentaires.

TABLES NUMÉRIQUES. — L'indication du *Bulletin* demandant de faire prévenir les candidats de Sciences Expérimentales d'avoir à apporter à l'oral leurs tables de logarithmes semble superflue : il suffit que l'examinateur apporte deux tables ; inutile d'ennuyer les élèves sur ce point.

On peut donner cet avis à la première partie pour l'écrit. La section demande s'il est légal que le Président du Jury du Baccalauréat fasse déposer les tables de logarithmes sur le bureau du surveillant quand elles semblent inutiles dans une épreuve. Les tables étant autorisées, le candidat devrait pouvoir les garder. D'autre part, les tables de valeurs naturelles sont-elles autorisées ?

Certains collègues demandent, qu'au moins en Sciences Expérimentales (Physique à l'écrit, Mathématiques à l'oral), *les tables numériques* (et non seulement de logarithmes), soient autorisées, ce qui semble conforme à l'esprit de la classe.

PROGRAMMES DU BACCALAURÉAT. — Les collègues déplorent la non fourniture, par l'Office du Baccalauréat, aux examinateurs de programmes officiels. Ceci est surtout gênant dans la série Technique où les programmes sont nettement particuliers.

Le fait est-il général ? Cette fourniture est-elle prévue dans les textes ou non ? Pourrait-on l'obtenir sur le plan général ou simplement par accord local ?

DIVERS. — Les études de l'Axiomatique et de la Redécouverte, l'Histoire des Mathématiques, etc... ont été renvoyées à des séances ultérieures.

FILM. — La réunion s'est terminée par la projection et discussion du film « Lieux géométriques ».

Le Responsable de section : EUVRARD.

Un film de Mathématiques : LES LIEUX GÉOMÉTRIQUES

Film sonore en 16 mm. de MM. JACQUEMART et CANTAGREL. Edition Jean Mineur. Durée : 15 minutes, à la cadence de 24 images-seconde.

ANALYSE. — 1) *Cercle* : lieu des points tels que $MA = k$; — lieu des centres des cercles de rayon donné passant par A. Réciproque.

2) *Médiatrice* : lieu des points tels que $MA = MB$; lieu des centres des cercles passant par A et B.

3) *Bissectrices* : a) d'un angle : lieu des points tels que $MH = MH'$; lieu des centres des cercles tangents aux deux côtés d'un angle ; — b) de deux droites sécantes. Cercles tangents à deux droites.

4) *Arcs capables d'un angle α* : les arcs achevant les cercles sont capables de $180^\circ - \alpha$; — construction des centres ; — cas où $\alpha = 90^\circ$ par déformation continue.

Applications : a) lieu des milieux des cordes d'un cercle fixe, passant par un point fixe B. B intérieur ; B extérieur ; déformation du lieu quand B varie ;

b) étude des cercles (C) centrés en C sur une circonférence (O) et passant par un point fixe B de la circonférence (O). L'enveloppe est une cardioïde ; — lieu des points M et M' diamétralement opposés sur (C) tels que le diamètre MM' passe par un point fixe A de (O) ; — décomposition en plusieurs cas (AMB constant) ; — évolution des lieux quand AB se déplace parallèlement à une direction fixe. Rotation de la cardioïde autour de O.

OBSERVATIONS. — Le film n'a pas du tout la prétention de se substituer au cours, et, sauf au 1), *ne démontre rien*, mais suggère aux élèves des points de vue nouveaux en utilisant le déplacement continu au mouvement qui est l'essence même du cinéma.

Insistons particulièrement sur ces deux points :

— L'absence de démonstrations et de réciproques, d'ailleurs indiquée très clairement par les auteurs, doit être soulignée *avec vigueur* par le professeur utilisant ce film. Mieux : celui-ci *doit* avoir fait en classe toutes les démonstrations dont les élèves vont simplement voir utiliser les résultats. Sinon un grand danger peut sortir de la projection. Les élèves n'ont que trop tendance déjà à prendre deux ou trois positions du point mobile et à dire : le lieu, c'est le cercle passant par ces points. Leur conviction qu'il suffit de « voir ce qui se passe » se trouverait grandement renforcée, de même que leur mépris pour toute espèce de réciproque, malgré les précautions des auteurs. La logique rigoureuse est rarement un besoin chez l'enfant qui se contente de son intuition.

— Et, pourtant, cette intuition est fréquemment en défaut au point de vue Mathématiques, en ce qui concerne les déformations ou mouvement, qui constituent au fond la beauté artistique des arides Mathématiques.

Un film comme celui-ci (ou « Les familles de droites », sur lequel nous reviendrons) ouvrira les yeux de nombreux élèves et peut-être leur donnera le goût de la recherche de nouvelles beautés.

C'est dans ce but, pensons-nous, que les auteurs ont parlé en fin de film d'enveloppes et de cardioïde ; qu'ils ont introduit ces ensembles de cercles courant les uns derrière les autres, d'un effet papillotant moins heureux.

Citons quelques réussites :

— Les ensembles de cercles jetés au hasard dans le plan se déplaçant pour venir passer par deux points A et B.

— La déformation des cercles passant par ces deux points ou tangents à deux droites, s'aplatissant quand le centre s'éloigne.

— La mise en place des points équidistants de A et B ou de deux droites (1).

(1) Ce point appelle d'ailleurs des considérations logiques : au moment où, dans les cours, on traite les propriétés de la bissectrice, il est impossible de construire rigoureusement, *à priori*, un point équidistant des deux côtés d'un angle, construction qui exige le parallélisme qui est au fond utilisé dans le film sous forme de translation. Mais, ici, le but est autre, et les élèves sont censés déjà connaître la suite du cours.

Citons aussi quelques défauts :

— L'expression malencontreuse de « lieu limité ».

— Le choix du dernier exemple dont la décomposition en quatre cas apparaît assez factice et qui, en fait, se traite beaucoup mieux par l'introduction des centres des cercles-lieux que par les arcs capables. Cet exemple, donnant des cercles complets, est en fait un problème sur les angles de droites et de vecteurs, ou mieux sur la similitude, et ne se trouve pas traité ici, à notre avis, dans l'esprit qui conviendrait. Là encore, les élèves risquent de retirer de la projection des idées malencontreuses si le professeur ne les prévient pas.

UTILISATION. — Ce film apparaît, à la projection, hétérogène :

a) Tout le film, dernier exemple exclu [4, applications b)], est à utiliser en classe de Quatrième (en fin d'année), Troisième et Seconde. Les élèves des classes suivantes, qui ne l'auront pas vu antérieurement, en tireront un utile profit, mais le trouveront vraisemblablement trop enfantin. C'est au présentateur à leur montrer qu'il y a matière à d'utiles réflexions dans un retour aux choses simples, vues sous un angle nouveau qu'ils pourront appliquer ensuite à leurs problèmes propres. Nous en recommandons vivement l'utilisation avec les précautions déjà indiquées.

b) Le dernier exemple est difficile à suivre à la première projection. Le niveau change brusquement ; les figures sont plus complexes. L'élève sera dérouté, et vraisemblablement, se contentera de suivre comme en un jeu les balancements successifs des angles ou des cercles. Dans les petites classes il dépasse les élèves. Pour les grandes, il n'est pas traité dans l'esprit qui conviendrait. Ce dernier exemple est le seul point du film que nous critiquerons vraiment, malgré son caractère esthétique.

M. EUVRARD.

Section de l'Académie de Nancy

Mémoire d'activité pour le premier trimestre 1950-51

26 octobre 1950. — Séance de rentrée : « La coordination des enseignements de Mathématiques et de Physique ». M. MARQUE, physicien, demande que la discussion distingue les améliorations dans le cadre des programmes et règlements en vigueur d'une part, et les réformes désirées pour les programmes d'autre part. Une discussion très animée aboutit à un programme de travail pour les Commissions. Quatre séances sont prévues et les rapporteurs sont désignés.

9 novembre. — Commission de coordination pour la classe de Mathématiques.

23 novembre. — Commission de coordination pour les classes de Première et Seconde CM.

30 novembre. — Commission de coordination pour les classes de Sciences Expérimentales.

14 décembre. — Commission de coordination pour les classes littéraires Philo-Lettres, Première et Seconde AB.

18 janvier 1951. — M. GLAESER traite le sujet suivant : « La valeur pédagogique et antipédagogique de l'œuvre de Nicolas Bourbaki ». Il distingue l'effort pédagogique qui consiste à donner à la pensée la construction théorique la meilleure pour enseigner un programme donné, d'un effort différent bien que pédagogique lui aussi, qui consiste à trouver les moyens ingénieux de faire pénétrer ce programme dans l'esprit des élèves à qui il s'adresse.

S'attachant à l'œuvre pédagogique du premier genre, il montre l'intérêt qu'on aurait à rassembler les propriétés s'apparentant par une théorie qui les domine, puis à adopter un langage et des notations conformes à l'usage des concepts qu'on introduirait.

La conférence fut prolongée par une importante intervention de M. DIEUDONNÉ, professeur à la Faculté des Sciences. Il précisa que les travaux publiés depuis quinze ans par Nicolas Bourbaki constituent une œuvre suffisante pour avoir une incidence dans l'enseignement des Mathématiques Spéciales.

A la suite de la discussion qui suivit cette intervention furent prises les décisions suivantes :

1° un cours s'ouvrira le 8 mars au Lycée H.-Poincaré, où M. SCHWARTZ, professeur à la Faculté des Sciences, parlera de *l'algèbre linéaire ou théorie des recteurs*.

2° A la suite de chaque cours, après la discussion où les professeurs d'Enseignement Secondaire sont priés d'apporter leurs critiques et leur expérience, un cours sera rédigé et multiplié.

3° Ce cours pourra être demandé par tous les professeurs de Mathématiques qui s'intéressent aux problèmes traités. Leurs suggestions et critiques seront confrontées avec celles des membres participants et présents. Les demandes seront adressées au correspondant de l'A.P.M. au Lycée de Nancy.

Programme prévu pour le deuxième trimestre

8 mars. — L'algèbre linéaire, par M. SCHWARTZ, professeur à la Faculté des Sciences.

19 avril. — Examen des manuels nouvellement parus. Les exposés seront faits pour chacun d'eux par les rapporteurs désignés.

Date non fixée. — Participation au Congrès de Nancy de l'Union des Physiciens.

Journées d'Etudes de Nancy

Dimanche 18 mars et lundi 19 mars 1951

(Physique et Mathématiques)

Ouverture du Congrès sous la présidence de l'Inspection Générale.

Conférence de M. SCHWARTZ, professeur de Mathématiques à la Faculté

des Sciences : « En quoi les Mathématiques modernes se distinguent-elles des Mathématiques classiques ».

Conférence de M. BARRIOL, professeur à la Faculté des Sciences : « En quoi la Physique moderne se distingue-t-elle de la Physique classique ».

Débats pédagogiques sur la liaison entre l'enseignement des Mathématiques et l'enseignement de la Physique dans le Second Degré.

a) Dans les classes de Seconde et Première.

b) Dans les classes de Mathématiques et Sciences Expérimentales.

Banquet.

Excursion et déjeuner. Clôture.

(Envoyez toutes les suggestions et communications au correspondant régional).

VII. Le 11^e Congrès International des Mathématiciens

*Compte rendu de M. MONJALLON, professeur au Lycée Saint-Louis
représentant l'Association à ce Congrès*

Le onzième Congrès international des Mathématiciens, qui devait prendre place en 1940 et fut retardé par suite des circonstances que chacun connaît, a eu lieu à Cambridge, Massachusetts (U.S.A.), du 30 août au 6 septembre 1950.

Quarante-cinq pays avaient envoyé des délégués et cette reprise de contact entre quelque quinze cents mathématiciens du monde entier fut parée d'un vif éclat. La France, représentée par une trentaine de membres, y fut à l'honneur ; M. le Professeur HADAMARD avait été désigné comme Président d'honneur et l'une des récompenses distribuées (Fields Medals) a été attribuée à M. le Professeur L. SCHWARTZ, de l'Université de Nancy.

Organiser une réunion d'une telle ampleur est une lourde tâche, mais le Comité, présidé par M. le Professeur O. VELEN, de l'Institute for Advanced Study, Princeton (N.J.), y avait fait face de façon remarquable et tout fut parfait, tant du point de vue du travail scientifique, qu'à celui de l'organisation matérielle. Les congressistes garderont, nous en sommes sûrs, un excellent souvenir de la façon cordiale dont ils furent reçus.

Les travaux du Congrès comprenaient des conférences générales et des communications suivies de discussions sur les différentes branches des Mathématiques. Celles-ci avaient été classées en sept sections : I. *Algèbre et théorie des nombres* ; II. *Analyse* ; III. *Géométrie et topologie* ; IV. *Probabilités et statistique, sciences actuarielles et économiques* ; V. *Physique mathématique et Mathématiques appliquées* ; VI. *Logique et Philosophie* ; VII. *Histoire et Pédagogie*.

Il nous est impossible de donner ici un aperçu, même succinct, des tra-

vaux du Congrès. La délégation française y a fait grosse impression par le nombre et la qualité de ses communications. Signalons en particulier les remarquables conférences de MM. H. CARTAN : *Sur les fonctions analytiques de variables complexes* ; J. LERAY : *La théorie des points fixes et ses applications en Analyse* ; L. SCHWARTZ : *Les distributions et leurs principales applications*.

Nous avons assisté principalement aux travaux de la section VII : Histoire et Pédagogie des Mathématiques, et nous avons constaté le désir unanime de voir se reconstituer la Commission internationale de l'Enseignement mathématique dont les travaux ont été rapportés autrefois dans ce *Bulletin* (1).

Au cours d'une des séances de la section VII, l'un des orateurs, M. W. BETZ, Rochester (N.Y.), présentant une communication : « Mathematics for the Million, or for the few ? » (ce que nous traduisons par les « Mathématiques pour la masse ou pour une élite ? »), après avoir fait part des diverses méthodes envisagées en Amérique pour l'établissement de programmes de Mathématiques répondant aux divers besoins des usagers et après avoir souligné le problème ardu auquel il faut faire face outre-Atlantique, à savoir l'admission de tous les enfants à toutes les études, a déposé sur le Bureau de la Section la motion suivante :

« Attendu que le travail fait par la Commission internationale de l'Enseignement mathématique remontant au quatrième Congrès international des Mathématiciens, tenu à Rome (Italie) en 1908, a donné pour la première fois une large image des plans d'enseignement des Mathématiques des nations principales ;

Attendu que reste inachevée une tâche encore plus lourde, à savoir l'entreprise d'une étude scientifique, et sur laquelle on puisse faire fond, du rôle des Mathématiques dans le monde moderne, à la fois du point de vue de la masse et de celui de l'élite ;

Attendu que le Conseil national des Professeurs de Mathématiques, dans sa récente réunion (21-23 août 1950), à l'Université du Wisconsin, a demandé instamment que cette tâche inachevée soit portée à l'attention de la section VII du présent Congrès, et aussi de l'Union Mathématique internationale,

nous émettons les vœux suivants :

1° que la section VII du présent Congrès donne son approbation sans réserve à l'idée qu'une telle étude doit être entreprise ;

2° qu'elle veuille bien faire appel à l'Union Mathématique internationale pour mettre en œuvre ce programme en reconduisant et intensifiant l'action de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, en aidant cette Commission à explorer la signification des Mathématiques dans toutes les démarches de la vie et à diffuser dans le monde ses résultats comme base

(1) Voir en particulier le compte rendu du neuvième Congrès, par M. DESFORGE (N° 77).

à l'établissement de plans d'enseignement des Mathématiques ayant plus d'autorité et plus d'attrait. »

Bien que non pourvu d'une mission officielle, nous avons cru de notre devoir de donner le plein accord de l'Enseignement français à cette motion qui fut votée à l'unanimité.

Notre séjour aux Etats-Unis ne s'est pas borné à la participation au onzième Congrès et nous avons profité de notre présence sur le sol américain pour prendre de larges contacts avec nos collègues d'outre-Atlantique. Il nous a été donné d'assister pendant les jours qui ont précédé le Congrès à un Institut pour professeurs de Mathématiques de l'Enseignement du Second Degré. Chaque année, pendant les vacances, certaines sections du Conseil national des professeurs de Mathématiques organisent ainsi des réunions dont la durée est en général d'une semaine et pendant lesquelles des conférenciers viennent exposer certains sujets touchant à l'Enseignement. Nous avons ainsi participé à l'Institut organisé par l'Association des Professeurs de Mathématiques de la Nouvelle-Angleterre, à Boston. Plus de deux cents professeurs assistaient aux conférences et participaient aux discussions pédagogiques avec un entrain qui nous a beaucoup impressionné.

Après le Congrès, nous sommes allé à l'Université de Chicago où nous avons eu le plaisir de rencontrer le Chef du département des Mathématiques du Collège de l'Université de Chicago. Cet établissement, qui délivre le degré de bachelier après quatre années d'études, oblige les élèves de toutes les sections à suivre un enseignement fondamental de Mathématiques comportant entre autres, la Géométrie projective, l'Algèbre et la Trigonométrie de nos classes terminales, mais vues d'un autre point de départ, à savoir la théorie des ensembles, traitée de façon élémentaire. Nous avons visité également l'Université Wayne, à Détroit (Michigan), où les études mathématiques sont tournées surtout vers la pratique, cette Université ayant une renommée assez grande en raison de son Ecole d'Ingénieurs. Enfin, à notre retour à New-York, nous avons pu, avant de reprendre le chemin de la France, rencontrer quelques collègues enseignant dans les High-Schools de New-York. Ces échanges de vues nous ont montré la grande différence entre l'enseignement aux U.S.A. et l'enseignement français. Il est certain que la plupart d'entre nous répugneraient à l'usage de ces modèles dynamiques de géométrie ou à ces aides visuelles dont on fait tant de cas là-bas. Mais il nous faut comprendre que le problème de l'enseignement n'est pas le même, que nous ne pouvons mettre en parallèle notre système d'éducation à base de sélection avec le système américain qui pose que, dans toute démocratie, tout enfant a le droit de recevoir la même éducation que son voisin, cette éducation ayant pour but primordial, nous semble-t-il, de le préparer à sa tâche de citoyen.

Nous avons rapporté de ce voyage, qui fut des plus intéressants, tant par les contacts établis que par les renseignements que nous avons pu y glaner, l'impression que notre enseignement peut être envié.

A. MONJALLON, *professeur au Lycée St-Louis.*

DEUXIÈME PARTIE

Erratum

Dans le précédent *Bulletin*, N° 138, p. 103, ligne 18, une erreur regrettable, dont nous nous excusons, nous a fait attribuer à une autre personne l'exposé de M. l'Ingénieur Principal GIRSCHIG.

La ligne 18 doit donc être lue :

*Exposé de M. l'Ingénieur Principal GIRSCHIG,
Ingénieur des Arts et Manufactures*

Histoire des Mathématiques

Les fonctions logarithmique et exponentielle

Les fonctions logarithmique et exponentielle sont, après les fonctions algébriques et les fonctions trigonométriques, les plus anciennement connues et les plus importantes de l'Analyse. Rappelons que Nicolas Oresme utilisait

déjà des exposants fractionnaires, écrivant pour $4^{3/2}$ $\boxed{1 \text{ p } \frac{1}{2}}$ 4 ou $\boxed{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}$ 4,

que Chuquet utilisait les exposants négatifs et nuls, et que Stevin proposait à son tour les exposants fractionnaires, sans toutefois mettre sa proposition en pratique. Ce devait être Wallis qui devait vulgariser l'utilisation des exposants négatifs et fractionnaires. Par ailleurs nombreux furent les mathématiciens à rapprocher les deux progressions arithmétique et géométrique, et l'on peut citer à cet égard Chuquet et Stifel.

Il était cependant réservé à Neper de donner à la fois une théorie solide et une méthode pratique de calcul pour les logarithmes, qu'il allait de surcroît doter de leur nom actuel. Voici sa définition du logarithme : « Le logarithme de tout sinus est un nombre qui exprime avec une grande approximation la ligne, qui augmente également dans des temps égaux pendant que la ligne du sinus total décroît proportionnellement dans ce sinus, les deux mouvements ayant lieu dans le même temps, et au commencement avec la même vitesse. »

Cette définition appelle plusieurs remarques.

Tout d'abord examinons le nom lui-même. Le logarithme est « le nombre du logos », le nombre du « rapport », ou de « la raison ». Il faut se souvenir que, depuis les Grecs, la terminologie de la théorie des rapports, que nous avons abandonnée depuis le XVIII^e siècle environ, est en quelque sorte logarithmique de la nôtre. Si, par exemple, r_1 est le rapport de A à B, et r_2 celui de B à C, le rapport de A à C ne sera pas le produit des deux autres, mais leur somme. Ainsi, lorsque l'on écrit les égalités $\frac{a}{1} = \frac{a^2}{a} = \frac{a^3}{a^2} = \frac{a^4}{a^3}$,

on en tire que les rapports $\frac{a^2}{1}, \frac{a^3}{1}, \frac{a^4}{1}$, sont respectivement le double, le triple et le quadruple du rapport initial $\frac{a}{1}$. Des expressions de ce genre sont encore fréquentes au XVII^e siècle, dans les *Principia*, de Newton, par exemple. Désargues, entre autres, adopte parfois dans ses démonstrations géométriques, un symbolisme et une terminologie, où il ajoute et retranche des raisons, et qui ne sont pour nous compréhensibles que si nous n'oublions pas ce qui précède.

Le logarithme, donc, mesurera la raison, et sera le nombre qui s'ajoutera, se soustraira, se doublera, lorsque la raison s'ajoutera, se soustraira ou se doublera.

D'autre part, la définition de Neper concerne des sinus, car le fondateur de la théorie des logarithmes poursuivait essentiellement un but pratique : faciliter les calculs trigonométriques, plus précisément les calculs astronomiques.

Ensuite, si le logarithme est à proprement parler un nombre, entier ou fractionnaire, c'est que les calculs ne peuvent se faire que sur les nombres, mais il est en réalité la mesure aussi approchée que possible d'une grandeur continue, représentée ici par une ligne.

C'est cette ligne qui est à proprement parler fonction du sinus, le mot fonction, introduit plus tard par Leibniz, étant cependant ici un anachronisme. Cette fonction est de plus introduite sciemment par une équation différentielle, la première que l'on rencontre dans l'histoire des Mathématiques. En appelant R le rayon du cercle, ou sinus total, x le sinus étudié, y son logarithme au sens de Neper, on a $y = 0$ pour $x = R$, et $dy = -\frac{R}{x} dx$.

Ceci nous donne immédiatement la relation entre les premiers logarithmes de Néper, et les logarithmes népériens actuels. (Cette dernière dénomination a été introduite par Lacroix) :

$$y = R \log R/x.$$

Si l'on peut contester à Neper la priorité quant à l'idée même des logarithmes, il est bien certain que ce sens profond de la continuité, qui implique une grande connaissance des Mathématiques antiques, cette idée géniale de l'introduire au moyen du mouvement, et cette définition différentielle du logarithme, sont incontestablement de lui, et en font un des mathématiciens les plus profonds de la fin du XVI^e siècle et du début du XVII^e.

La définition différentielle conduit à la loi fondamentale suivant laquelle des sinus en progression géométrique décroissante, à partir du sinus total R, ont des logarithmes en progression arithmétique croissante à partir de zéro.

De plus, le logarithme de $\frac{AB}{R}$ est la somme des logarithmes de A et de B.

Il est d'ailleurs à remarquer que, très en avance sur son temps, Neper ne craint pas d'utiliser des logarithmes négatifs à une époque où la plupart

des mathématiciens ne veulent employer que des grandeurs positives. Signalons, avant de poursuivre, que, vers l'époque où Neper fondait ainsi la théorie des logarithmes, Galilée, par un raisonnement qu'il ne fit qu'ébaucher, mais fort voisin, rejetait l'hypothèse d'une loi de chute des graves où la vitesse serait proportionnelle à la hauteur de chute en montrant que dans cette hypothèse, la chute serait instantanée. Fermat devait plus tard, à l'intention de Cassendi, mettre en forme ce raisonnement de Galilée.

La théorie de Neper devait conduire son auteur à la construction de tables de logarithmes, but précis qu'il poursuivait. Il y arriva par des extractions successives de racines carrées, abrégées par des remarques judicieuses. Dans ses tables $R = 10^7$.

Ces premiers logarithmes présentant encore quelques difficultés dans les calculs pratiques, Briggs, après avoir pris conseil de Neper lui-même, en calcula de nouveaux, où le logarithme de l'unité était zéro, et celui de 10 était 1. C'est ainsi que Briggs poussa le calcul de nos logarithmes vulgaires, pour les 31.000 premiers entiers, jusqu'à 14 décimales.

Les tables de logarithmes qui répondaient pour les calculateurs, particulièrement les astronomes, à un besoin pressant, eurent un succès immédiat et considérable. Depuis la « *Mirifici logarithmorum canonis Descriptio* », de Neper, parue en 1614, plus de vingt ouvrages sortirent des presses jusqu'en 1631. Parmi ces tables, figure celle d'antilogarithme de Burgi, imprimée à Prague en 1620, mais calculées par son auteur entre 1603 et 1611, donc indépendamment des travaux de Neper.

On trouve, parmi les autres auteurs, John Speidell, Kepler, Briggs, Edmond Gunter, inventeur de la règle à calcul, Vlaac et Denis Henrion, qui, s'il ne fit pas œuvre originale, publia en 1626, le premier travail français sur la question.

Au point de vue théorique cependant, ce n'est qu'un peu plus tard que les logarithmes prirent de l'importance. D'une part, aux environs de 1636, les amis du Père Mersenne, étudiant le plan incliné dans l'hypothèse des forces de pesanteur dirigées vers le centre de la terre, découvrirent la spirale logarithmique, définie par sa propriété différentielle de faire un angle constant avec le rayon vecteur. Descartes, entre autres, s'en occupa. Elle devait être étudiée plus tard d'une manière très approfondie, au moyen des nouveaux calculs infinitésimaux, par Jacques Bernouilli.

D'autre part, Grégoire de St-Vincent, dans son grand ouvrage de 1647, montrait que dans l'hyperbole, à des abscisses en progression géométrique, correspondaient des aires en progression arithmétique, et son disciple, Sarasa, devait, deux ans plus tard, identifier explicitement les aires hyperboliques aux logarithmes. Cette identification, comme toutes les découvertes qui donnent un contenu intuitif à une notion mathématique nouvelle, devait se révéler de la plus grande importance.

La courbe logarithmique elle-même $y = a \log \frac{x}{c}$, fut connue d'Edmond Gunter, et étudiée par Torricelli. En 1659, Van Heureat remarque que la

rectification de la parabole dépend de la quadrature de l'hyperbole, ce que Fermat signale indépendamment en 1660. Dès 1657, Huygens était arrivé au même résultat et utilisait les logarithmes pour carrer l'hyperbole. James Gregory, en 1687, se sert de la quadrature de l'hyperbole par le moyen de deux suites convergentes pour calculer les logarithmes.

Rappelons ici un problème mathématique un peu plus ancien, posé par de Beaune à Mersenne, dans une lettre du 13 novembre 1638. « Etant donné une longueur arbitraire N , et deux droites illimitées GD et FE (1), se coupant en A sous un angle de 45° , on demande de décrire une courbe ABO telle que si, en un quelconque de ses points B , on mène la tangente BL et l'ordonnée BC au diamètre GD , il y ait toujours le même rapport entre BC et LC qu'entre la longueur N et le segment BI intercepté sur l'ordonnée par la droite FE . »

Si, par B , on mène BJ parallèle à GD , et par J , intersection de cette droite avec FE , JK , parallèle à BC et qui coupe la tangente en K , comme $BI = BJ$, on a $BC/LC = KJ/BJ = N/BJ$, d'où $KJ = N$. Le point K décrit donc une parallèle à FE . En prenant pour diamètre ce lieu, et pour ordonnée des parallèles à GD , la sous-tangente TK est constante, égale à $N\sqrt{2}$.

C'est ce que trouva Descartes. Cette propriété caractérise la logarithmique. Descartes, dans ses études sur la question, chercha si la courbe était géométrique, nous dirions algébrique. Il échoua bien entendu dans cette tentative légitime, disons même nécessaire, et donna une construction approchée par points au moyen de suites infinies.

Ainsi le logarithme s'imposait par plusieurs voies à l'attention des mathématiciens du $xvii^e$ siècle. L'apparition du calcul par les séries allait en développer l'étude. Le logarithme de $1+x$ étant proportionnel à l'aire de l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{1+x}$, aire prise entre les abscisses 1 et x , Mer-

cator, puis Newton et Leibniz, entre autres, remplacent $\frac{1}{1+x}$ par

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

et carrant terme à terme à la manière de Wallis pour un polynôme, obtiennent :

$$\text{Log } x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$$

La série, il est vrai, ne converge que pour $x < 1$, mais les artifices de calcul ne tarderont pas à apparaître pour l'utiliser dans d'autres cas.

La méthode du « retour des suites » est utilisée par Newton pour trouver un nombre x connaissant son logarithme l . On posera

$$x = 1 + Bl + Cl^2 + Dl^3 + \dots, \text{ et on portera dans}$$

$$l = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$$

(1) Le lecteur est invité à faire lui-même la figure.

L'identification donnera $B = 1$,

$$C - \frac{B^2}{2} = 0 \text{ ou } C = \frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{6}, \dots$$

$$\text{d'où } x = 1 + l + \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24} + \dots$$

La nouvelle série allait jouer un rôle considérable. La fonction exponentielle était née. En fait, elle était déjà en puissance chez Wallis, qui, dès 1655, ne craignait pas d'envisager des exposants irrationnels, ou même imaginaires. Cependant, ce qui retardait ce nouveau progrès, c'était, entre autres, l'aspect géométrique sous lequel la notion de fonction apparaissait aux géomètres du XVII^e siècle. Le besoin de travailler, non sur des nombres, mais sur des grandeurs continues, les obligeait à utiliser, soit des longueurs, soit le temps et les vitesses. Cette seconde méthode, cependant, employée par Neper et par Newton, n'était pas suffisamment intuitive pour la plupart des géomètres, qui préféraient représenter les phénomènes étudiés par des courbes, ou par des aires. C'est ainsi que Fermat avait une prédilection marquée pour les arcs de courbes, et d'autres mathématiciens, Jean Bernoulli à ses débuts ou L'Hôpital, pour les aires variables. Les logarithmes se représentaient donc, soit au moyen de l'aire d'un segment hyperbolique, soit au moyen de la logarithmique. Mais cette courbe ainsi définie, on n'éprouvait pas le besoin de changer de diamètre de comparaison, d'autant que, suivant les errements de l'époque, on ne prenait qu'un seul axe de coordonnées, ne faisant pas jouer un rôle symétrique aux abscisses et aux ordonnées.

C'est Jean Bernoulli qui, le premier, introduit les fonctions exponentielles d'une façon systématique. Il écrit à Leibniz en 1694 : « On appelle vulgairement courbes géométriques, celles dont la nature est exprimée par une équation de degré déterminé ; mécaniques celles dont l'équation renferme des différentielles. J'appelle intermédiaires ou *parcourantes*, celles dont l'équation est de degré indéterminé, c'est-à-dire, où les lettres indéterminées et constantes s'élèvent à des dimensions indéterminées, et, par suite, parcourent toutes les dimensions possibles. » Il cite, parmi ces courbes, « la logarithmique vulgaire », dont l'équation est $a^x = y$ « une unité étant donnée par quoi x est sous-entendue divisée, de telle sorte qu'elle ne désigne pas une longueur indéterminée, mais un nombre indéterminé ». C'est dans la réponse de Leibniz qu'apparaît le mot actuel de « courbes exponentielles ». Quant au mot même de « fonction », dont le besoin commençait à se faire sentir, il fut d'abord employé dans des sens assez particuliers, par Leibniz, *Acta eruditorum*, de juillet 1694, et par Jacques Bernoulli, *Acta*, octobre 1694. En mai 1698, Jean Bernoulli écrit à Leibniz, au sujet des isopérimètres, et parle de « fonction ». Il veut qu'une fonction de x se représente par X ou par ξ , « pour soulager la mémoire ». Dans sa réponse, Leibniz est enchanté que Bernoulli emploie ce mot dans le même sens que lui. Il propose, lorsqu'il y a plusieurs fonctions de x , de les distinguer par un indice : x^1 , x^2 . S'il y a deux variables, on écrira x , y^1 . Une fonction rationnelle se désignera par x^{r1} , une fonction rationnelle entière par x^{r1} , etc...

En 1718, Jean Bernouilli précisera la définition : « On appelle ici fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit, de cette grandeur variable et de constantes » (*Histoire de l'Académie des Sciences*, pour 1718). Il introduit à la même époque la notation Φx , que ses successeurs ont remplacée généralement par fx , puis $f(x)$.

Jusque-là, les développements en série de l'exponentielle et du logarithme ne sont faits que par le moyen du calcul intégral. Halley introduit une autre méthode, vers 1695. Le Père Reyneau la reproduit, tome II du *Calcul des grandeurs*, 1736, et Euler procède, dans son *Introduction*, 1748, d'une façon analogue que voici : Soit $a > 1$, et ω un nombre infiniment petit, « c'est-à-dire une fraction si petite, qu'elle soit tout juste non égale à zéro ». Alors $a^\omega = 1 + \Psi$, Ψ étant aussi infiniment petit. On a pour Ψ/ω un rapport qui dépend de a .

Posons $\Psi = k\omega$, $a^\omega = 1 + k\omega$, $\omega = \log(1 + k\omega)$. Le binôme de Newton donne

$$a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1} k\omega + \frac{i(i-1)}{1.2} k^2 \omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} k^3 \omega^3 + \dots$$

Posons $i = z/\omega$, z étant un nombre donné fini ; ω , infiniment petit s'écrit z/i , et i est infiniment grand. D'où

$$a^z = 1 + kz + \frac{(i-1)}{1.2i} k^2 z^2 + \frac{(i-1)(i-2)}{1.2i.3i} k^3 z^3 + \dots$$

Comme i est infiniment grand, les expressions $\frac{i-1}{i}$, $\frac{i-2}{i}$, etc... sont égales à 1 et

$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2 z^2}{1.2} + \frac{k^3 z^3}{1.2.3} + \dots$$

Si maintenant a est pris pour base des logarithmes, comme

$$a^\omega = 1 + k\omega, \quad \omega = \log(1 + k\omega) \quad \text{et} \quad i\omega = \log(1 + k\omega)^i.$$

Posons $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, alors $(1 + k\omega) = (1 + x)^{1/i}$, ou

$$\log(1 + x) = \frac{1}{k}(1 + x)^{1/i} - \frac{i}{k}.$$

Développement suivant formule de Newton, et remarquant que puisque i est infini

$$\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}, \quad \frac{2i-1}{3i} = 2/3, \text{ etc...}, \text{ il vient}$$

$$\log(1 + x) = \frac{1}{k} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

$$\text{En prenant } k=1, \text{ et en posant } e = 1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots$$

On trouve en particulier

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \dots \quad \text{Log}(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

C'est Euler lui-même qui a introduit le symbole e pour désigner la base des logarithmes népériens.

A la suite des développements précédents, on le voit tranquillement affirmer, en trois lignes, et comme conséquence, que $e^z = \left(1 + \frac{z}{i}\right)^i$, i étant infiniment grand, et que $\log(1+x) = i \left[(1+x)^{1/i} - 1 \right]$.

C'est en 1743 que, pour la première fois, il avait dans les Mémoires de Berlin, parlé de cette limite fameuse de $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour $n \rightarrow \infty$. Le cas particulier de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ avait déjà été donné par Daniel Bernouilli en 1728. On

peut remarquer, au passage que ce fait analytique était en quelque sorte impliqué dans les procédés même de calcul des logarithmes par Neper et Briggs; et son lent dégagement dans la conscience des mathématiciens (il a duré plus d'un siècle) est fort instructif. Remarquons aussi que c'est avec Euler que se trouve vraiment précisée la nouvelle définition des logarithmes : a étant la base, et n le nombre, on appelle logarithme de n le nombre x tel que $a^x = n$. La fonction exponentielle, dernière venue, prend désormais le pas sur la fonction logarithmique qui n'apparaît plus que comme fonction inverse.

L'importance de la limite de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se manifesta surtout à partir du moment où Cauchy voulut fonder sur des bases solides le calcul des dérivées, et fit jouer à cette limite un rôle fondamental. Liouville montra alors combien la plupart des démonstrations, dont on faisait usage pour montrer qu'elle était égale au nombre e , étaient insuffisantes. A ce sujet, voici une note amusante de Gergonne, au tome IV de ses *Annales*, 1813-1814. Il polémique avec Servois, au sujet de la représentation géométrique des imaginaires par Argand qu'il soutient et que Servois attaque. Il déclare incidemment : « Lui observant (à Servois), il n'y a pas longtemps, que l'équation évidente

$$\sqrt[m]{1+m} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1-m}{1.2} + \frac{(1-m)(1-2m)}{1.2.3} + \dots$$

devenait, dans le cas où $m=0$, $\sqrt[0]{1} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \dots$,

il paraissait s'ensuivre que $\sqrt[0]{1}$ qui, en général, se présente sous la forme doublement indéterminée $\left(\frac{0}{0}\right)_0^0$, est cependant égal à e ; il parut ne pas goûter ce raisonnement, précisément, pour les raisons que je viens d'expliquer. »

Remontant un peu dans le temps, nous allons examiner une controverse sur les logarithmes des nombres négatifs qui joua un rôle essentiel dans la naissance des fonctions de la variable complexe. En mars 1712, au sujet d'une polémique entre Varignon et Guido Grandi, Leibniz écrit à Jean Bernouilli : « Si l'on peut dire que -1 et des expressions semblables signi-

fient inférieur à zéro, toutefois on ne peut avoir que des rapports imaginaires lorsque l'antécédent ou le conséquent est une quantité plus petite que zéro. Ainsi le rapport de -1 à 1 ou de 1 à -1 est imaginaire.

Ce que je prouve entre autres, parce que à ce rapport on a un rapport semblable, ne correspond aucun logarithme. »

Bernouilli est d'un avis contraire. Il constate que la différentielle de $\log x$ est $\frac{dx}{x}$. Or $\frac{-dx}{-x} = \frac{dx}{x}$, donc deux nombres opposés ont le même logarithme et la logarithmique a deux branches symétriques par rapport à son asymptote. En particulier $\log -1 = 0$. Attention ! répond Leibniz, si -2 a un logarithme le nombre imaginaire $\sqrt{-2}$ aura le logarithme moitié, un nombre impossible aura donc un logarithme, ce qui est absurde. La polémique dure jusqu'en juillet 1713, sans aboutir, si ce n'est à cette remarque qu'il n'y a pas de passage possible des logarithmes des nombres positifs à ceux des nombres négatifs, dans l'hypothèse la plus favorable à Bernouilli.

A la lumière des Mathématiques du XIX^e siècle, nous nous apercevons maintenant que Leibniz était plus près de la vérité que son contradicteur. Le XVIII^e siècle n'y voyait pas si clair. D'Alembert et Euler échangèrent à ce sujet une correspondance entre 1747 et 1748, le premier soutenant Bernouilli, le second Leibniz. Les remarques d'Euler furent rendues publiques les premières en 1749, celles de d'Alembert ne paraissant dans ses opuscules qu'en 1761. Il semble qu'il y ait une certaine contradiction entre l'attitude de d'Alembert sur ce sujet et sa position prise dès 1746 dans son mémoire sur la Cause Générale des Vents, où il s'efforce à démontrer par exemple que $(a + b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ est toujours de la forme $A + B\sqrt{-1}$.

En l'occurrence Euler adopte une attitude supérieure, confirmée par le développement ultérieur des Mathématiques : tout nombre positif a une infinité de logarithmes $A + 2k\pi\sqrt{-1}$, un d'eux étant réel pour $k=0$; tout nombre négatif a une infinité de logarithmes, tous imaginaires

$$A + (2k + 1)\pi\sqrt{-1}.$$

Nous donnons actuellement, dans le domaine réel, pour intégrale de $\frac{dx}{x}$ l'expression $\text{Lg } |X| + C$. C'est Mascheroni, célèbre surtout par sa Géométrie du compas, qui, dans ses recherches sur le logarithme intégral $\frac{dx}{\log x}$, a recommandé cette façon de procéder.

La découverte d'Euler signalée ci-dessus, lui fut inspirée par sa formule $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sin x \sqrt{-1}$.

L'évolution, pleine de détours, de la notion de logarithme, conduit à des réflexions fort voisines de celles de Gergonne dans ses discussions avec Servois au sujet d'Argand : « Il serait sans doute fort à désirer que l'esprit humain procédât constamment, comme on le fait dans les traités *ex pro-*

fesso et sur les bancs des écoles ; mais malheureusement cela n'arrive presque jamais. M. Servois, qui tient ici un langage à peu près pareil à celui de Viviani, dans des circonstances assez semblables à celles-ci, a-t-il donc oublié que ce n'est qu'après plus d'un siècle de méditations et d'essais infructueux qu'on est enfin parvenu à asseoir le calcul dit infinitésimal sur des bases solides ? Et encore trouve-t-on aujourd'hui (1814) des gens qui prétendent qu'on n'y a pas complètement réussi. Où en serions-nous pourtant si l'on avait exigé des premiers inventeurs de ce calcul qu'ils démontrassent rigoureusement leurs méthodes avant d'en faire des applications ? Il en a été exactement de même à l'égard des quantités négatives isolées, et il en sera toujours ainsi de toutes les théories ; l'homme les aperçoit par une sorte d'instinct, bien longtemps avant d'être en état de les démontrer en rigueur. »

Jean ITARD.

P.-S. — Une erreur de plume me fait écrire, dans le *Bulletin* de novembre, que le père Reyneau succéda, à Angers, au père Pardies. C'est au père Prestet, oratorien comme Reyneau, qu'il avait succédé. Prestet, ami de Malebranche, mourut en 1690. Pardies, de la Compagnie de Jésus, enseigna à Louis-le-Grand. Il mourut en 1673.

Je me permets de signaler l'apparition d'une importante *Histoire de la Mécanique*, par René DUGAS, chez Dunod, 649 pages. J. I.

Notes diverses

Sur les points d'inflexion

Dans la classe de Mathématiques Élémentaires, ces points intéressent les élèves par leur nouveauté et aussi parce qu'on les voit sur les courbes. C'est pourquoi, après l'étude du trinôme bicarré et du polynôme du troisième degré pour lesquels l'équation $y'' = 0$ donne ces points sans difficulté, les élèves ne manquent pas de soulever la question des points d'inflexion pour la fonction rationnelle du deuxième degré $y = \frac{u}{v}$, u et v étant deux trinômes du second degré. Les remarques suivantes peuvent alors faire l'objet d'un exercice.

On calcule aisément :

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{v^2(vu'' - uv'') - 2(vu' - uv')vv'}{v^4},$$

et les abscisses des points d'inflexion sont les racines du polynôme du troisième degré : (1)

$$z = v(vu'' - uv'') - 2v'(vu' - uv') = v(vu'' - uv'') - 2v'(vu' - uv').$$

Une étude rapide de sa variation permet de connaître le nombre de ses

(1) En laissant de côté les cas particuliers.

racines et leur valeur approximative. Or, si on calcule à cet effet sa dérivée z' , on trouve, en notant que u'' et v'' sont des constantes :

$$z' = v(v'u'' - u'v'') - v'(vu'' - uv'') - 2v''(vu' - uv'), \text{ ou simplement : } z' = -3v''(vu' - uv').$$

En supposant que v soit un véritable trinôme du second degré, $v'' \neq 0$. Donc $y' = 0$ et $z' = 0$ ont les mêmes racines : le maximum et le minimum des fonctions y et z existent simultanément et ont les mêmes abscisses :

D'où les conséquences suivantes :

1° Si y' ne s'annule pas, la fonction z n'a qu'une racine : lorsque la fonction y varie toujours dans le même sens, elle a un point d'inflexion et un seul.

2° Si y' s'annule pour deux valeurs de x , il peut y avoir un ou trois points d'inflexion. Or, la fonction z a elle-même toujours un point d'inflexion donné par $z' = 0$ ou $(vu' - uv')' = 0$, et dont l'abscisse est par conséquent la demi-somme des abscisses du maximum et du minimum de la fonction y . Donc : lorsque la fonction y a un maximum et un minimum, elle a un ou trois points d'inflexion :

Si elle en a un seul, il n'est pas situé entre le maximum et le minimum. Si elle en a trois, un seul est situé entre le maximum et le minimum.

R. ROSTOLLAND,
professeur agrégé
au Lycée de St-Germain-en-Laye.

Fonctions et Transformations

Il peut paraître intéressant, dans une classe de Mathématiques Élémentaires, d'établir un parallèle entre ces deux notions, soit à titre de révision, soit en cours de route.

Fonctions

1) A un ensemble de valeurs de x , on fait correspondre, par exemple par un calcul, un ensemble de valeurs de y . Notation $y = f(x)$.

2) Une fonction peut n'être pas définie pour certaines valeurs isolées de x :

$$\text{Ex. : } y = \frac{1}{x} \text{ pour } x = 0$$

3) Une fonction peut n'être définie que dans certains intervalles :

Ex. : $y = \sqrt{x^2 - 1}$, y n'existe pas si x est à l'intérieur de l'intervalle borné par -1 et $+1$.

Transformations

1) A un ensemble de positions de M , on fait correspondre, par exemple par une construction, un ensemble de positions de M' . Notation $M' = T(M)$.

2) Une transformation peut n'être pas définie pour certaines positions isolées de M :

Ex. : l'inversion (O, μ) pour M en O .

3) Une transformation peut n'être définie que dans certains domaines :

Ex. : M' est l'intersection du diamètre OM d'un cercle de centre O avec la corde des contacts des tangentes issues de M . M' n'existe pas si

4) On peut définir un nombre variable x qui a pour limite un nombre fixe a : $|x - a|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut. Il peut arriver que y ait une limite l quand x a pour limite a . Si $l = f(a)$, on dit que la fonction est *continue* pour a .

M est à l'intérieur du *domaine borné* par le cercle.

4) On peut définir un point variable M qui a pour limite un point fixe A : la distance AM peut être rendue aussi petite qu'on veut. Il peut arriver que M' ait une limite L' quand M a pour limite A .

Si $L' = T(A)$, on dit que la transformation est *continue* pour A .

On poursuivra sans peine en examinant les points à l'infini, les points doubles, les figures invariantes, la transformation identique, etc...

La notion de dérivée soulève évidemment des difficultés. De même que x prend un accroissement Δx en passant de x_1 à x_2 , on pourra dire que si M passe de M_1 en M_2 le vecteur $\vec{OM}$ prend l'accroissement

$$\vec{OM}_2 - \vec{OM}_1 = \vec{M_1M_2} = \vec{\Delta OM} \text{ ou } \vec{\Delta M}.$$

Il faudrait ensuite définir et étudier le rapport des accroissements correspondants $\vec{\Delta M}$ et $\vec{\Delta M'}$ analogues aux accroissements Δx et Δy . Ce sera simple si les vecteurs $\vec{\Delta M}$ et $\vec{\Delta M'}$ sont constamment parallèles, et l'on retrouvera la translation et l'homothétie ; ou si l'on a constamment, en géométrie plane, $(\vec{\Delta M}, \vec{\Delta M'}) = \alpha$, $\frac{AM'}{AM} = k$, α et k étant constants, et l'on retrouvera

la similitude avec les déplacements et l'homothétie comme cas particuliers. Ce sera simple encore si M et M' sont en correspondance sur deux droites fixes, et l'on pourra noter qu'une fonction $y = f(x)$ établit une correspondance de ce genre entre les points d'abscisses x et y sur les axes de coordonnées. Sans aller plus loin, les élèves comprendront l'intérêt de la question. Ne peut-on espérer que certains d'entre eux seront moins surpris plus tard lorsqu'ils rencontreront les nombres complexes et les fonctions analytiques ?

R. ROSTOLLAND,
professeur agrégé
au Lycée de St-Germain-en-Laye.

Polaire d'un point par rapport à une droite

Étant donné un segment AB dont le milieu M est sur une droite Δ , le cercle de diamètre AB est orthogonal à Δ . A et B sont donc des points conjugués par rapport à Δ .

Lorsque, A étant fixe, M décrit Δ , le lieu de B est par définition la polaire de A par rapport à Δ . Il en résulte que deux droites parallèles équidistantes d'une droite Δ sont conjuguées par rapport à Δ .

Application à l'inversion. — On sait que dans une inversion de pôle A ,

qui transforme Δ en un cercle Γ , le centre de Γ est l'inverse du symétrique de A par rapport à Δ . Ce centre est donc l'inverse du pied de la polaire de A par rapport à Δ .

On obtient ainsi la même conclusion que pour la position du centre du cercle inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle.

E. CARALP (*Montaigne*).

Sur une propriété de l'hyperbole et quelques conséquences

Soit une hyperbole d'asymptotes $x'ox$ et $y'oy$. Si l'on mène d'un point I de son plan, une droite variable coupant l'hyperbole en A et B et les asymptotes en C et D on a :

$$\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \mu.$$

μ étant une constante dépendant de la position de I et de l'hyperbole.

Soient α et β les projections de A sur $x'ox$ et $y'oy$, γ et δ celles de I, X_1 et Y_1 les coordonnées de I. On a : $\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta} = \frac{c^2}{4}$, c étant la distance focale de l'hyperbole.

$$\text{Or : } \frac{\overline{CA}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{\alpha A}}{\overline{I\gamma}} = \frac{\overline{O\beta}}{\overline{O\delta}} \quad (1), \quad \frac{\overline{AD}}{\overline{ID}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\delta I}} = \frac{\overline{O\alpha}}{\overline{O\gamma}} \quad (2).$$

Par multiplication, membre à membre, de (1) et (2) nous obtenons :

$$\frac{\overline{CA} \cdot \overline{AD}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \frac{\overline{O\alpha} \cdot \overline{O\beta}}{\overline{O\delta} \cdot \overline{O\gamma}} = \frac{\frac{c^2}{4}}{X_1 \cdot Y_1} = \lambda \quad (\text{Constante}).$$

Si M est le milieu commun de AB et DC, $\overline{CA} \cdot \overline{AD} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \overline{MC}^2 - \overline{MA}^2 = (\overline{IM}^2 - \overline{MA}^2) - (\overline{IM}^2 - \overline{IC}^2) = \overline{IA} \cdot \overline{IB} - \overline{IC} \cdot \overline{ID}$.

$$\text{Donc : } \frac{\overline{CA} \cdot \overline{AD}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB} - \overline{IC} \cdot \overline{ID}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \lambda.$$

$$\boxed{\frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \lambda + 1 = \frac{X_1 Y_1 - \frac{c^2}{4}}{X_1 Y_1} = \mu}$$

Conséquence I : Polaire de I par rapport à l'hyperbole.

Soit J le conjugué de I par rapport à A et B, et K son conjugué par rapport à C et D :

$$\frac{2}{\overline{IK}} = \frac{1}{\overline{IC}} + \frac{1}{\overline{ID}} = \frac{\overline{IC} + \overline{ID}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \frac{2 \overline{IM}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} \quad (1)$$

$$\frac{2}{\overline{IJ}} = \frac{1}{\overline{IA}} + \frac{1}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IA} + \overline{IB}}{\overline{IA} \cdot \overline{IB}} = \frac{2 \overline{IM}}{\overline{IA} \cdot \overline{IB}} \quad (2)$$

En divisant (1) et (2), membre à membre, on obtient :

$$\frac{\overline{IJ}}{\overline{IK}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IB}}{\overline{IC} \cdot \overline{ID}} = \mu.$$

Le lieu de K est la polaire Δ de I par rapport à $x'ox$ et $y'oy$. Le lieu de J appartient donc à la droite déduite de Δ par l'homothétie (I, μ).

Conséquence II : Si une hyperbole équilatère passe par trois points A, B, C, elle passe aussi par l'orthocentre D du triangle ABC.

Soit E le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, et D son second point d'intersection avec l'hyperbole, AB coupe les asymptotes $x'ox$ et $y'oy$ en B' et A', et CE les coupe en D' et C'.

OB' et C'E sont hauteurs du triangle A'B'C', D' en est l'orthocentre.

Donc : $\overline{ED'} \cdot \overline{EC'} = -\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}$.

Mais d'après le théorème démontré au début :

$$\frac{\overline{ED} \cdot \overline{EC}}{\overline{ED'} \cdot \overline{EC'}} = \frac{\overline{EA} \cdot \overline{EB}}{\overline{EA'} \cdot \overline{EB'}} = \mu.$$

Il en résulte que : $\overline{ED} \cdot \overline{EC} = -\overline{EA} \cdot \overline{EB}$, ce qui montre que D est l'orthocentre du triangle ABC.

Diverses propriétés connues pourraient être tirées de ce théorème. Par exemple : les cordes communes à une hyperbole et à un cercle sont deux à deux également inclinées sur les axes de l'hyperbole.

C. NOTARI (Tunis).

Bibliographie

E. BOREL : *Eléments de la théorie des ensembles*. (Bibliothèque d'éducation par la science ; éditions Albin Michel).

C'est un fait que, depuis vingt-cinq ans, le niveau des cours de Licence s'est considérablement élevé. Il suffit de comparer le livre, autrefois classique de Goursat, et celui, aujourd'hui classique de M. Valiron, pour s'en rendre compte. Par exemple, le théorème de Jordan, sur les conditions nécessaires, et suffisantes pour qu'une courbe soit rectifiable, n'est indiqué par Goursat qu'en note, en bas de page, en petit texte, alors qu'il fait partie intégrante du cours de M. Valiron, et qu'il a été demandé à l'écrit du Certificat de Calcul différentiel et intégral en juin 1950 à Paris. Egalement l'intégrale de Lebesgue doit être connue maintenant des candidats à la Licence.

Il ne nous appartient pas de savoir si cette élévation du niveau de la Licence prépare à leur tâche, mieux qu'autrefois, les futurs maîtres qui enseigneront dans les Lycées et Collèges les Mathématiques au niveau du Baccalauréat, mais il est incontestable que les maîtres qui ont 25 ans d'an-

cienneté et qui ont conservé le souci de savoir « ce qui se fait », ou « ce qui s'enseigne » éprouvent le besoin de compléter les connaissances qui leur avaient été enseignées autrefois.

Malheureusement, les livres qu'ils peuvent consulter sont rares, car les professeurs de l'Enseignement Supérieur, pris par les nécessités de la Recherche, n'ont pas toujours le temps de penser à leurs collègues de l'Enseignement du Second Degré.

Nous devons donc nous réjouir lorsque paraît un livre comme celui de M. E. BOREL, et qui a précisément pour but de mettre à la portée de tous ceux qui ont le goût de la Science, une des théories mathématiques qui a fait des progrès considérables au cours du demi-siècle, la théorie des ensembles.

« Il nous apparaît, dit l'auteur, que les éléments de la théorie des ensembles sont maintenant devenus classiques et doivent faire partie de la culture générale au même titre que les éléments de l'Algèbre, du Calcul différentiel, ou de la Mécanique... Ceux de nos lecteurs, dont la culture mathématique est assez étendue se trouveront, de leur côté, préparés à l'étude des progrès les plus récents de la théorie des ensembles et de la théorie des fonctions. »

M. E. BOREL étudie successivement les ensembles dénombrables, les ensembles continus, le choix et les probabilités dans les ensembles, les ensembles de fractions décimales illimitées, la mesure des ensembles (au sens de Jordan, de Borel, de Lebesgue), les ensembles de mesure nulle, l'axiome du choix.

Diverses notes, en particulier sur les fractions continues et sur les systèmes de numération à base variable, complètent ce livre dont la lecture n'est pas toujours immédiate (c'est un vrai livre de Mathématiques, ce n'est pas un ouvrage de vulgarisation), mais se révèle toujours attachante et instructive.

G. CAGNAC.

A. CHARRUEAU : *Sur des congruences de droites ou de courbes et sur une transformation de contact liée à ces congruences.* (Gauthier-Villars, Mémorial des Sciences mathématiques).

J.-P. FLAD : *Les machines à calculer de bureau et leur adaptation au calcul scientifique.* (Conférences faites au groupe de Calcul numérique de l'Institut H.-Poincaré).

M. KY-FAN : *Les fonctions définies-positives et les fonctions complètement monotones.* (Gauthier-Villars, Mémorial des Sciences mathématiques).

T. LÉVI-CIVITA : *Le problème des n corps en relativité générale.* (Gauthier-Villars, Mémorial des Sciences mathématiques).

H. BILLOT et A. POLLET : *Cours de géométrie plane* (1^{er} et 2^e livres) à l'usage des Ecoles nationales professionnelles et des Collèges techniques. (Dunod).

H. MAS et J. AUTHIER : *Géométrie dans l'espace* (classe de Première CM). (Editions Langlois Paris).

M. FRÉCHET : *Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités* ; premier livre : Généralités sur les probabilités. Eléments aléatoires. (Gauthier-Villars, 2^e édition).

L'ouvrage fait partie du grand « Traité du calcul des probabilités et de ses applications », publié par M. Emile BOREL. Le tome I du Traité est consacré aux principes de la théorie des probabilités ; son troisième fascicule est consacré aux recherches théoriques modernes, et l'ouvrage actuel de M. FRÉCHET constitue la première partie de ce fascicule. Il rassemble et complète les résultats obtenus dans les dernières années, et il est surtout consacré à la théorie des variables aléatoires, qui a renouvelé la théorie classique des probabilités.

Souhaitons, avec l'auteur, que ce livre soit l'annonce d'une nouvelle édition de l'ensemble du Traité, le premier qui puisse être comparé à l'indispensable Traité analytique de Laplace.

M. FRÉCHET : *Leçons de Statistique mathématique* (2^e cahier). — Recueil d'exercices de calcul des probabilités. (Centre de Documentation universitaire).

M. FRÉCHET : *Leçons de Statistique mathématique* (4^e cahier). — Les ensembles statistiques renouvelés et le remplacement industriel (cas d'une durée d'usure limitée). (Centre de Documentation universitaire).

Les leçons professées au Caire par M. FRÉCHET en 1945-46, sur le même sujet, avaient été publiées en anglais. Le présent ouvrage en constitue l'édition française, considérablement augmentée ; il reproduit des cours de l'Université de Bruxelles et de l'Institut H.-Poincaré.

Il s'agit de l'étude statistique d'ensembles dont le nombre d'éléments varie avec le temps, par introduction d'éléments nouveaux et élimination d'éléments anciens. C'est le cas, par exemple, de la population d'un pays, qui augmente par les naissances et l'immigration, et diminue par les décès et l'émigration.

Le problème n'intéresse pas seulement les démographies. Il se pose aussi pour les actuaires (ensemble des polices garanties par une Compagnie d'assurances) et les ingénieurs (ensemble des machines-outils employées dans une entreprise).

L'étude des ensembles « renouvelés » est faite d'abord par les méthodes mathématiques les plus simples, puis à l'aide des séries à termes complexes.

N. W. Mc LACHLAN et P. HUMBERT : *Formulaire pour le calcul symbolique*. (Mémorial des Sciences mathématiques, Gauthier-Villars).

N. W. Mc LACHLAN, P. HUMBERT et L. POLI : *Supplément au formulaire pour le calcul symbolique*. (Mémorial des Sciences mathématiques). — P. Humbert avait déjà consacré en 1934 le fascicule 147 des « Actualités scientifiques et industrielles » (Hermann) au Calcul symbolique, que son

inventeur, Oliver Heaviside, appelait « Operational calculus ». Heaviside l'avait utilisé pour la première fois dans l'étude des circuits électriques.

En 1943, dans leur ouvrage sur « Le Calcul symbolique et quelques applications à la physique et à l'électricité » (« Actualités scientifiques et industrielles », 1947), R. Potier et I. Laplume constataient que le calcul symbolique est très mal connu en France, et jamais utilisé par les ingénieurs. C'est une curiosité mathématique, à l'égard de laquelle la défiance s'explique par la matière tout empirique dont l'utilisait Heaviside.

Cependant, la méthode, grâce en particulier aux travaux de J. Carson et P. Lévy, repose maintenant sur une base inattaquable. Dans l'ouvrage actuel, P. Humber signale que le calcul symbolique est un instrument de plus en plus utilisé par les physiciens et même les mathématiciens.

Le formulaire est dû en grande partie aux travaux de l'ingénieur et mathématicien britannique McLachlan, qui n'a pu faire éditer ses résultats en Grande-Bretagne. Avec le complément, le « Dictionnaire opératoire » contient plus de 1.100 formules symboliques.

A. HUISMAN.

Livres reçus

MONGE et GUINCHAM : *La Classe de Mathématiques*, Arithmétique, Algèbre, Géométrie (Classe de Cinquième). Librairie classique Eugène Belin, 8, rue Férou, Paris, VI°.

MAS et AUTHIER : *Géométrie dans l'Espace* (Classe de Première CM). Editions Langlois, 17, avenue de l'Opéra, Paris, I°.

DOLLON et SIROS : *Algèbre* (Classes de Seconde C et Moderne). Un vol. de 238 pages avec figures et problèmes, cartonné : 360 francs. Masson et C°, éditeurs, 120, boulevard St-Germain, Paris, VI°.

Informations

L'Ecole Normale Internationale (Directeur D^r GATTEGNO) organise pour Pâques prochaines une rencontre entre professeurs de Mathématiques et psychologues.

Sujet : La géométrie et l'adolescent.

Participants prévus : Belges, Anglais, Allemands, Hollandais, Suisses, Français. Une trentaine de participants étant prévus, il serait désirable que quatre ou cinq Français soient parmi eux.

Date : 19-29 mars. — *Lieu* : Athénée royal (Lycée) de Keerbogen (Belgique), à 30 km. de Bruxelles.

Prix : 1.300 francs belges (logement à l'Athénée, repas, excursions).

Les collègues qui pourraient participer à la rencontre, soit par leur présence, soit par l'envoi de rapports ou documents doivent prendre contact sans tarder avec le Dr GATTEGNO, *Bureau International, 225, High Street, Hampton Hill, Middlesex (Angleterre)*, ou avec Mlle FÉLIX, *professeur au Lycée La Fontaine, Paris, 16°*.

Invitation à tous : Le jeudi 1^{er} mars, à 14 h. 45, au Lycée Henri-IV, 23, rue Clovis, Paris, V^e : Entretien avec M. G. BOULIGAND :

L'accès aux principes de la Géométrie euclidienne.

Le Gérant : L. PARAZINES.

Cahors. Imp. A. Coueslant (*personnel intéressé*). 81.275 — 1951
C.O.A.L. 31.2330. — Dépôt légal : 1-1951

FERNAND NATHAN

LEBOSSÉ et HÉMERY

MATHÉMATIQUES

ENSEIGNEMENT

DES LYCÉES ET COLLÈGES

ENSEIGNEMENT DES

COURS COMPLÉMENTAIRES

Classe de 6^e gris 230. »

Cl. de 5^e gris 265. »

Cl. de 4^e — 295. »

Cl. de 3^e — 325. »

Algèbre, cl. de 2^e gris. 290. »

Géométrie plane,

classe de 2^e gris 365. »

Algèbre et Trigonomé-

trie, classe de 1^{re} gris 375. »

Géométrie dans l'espa-

ce, classe de 1^{re} gris. 325. »

Classe de 5^e brique ... 280. »

Corrigés cl. de 5^e ... 120. »

Classe de 4^e brique ... 310. »

Corrigés cl. de 4^e ... 190. »

Classe de 3^e brique ... 330. »

Corrigés cl. de 3^e ... 190. »

~~~~~  
Envoi de spécimens

sur simple demande

**18, Rue Monsieur-le-Prince, PARIS**

# LIBRAIRIE CLASSIQUE EUGÈNE BELIN

8, Rue Férou, PARIS-VI

## NOUVEAUTÉ :

# ALGÈBRE

**Classe de Mathématiques élémentaires**

PAR

**G. LECOMTE**

*Professeur agrégé au Lycée Saint-Louis*

Un volume (14,5×22,5) de 364 pages, broché .. .. . 425. »

## PRÉCÈDEMENT PARUS :

**Géométrie. Classe de Mathématiques élémentaires, par G. LECOMTE 260. »**

**Arithmétique. Cl. de Mathématiques élément. par G. LECOMTE 270. »**

**Géométrie descriptive, par H. LÉVY, professeur au Lycée Chaptal 160. »**

**Trigonométrie, par H. LÉVY .. .. . 250. »**

# LIBRAIRIE A. HATIER

8, Rue d'Assas - Paris (6<sup>e</sup>)

***Cosmographie*, par André DANJON**

classe de Mathématiques .. .. . 380 fr.

classes de Philosophie et Sciences exp. .. .. 260 fr.

***La question de cours à la 1<sup>re</sup> partie du Baccalauréat*,**

par Serge MINOIS et René FAVRELLE .. .. 100 fr.

***Leçons de Mathématiques*, classe de Philosophie,**

par Serge MINOIS et René FAVRELLE .. .. 120 fr.

***L'entraînement méthodique au calcul algébrique*,**

par G. GLAESER .. .. . 80 fr.

***Les sujets de problèmes de Mathématiques proposés au Baccalauréat*** (juin et septembre). Deux fascicules 45 fr. chaque

***Les Humanités scientifiques*, revue mensuelle pour les classes de 1<sup>re</sup> et de Mathématiques de 48 pages, dirigée par S. MINOIS et R. TOUREN; l'abonnement annuel .. .. . 450 fr.**

C.C. Paris 5507-91

— SPÉCIMEN GRATUIT SUR DEMANDE —

**LIBRAIRIE ANDRÉ DESVIGNE — 17, rue Mulet, LYON****MATHÉMATIQUES***Ouvrages conformes aux nouveaux programmes***NOUVEAUTES :****LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Sixième.**

L'ouvrage, conforme au programme de 6<sup>e</sup>, est divisé en 26 chapitres, permettant ainsi une répartition facile du travail à raison d'une leçon par semaine en moyenne. Un résumé rappelant les principaux résultats termine la plupart des chapitres.

En plus de la mise au point des méthodes de calcul et du rappel des bases du système métrique déjà étudié antérieurement, les auteurs se sont efforcés de faciliter aux élèves l'acquisition des méthodes de résolution des problèmes en les classant suivant des types déterminés et en utilisant très tôt les règles de trois. Le choix des problèmes est très varié. Ils sont précédés d'une lettre : A, pour les applications immédiates du cours, B, pour les problèmes normaux de devoirs, C, pour les exercices plus difficiles. Le contact étroit entre le cours et les exercices d'application est assuré par des renvois placés à la fin de chaque paragraphe. Les données numériques ont été adaptées aux cours actuels. Les notations abrégées utilisées pour les unités du système métrique sont conformes au décret du 28 février 1948.

|                                     |          |         |
|-------------------------------------|----------|---------|
| Edition Lycées et Collèges .....    | Broché.. | 195 fr. |
|                                     | Cartonné | 245 fr. |
| Edition Cours complémentaires ..... | Broché.. | 205 fr. |
|                                     | Cartonné | 255 fr. |

**LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — MATHÉMATIQUES, classe de Sciences expérimentales (Arithmétique, Algèbre et Trigonométrie, Mécanique, Cosmographie).**

Tout le programme se trouve réuni en un volume qui donne aux élèves des méthodes pratiques ; les questions sont traitées avec le maximum de simplicité, sans toutefois sacrifier l'essentiel de l'esprit mathématique.

Format 13,5 × 21 ..... Broché.. » »

**LESPINARD et PERNET. — TRIGONOMETRIE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 300 fr. |
|                        | Cartonné | 380 fr. |

**Classe de PHILOSOPHIE :****LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — ALGÈBRE ET COSMOGRAPHIE, classe de Philosophie.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 300 fr. |
|                        | Cartonné | 380 fr. |

**Classe de MATHÉMATIQUES : COURS COMPLET****LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 420 fr. |
|                        | Cartonné | 495 fr. |

**LESPINARD et PERNET. — GEOMETRIE DESCRIPTIVE ET COTÉE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 250 fr. |
|------------------------|----------|---------|

**LESPINARD et PERNET. — ARITHMÉTIQUE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 220 fr. |
|------------------------|----------|---------|

**LESPINARD et PERNET. — MÉCANIQUE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 210 fr. |
|                        | Cartonné | 300 fr. |

**LESPINARD, PERNET et GAUZIT. — COSMOGRAPHIE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 290 fr. |
|                        | Cartonné | 370 fr. |

**LESPINARD et PERNET. — ALGÈBRE, classe de Mathématiques.**

|                        |          |         |
|------------------------|----------|---------|
| Format 13,5 × 21 ..... | Broché.. | 400 fr. |
|                        | Cartonné | 480 fr. |

**LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 2<sup>e</sup> partie, classe de Mathématiques.**

|                      |         |
|----------------------|---------|
| Format 13 × 18 ..... | 295 fr. |
|----------------------|---------|

**Classe de Première C. et M.****LESPINARD et PERNET. — SOLUTIONS DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES, Bac., 1<sup>re</sup> partie, séries C. et M.**

|                      |         |
|----------------------|---------|
| Format 13 × 18 ..... | 200 fr. |
|----------------------|---------|

**PARUTION 15 MAI 1951 :****LESPINARD et PERNET. — MATHÉMATIQUES, classe de Cinquième.**

Edition Lycées et Collèges. 1 volume.  
Edition Cours Complémentaires. 1 volume.

ÉDITIONS DIDIER & RICHARD  
GRENOBLE (Isère)

# COURS DE MATHÉMATIQUES

PAR

ROUX & MIELLOU  
*Professeurs au Lycée de Grenoble*

Programmes du 18 avril 1947

Tarif du 1<sup>er</sup> octobre 1950

|                                                                                               |     |   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|---|
| Arithmétique 6° .....                                                                         | 150 | » |
| Dessin Géométrique 6° et 5° .....                                                             | 60  | » |
| Géométrie 5° et 4° .....                                                                      | 200 | » |
| Arithmétique 5° .....                                                                         | 180 | » |
| Arithmétique et Algèbre 4° .....                                                              | 180 | » |
| Arithmétique et Algèbre 3° .....                                                              | 200 | » |
| Géométrie 3° .....                                                                            | 180 | » |
| Compléments d'Algèbre et de Géométrie<br>Géométrie 3° Moderne court .....                     | 160 | » |
| Algèbre 2° A.B.C.M. ....                                                                      | 320 | » |
| Géométrie 2° A.B.C.M. ....                                                                    | 320 | » |
| Algèbre 1 <sup>re</sup> A.B. ....                                                             | 160 | » |
| Algèbre et Trigonométrie 1 <sup>re</sup> C.M. ....                                            | 320 | » |
| Géométrie 1 <sup>re</sup> A.B.C.M. ....                                                       | 320 | » |
| Questions de Cours de Mathématiques du<br>Baccalauréat, 1 <sup>re</sup> partie, A.B.C.M. .... | 225 | » |

**Roland MAILLARD**

Professeur de Mathématiques spéciales  
au Lycée Charlemagne,  
Chargé d'un cours  
à l'École Normale Supérieure

**Albert MILLET**

Professeur agrégé  
au Lycée Janson-de-Sailly  
et à l'École Normale Supérieure  
de l'Enseignement Technique

# COURS DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du Second Degré

EN VENTE :

**Classe de Sixième classique et Moderne Mathématiques.** Un vol. in-16, broché ou cartonné, de 192 p., avec 900 exercices et problèmes, un complément de dessin géométrique et de dessin décoratif, des planches hors-texte en couleurs.

**Classe de Troisième et Brevet d'Études Mathématiques.** Un vol. in-16, broché, de 304 pages, avec 1185 exercices et problèmes.

**Classe de Seconde classique A et B Mathématiques.** Un vol. in-8, broché, de 320 p., avec 714 exercices et problèmes.

**Classe de Seconde classique C et Moderne Algèbre.** Un vol. in-8, broché, de 256 p., avec 633 exercices et problèmes.  
**Géométrie.** Un vol. in-8, broché, de 440 p., avec 724 exercices et problèmes.

**Classe de Première classique C et Moderne Algèbre et Trigonométrie.** Un vol. in-8, broché, de 288 p., avec 634 exercices et problèmes.  
**Géométrie.** Un vol. in-8, broché, de 336 p., avec 528 exercices et problèmes.

**Classe de Mathématiques Algèbre.** Un vol. in-8, broché, de 368 p., avec 890 exercices et problèmes.

*Une méthode  
efficace*

*Une culture  
mathématique*

*Une  
nouvelle  
présentation  
typographique*

**Classe de Cinquième Mathématiques** ..... (juin 1951)

**Classe de Quatrième Mathématiques** ..... (sept. 1951)

**Classe de Première classique A et B Mathématiques** ..... (sept. 1951)

**Classe de Mathématiques Géométrie** ..... (juin 1951)

Etc..., etc...

**HACHETTE**