

Axiomatique et Redécouverte

Réunion de la Commission d'Etude, 19 octobre 1950

Conférence de M. GLAESER, Chef de travaux
à la Faculté des Sciences de Nancy

QUELQUES EXPÉRIENCES D'ENSEIGNEMENT AXIOMATIQUE

Un enseignement rigoureux doit, pour être complet, comporter deux étapes :

1° Il doit d'abord susciter chez l'élève un besoin de rigueur ; lui faire comprendre la nécessité de certaines analyses minutieuses qui, exposées sans préparatifs, paraîtraient bizarres ; l'éveiller à la pensée logique.

2° Il doit ensuite satisfaire plus ou moins complètement les exigences ainsi créées : le degré de rigueur dépendra plus de la maturité des élèves que des préférences du professeur.

Un grand nombre de mathématiciens s'est occupé de la seconde étape : on a élaboré maints exposés axiomatiques. Nous nous occuperons plutôt ici d'expériences dont l'intérêt consiste à « soigner » la première étape : il s'agit de ne pas « faire avaler », comme une médecine, à un jeune auditoire désarmé, une construction toute faite, dont il ne comprend pas la raison d'être.

Je choisirai deux essais : l'un concerne l'éveil au raisonnement dirigé (expérience faite en classe de 5° au Lycée Michelet) ; l'autre a pour but d'asseoir le cours de géométrie sur l'axiomatique de Hilbert, compte tenu des nécessités pédagogiques (expérience faite en classe de Mathématiques, à Lyon, en participation aux essais de M. THOVERT).

EXPÉRIENCE FAITE EN 5°. — 1^{er} objectif : *Apprendre aux élèves à s'exprimer correctement.*

La première leçon fut consacrée au « jeu des bonnes définitions ». Sur la question : « Qu'est-ce qu'un Lycée ? », un dialogue s'engage :

Un Elève. — C'est une maison où il y a des enfants.

Le Professeur. — Vous voulez dire une pouponnière.

Un Elève. — Non, une maison où il y a de grands enfants, etc., etc...

Il faut vingt minutes pour arriver à l'énoncé correct : « Un Lycée est un établissement d'Enseignement Secondaire appartenant à l'Etat. » On cherche alors à définir les objets les plus hétéroclites, et on finit la classe en cherchant la définition d'un *carré*.

Cet exercice de formulation a été poursuivi toute l'année à propos de tous les énoncés. Le début du cours de géométrie comprend une chaîne de « définitions » ou de « propositions », dont chacune nécessite la connaissance des précédentes (droite, segments, segments égaux, somme, double, moitié, etc., de segments. Etude analogue des angles).

2^e objectif : *Le principe d'honnêteté.*

C'est alors l'occasion de faire prévaloir le « principe d'honnêteté », qui

est à la base de l'axiomatique. Il faut distinguer très précisément ce que l'on *admet* de ce que l'on *démontre*, ce que l'on *définit* et ce qu'on ne *définit pas*. Ainsi, pas de soi-disant définition de la droite. Sous le titre *Vocabulaire*, je dicte : « *Les expressions figures égales et figures superposables sont synonymes.* » Il est facile de faire sentir aux élèves (en utilisant par exemple une jauge en caoutchouc) que cet énoncé n'est pas une définition, et de conclure par cette boutade de mon maître CAGNAC : « Un dictionnaire est un recueil de cercles vicieux. » Il est nécessaire de déclarer à la classe qu'en Mathématiques il se présente *trois sortes de propositions* :

- celles qui sont *fausses* ;
- celles qui sont *vraies*, mais non démontrables ou dont on n'a pas encore parlé ;
- celles, enfin, qui ont déjà été *démontrées* (ou explicitement admises).

Ainsi en 5^e, où le programme de géométrie comprend essentiellement la géométrie pré-euclidienne, il arrive parfois que des élèves, ou plutôt des parents trop zélés, invoquent la notion de parallélisme dans un problème. C'est alors l'occasion de développer la distinction ci-dessus énoncée.

3^e objectif : Géométrie concrète et géométrie déductive.

La troisième tâche du professeur en 5^e est de faire comprendre à ses élèves la distinction complète de la géométrie déductive et de la géométrie concrète, sans pour autant négliger l'une ou l'autre.

Vers le mois de décembre, lorsque les quelques théorèmes élémentaires sur les angles de même sommet ont déjà été étudiés, j'ai demandé à ma classe de « ranger », pour ne plus s'en servir pendant quelque temps, le cahier de « géométrie démontrée », car nous allions entreprendre une toute autre activité : l'étude de la géométrie concrète, tout à fait différente de la précédente.

J'utilisai alors largement ce qu'on pourrait appeler « les vertus pédagogiques du pléonasme » et je *répétai deux fois par cours*, à mon auditoire, cette opposition entre les deux géométries, en ayant soin d'en varier l'expression autant que possible.

L'usage des instruments usuels fut expérimenté sans autre souci de justification ; j'avais soin de mettre en évidence les incertitudes de ce genre de « preuves » et de tirer parti des coïncidences fortuites que d'aucuns parmi mes élèves voulaient ériger en règle générale. Je me suis abstenu systématiquement de faire déterminer la somme des angles d'un triangle ou d'en tracer simultanément les trois hauteurs pour ne pas anticiper sur les étonnements futurs, mais, par contre, la construction de polygones réguliers (y compris les décagones et pentagones), à condition d'être présentée comme une recette qui sera justifiée plus tard, le tracé de pavages réguliers et semi-réguliers, donneront suffisamment à l'élève l'occasion de manipuler des instruments. De même, ne pas oublier le pliage et les calques.

Nous revînmes à la géométrie déductive avec le cérémonial adéquat (changement solennel de cahier). Au cours des premières démonstrations sur les cas d'égalité, j'eus la confirmation que les élèves ne risquaient plus

de faire la confusion entre les « certitudes intuitives » et les « certitudes démontrées ». Je m'étais procuré un grossier triangle de toile, et je demandais à un élève de le superposer à un triangle dessiné au tableau. On finit par constater que l'égalité d'un angle compris entre deux angles égaux chacun à chacun assurait l'égalité du triangle.

Le professeur. — Comment constater l'égalité de cet angle ?

Réponse. — En géométrie concrète par la mesure.

Le professeur. — Et en géométrie déductive ?

Réponse de la classe unanime. — ON REGARDERA LES HYPOTHÈSES.

Je signale que pour être fidèle au « principe d'honnêteté », j'ai formulé l'un des cas d'égalité comme un postulat (Cf. *L'Axiome* III. 7, en annexe) et en démontrant les autres. Le reste de l'année fut employé à manipuler les divers cas d'égalité au cours d'exercices pré-euclidiens d'une difficulté croissante.

EXPÉRIENCE FAITE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES. — Si la classe de 5^e peut marquer le début d'une initiation à l'axiomatique, l'expérience que M. THOVERT poursuit depuis plusieurs années dans sa classe de Mathématiques Élémentaires à Lyon et que M. DUVERT et moi-même avons essayé de réaliser, est beaucoup plus proche d'un enseignement véritablement axiomatique.

Pour ma part, j'ai mis à profit les deux semaines d'octobre qui précèdent la rentrée effective, pour donner à mes élèves une idée des fondements axiomatiques de la géométrie d'après David Hilbert (cf. *Grundlügen der Geometrie*). Il ne convient pas de surcharger les programmes de notions nouvelles : aussi ne me suis-je permis d'enseigner, à titre de compléments, que des notions *susceptibles d'éclairer véritablement le cours*. Il est souhaitable pourtant de définir, au début de l'année, les relations d'équivalence (qui interviennent dans l'égalité, la similitude, la congruence, l'équivalence, etc.), la *notion de groupe* qui imprègne tous les chapitres du cours de Mathématiques, la *notion d'ordre*, qui intervient dans toutes les inégalités, enfin la *notion de limite*. J'ai abordé alors l'étude des axiomes d'Hilbert. L'énumération des axiomes d'appartenance est accueillie par mon jeune auditoire avec une indifférence polie.

Ce n'est qu'à la leçon suivante, après l'examen minutieux de l'exercice (2), dont on trouvera en annexe l'énoncé, que l'on commence à comprendre de quoi il s'agit.

Je demande alors : « Peut-on maintenant me démontrer, à partir des axiomes I, que la droite se compose d'une infinité de points ? » Au moment où l'élève comprend que l'exercice (2) prouve le contraire, l'intérêt s'éveille, et quand, après l'énoncé des axiomes de dispositions, ce théorème est effectivement démontré, chacun comprend la nécessité de la démonstration.

Cette partie du cours fut suivie dans une « atmosphère axiomatique » ; les élèves s'interrogeaient constamment afin de savoir si chacune de leurs affirmations était légitime. A condition de « fourrer » les démonstrations d'exemples simples empruntés à la géométrie « non-ordinaire » on entre-

tient chez l'élève, le besoin de rigueur. (A titre d'exemple : sur la sphère, il existe des triangles qui ont trois angles droits ; par le pôle, on peut mener plusieurs méridiens perpendiculaires sur l'équateur). On démontrera, au fur et à mesure, toute une série de théorèmes de base : par exemple, existence et unicité de la perpendiculaire, ou bien encore l'inégalité triangulaire $AB \leq AC + CB$.

Je n'ai fait que signaler les axiomes de continuité. Je me suis borné à dire qu'il existait deux autres axiomes, en vertu desquels je pourrais démontrer par exemple : « que tout segment joignant un point intérieur à un point extérieur, coupait la circonférence. »

Bien que les élèves, dans leur ensemble, se soient intéressés à ces développements, il faut, pour juger des résultats, tenir compte de ce que la plupart ne travaillent « sérieusement » que les questions qui « paient à l'examen » (et encore !).

La plupart ne s'occuperont plus d'axiomatique pendant l'année scolaire.

Mais une enquête faite parmi mes anciens élèves passés en Mathématiques Supérieures m'a montré que cinq ou six chaque année (sur un quinzaine environ) gardaient un vif souvenir de ces questions et les avaient assez bien assimilées.

ANNEXE

Les axiomes de la géométrie (d'après Hilbert, dans « Grundlagen der Geometrie »)

I. *Les axiomes d'appartenance.*

- I₁ Par deux points passe une droite et une seule.
- I₂ Sur toute droite il existe au moins deux points et hors de cette droite au moins un point.
- I₃ Par trois points non alignés passe toujours un plan et un seul (1).
- I₄ Si un plan contient deux points A et B, il contient la droite AB.
- I₅ Si deux plans ont un point commun, ils en ont au moins un deuxième.
- I₆ Il existe au moins quatre points non coplanaires (2).

II. *Les axiomes de disposition.*

- II₁ Parmi trois points alignés, il en existe un et un seul (3) que l'on peut qualifier de « situé entre les deux autres ».
- II₂ Etant donné deux points A et B il existe un point C tel que B soit entre A et C.
- II₃ Etant donné un triangle ABC et une droite coupant AB entre A et B ; elle recoupe alors l'intérieur d'un des segments BC ou CA.

III. *Axiome d'égalité.*

- III₁ Etant donné deux points A et B et une demi-droite A'x, il existe un point B' et un seul sur A'x tel que l'on puisse dire $AB = A'B'$.
- III₂ L'égalité est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que $AB = AB$ (réflexivité), que $AB = CD$ entraîne $CD = AB$ (symétrie), et que $AB = CD$ et $CD = EF$ entraîne $AB = EF$ (transitivité).

III₃ $AB = BA$ (4).

III₄ Etant donné trois points alignés ABC et trois autres points alignés A'B'C', tels que B soit entre A et C, que B' soit entre A' et C'. Les relations $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$, entraînent $AC = A'C'$.

III₅ Etant donné deux demi-droites Ax et Ay de sommet A, et un demi-plan défini par la demi-droite A'x', il existe une demi-droite A'y' tel que les angles (Ax, Ay) et (A'x', A'y') puissent être qualifiés égaux.

III₆ L'égalité des angles est une relation d'équivalence.

III₇ Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, les autres angles homologues sont égaux.

IV. *L'axiome d'Euclide ou de l'unicité de la parallèle.*

V. *Axiomes de continuité.*

V₁ *Axiome d'Archimède* : Quels que soient les segments u et l , il existe un entier n tel que $nu > l$ (5).

V₂ *Axiome de complétion* : L'espace considéré est le plus riche de ceux qu'on peut concevoir parmi ceux qui satisfont à tous les axiomes précédents.

Note du rapporteur. — En remerciant très vivement M. GLAESER, nous pouvons annoncer la publication, dans un de nos prochains *Bulletins*, de la conférence que M. CHOQUET fit en juin dernier à l'Institut Henri-Poincaré pour « un enseignement rigoureux de la géométrie ». D'autre part, nous attendons avec beaucoup d'espérance la parution d'un petit livre de M. BOULLIGAND, intéressant directement notre sujet : « Accès aux principes de la géométrie euclidienne. (Cas du plan) ».

Y. CROZES.

Notes à l'annexe

(1) Les axiomes ainsi formulés ne sont pas indépendants. En particulier l'unicité de I₁ résulte des axiomes II.

(2) A la suite de l'étude des axiomes I, on peut proposer en exercice la démonstration des principaux « théorèmes » du premier chapitre du programme de Première. Puis l'exercice suivant :

Exercice. — On considère six objets A, B, C, X, Y, Z, que nous appellerons « points ».

Les groupes de points ABC, AX, AY, AZ, XYZ, BX, BY, BZ, CX, CY, CZ, seront appelés « droites ».

Enfin les « plans » seront les groupements ABCX, ABCY, ABCZ, XYZA, XYZB, XYZC. Démontrer que cette « géométrie » de six points satisfait aux axiomes d'appartenance.

(3) Après II₁ on peut déjà définir le segment et la demi-droite : « Etant donné deux points, O et M, la demi-droite OM est l'ensemble des points N tel que O ne soit pas entre M et N. »

(4) La relation $AB = BA$ n'est pas « évidente ». Si l'on comptait les longueurs en durée de marche, la durée de l'aller n'est pas la durée du retour.

(5) Un espace formé de tous les points à coordonnées *rationnelles* satisfait à tous les axiomes précédents. Il faut donc un axiome pour passer à l'espace des points à coordonnées *réelles*.