

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Publication trimestrielle

Administration : 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.)

SOMMAIRE

DEUXIÈME PARTIE

I. Avis du Trésorier	79
II. Remerciements	79
III. Réunion du Comité : 26 octobre 1950	80
IV. Rectification	81
V. Document officiel : <i>Rapport de M. l'Inspecteur général ROBERT, sur la composition de Mathématiques au Concours général de 1950 (Classe de Mathématiques)</i>	82

PREMIÈRE PARTIE

Général NICOLAU et Ingénieur CAVE : <i>Etude élémentaire des Méthodes statistiques</i>	98
Axiomatique et Redécouverte : Conférence de M. GLAESER, du 16 octobre 1950. Note du Rapporteur (Y. CROZES)	113
Réunion de professeurs de Mathématiques	118
Histoire des Sciences : Groupements et Revues	118
G. SINGIER : <i>Une propriété caractéristique de l'homothétie</i>	119
R. ROSTOLLAND : <i>Note sur les Déplacements</i>	119
Livres reçus	120
Examens et Concours : <i>Examens oraux ; agrégation féminine</i>	121
<i>Certificat d'aptitude à l'enseignement dans les Collèges</i>	123

Cotisations, Abonnements, Expédition des Bulletins 7, rue Candelot, Bourg-la-Reine

Abonnement d'un an au *Bulletin* (prix net) : France 400 fr.
 Prix d'un numéro du *Bulletin* ou d'un *Supplément* (prix net) : France. 80 fr.
 Les membres de l'Association (cotisation : 400 francs pour l'année scolaire) reçoivent gratuitement le *Bulletin* ainsi que les *Fascicules d'Enoncés*.
 Régler par chèque postal en utilisant l'adresse suivante :

Paris, Cc. 5708-21

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement public
 29, rue d'Ulm, Paris (5^e)

Couverture page II

Présidents d'Honneur

M. DELCOURT, M. HENNEQUIN

Bureau :

Président : M. POCHARD, 7, rue Pasteur, Saint-Cloud (S.-et-O.).
Vice-Présidents : M. CHAZAL, 2, rue Thimonnier, Paris, 9^e.
Mlle MASSON, 3, avenue de la Porte-de-Montrouge, Paris (14^e).
M. BIGUENET, 41, rue Mad.-Michelis, Neuilly (Seine).
M. EDDE, 51, rue des Rosiers, Saint-Ouen (Seine).
Secrétaires : M. BENOIST, Collège Diderot, Paris.
M. CROZES, 10, rue Buisson-Saint-Louis, Paris (10^e).
M. GIRARD, 37, rue Davioud, Paris (16^e).
M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4^e).
M. RUFF, professeur au Lycée Voltaire (Paris).
Trésorier : M. MINOIS, 7, rue Colonel Candelot, Bourg-la-Reine (Seine).

Comité :

Membres élus

En 1947 : M. BAY (*Condorcet*) ; M. CARALP (*Montaigne*) ; M. CROZES (*Louis-le-Grand*) ; M. DELTHEIL (*Faculté de Toulouse*) ; Mlle MASSON (*Marie-Curie*) ; M. PÉTRUS (*Janson*).

En 1948 : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; M. EDDE (E.N. Auteuil) ; M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; M. MIRABEL (*St-Louis*) ; M. POCHARD (*Condorcet*) ; Mlle PROTIN (*Jules-Ferry*).

En 1949 : Mlle AFFRE (*Fénelon*) ; M. BIGUENET (E.N.P. St-Ouen) ; M. CHAZAL (*St-Louis*) ; M. GIRARD (*Arago*) ; M. GUITTON (*St-Louis*) ; M. LECOMTE (*St-Louis*).

En 1950 : Mlle BARBIER (*Victor-Duruy*) ; M. BENOIST (*Diderot*) ; M. GIRAULT (*J.-B. Say*) ; M. JACQUEMART (*Pasteur*) ; M. MINOIS (*Lakanal*) ; M. RUFF (*Voltaire*).

Membres de droit

Mlle DIONOT (*Sèvres*) ; Mme NICOD (*Lyon, Marie-Vidalenc*) ; M. CANONGE (*Castres*) ; M. DUVAL (*Dorian*) ; M. POUX (*Saint-Cloud*) ; M. MARVILLET (*Strasbourg, Kléber*).

Rapporteurs

Classes Nouvelles : Mlle DIONOT ; *Enseignement moderne court* : MM. EDDE et GIRAULT ; *Enseignement technique* : M. BIGUENET ; *Ecoles Normales* : M. EDDE ; *Premier Cycle* : M. CARALP ; *Seconde et Première* : M. CROZES ; *Philosophie, Sciences Expérimentales, Mathématiques* : M. FAVRELLE, M. MINOIS, Mlle PROTIN (S. Ex.) ; *Mathématiques Supérieures* : M. MIRABEL ; *Classes préparatoires aux Grandes Ecoles* : M. PÉTRUS ; *Définitions de mots et notations mathématiques* : *Axiomatique et Redécouverte* : M. CROZES ; *Sujets des compositions et épreuves orales aux différents examens et concours* : Brevet et Ecoles Normales : M. EDDE. — Baccalauréat : M. FAVRELLE. — Grandes Ecoles : M. CHAZAL. — Concours général : M. SINGIER ; *Histoire des Mathématiques* : M. ITARD ; *Mathématiques et Psychologie scolaire* : M. MONAVON ; *Cinéma d'Enseignement* : M. EUVRARD ; *Matériel d'Enseignement* : MM. MONJALLON, JACQUEMART, BIGUENET ; *Enseignement de l'Astronomie* : M. WALUSINSKI.

Correspondants

Aix-Marseille : M. BERTRAND (*Marseille, Thiers*) ; *Besançon* : M. BOUCHAT (*Besançon*) ; *Dijon* : M. DURRANDE (*Dijon*) ; *Lille* : M. FAVRELLE (*Lille, Faidherbe*) ; *Lyon* : M. THOVERT (*Lyon, Ampère*) ; *Montpellier* : M. JAUSSAUD (*Nîmes*) ; *Nancy* : M. MOUGENOT (*Nancy, Henri-Poincaré*) ; *Rennes* : M. RENAUULT (*Rennes*) ; *Strasbourg* : M. EHRHARDT (*Strasbourg, Kléber*) ; *Maroc* : M. QUEYSANNE (*Casablanca, Lyautéy*) ; *Tunisie* : M. SAUVAN (*Tunis, Carnot*).

N.-B. — Adresser, soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris, 4^e, toute communication destinée à la Deuxième Partie du *bulletin*.

Bulletin de l'Association
des
Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement public

PREMIÈRE PARTIE

I. Avis du Trésorier

Le Trésorier demande à nouveau aux correspondants dans chaque établissement de faire en sorte que :

- 1° les cotisations soient groupées **par établissement** ;
 - 2° les noms des nouveaux arrivés soient clairement indiqués, ainsi que **l'endroit d'où ils viennent** ;
 - 3° la liste de ceux qui ont été mutés lui soit fournie complètement, ainsi que la désignation du **nouvel établissement** auquel ceux-ci appartiennent.
 - 4° Il recommande à tous les collègues qui n'ont pas encore payé leur cotisation de s'en acquitter le plus rapidement possible. Tous les retards compliquent considérablement son travail.
-

II. Remerciements

Dans sa réunion de 23 novembre 1950, le Bureau a adopté la résolution suivante :

Le Bureau unanime charge le Président d'envoyer à Mlle AFFRE, les remerciements de l'Association tout entière pour le travail lourd et ingrat qu'elle a effectué avec un dévouement sans égal, dans les fonctions de Trésorier pendant ces quatre dernières années.

III. Réunion du Comité

26 octobre 1950

Assistaient à la réunion : Mlle AFFRE, BARBLIER, DIONOT, MASSON, PROTIN ; MM. BENOIST, BIGUENET, CHAZAL, CROZES, EDDE, FAVRELLE, GIRARD, GIRAULT, GUITTON, JACQUEMART, MINOIS, POCHARD, POUX, RUFF.

Excusés : MM. BAY, BERTRAND, DELCOURT.

Baccalauréats. — M. POCHARD relate les actions entreprises à propos des derniers textes : lettres aux Doyens ; démarche auprès de M. Châtelet. Le Comité émet le vœu que tous les textes soient effectivement soumis à la Commission ministérielle de contrôle.

Travail d'organisation. — Le Comité examine ensuite quelques questions d'ordre pratique : changement des tarifs de publicité, publication des textes d'examens, accords à prévoir avec *L'Education Nationale* et relatifs à la publication des rapports d'Agrégation et de C.A.

Composition du Bureau. — MM. MINOIS et RUFF permutent leurs fonctions. M. MINOIS sera trésorier et M. RUFF, secrétaire.

Visites et conférences. — Sont annoncées, la reprise des conférences d'Astronomie et la réunion d'un colloque de Logique. Sont envisagées, des visites aux fabriques de machines à calculer et aux laboratoires de la Ville de Paris. Nos collègues de la région parisienne seront prévenus par circulaire. Ceux de nos collègues de province, désireux d'être tenus au courant, pourront se faire connaître. Des convocations leur seront alors envoyées.

Programmes. — Le Comité examine ensuite les réductions possibles de programme. En classe de Mathématiques la *Statique* pourrait être abandonnée et l'*Astronomie* devenir matière d'oral.

En ce qui concerne les programmes de Seconde et de Première un questionnaire détaillé sera soumis à la prochaine Assemblée générale.

D'une façon générale, on regrette l'importance de plus en plus grande prise dans l'Enseignement par les disciplines non fondamentales. Le Comité souhaite le renforcement des horaires dans les classes du premier cycle et la création d'une heure de travail dirigé en classe de Mathématiques.

IV. Rectification

Conseils de l'Enseignement du Second Degré

Une erreur regrettable, dont nous nous excusons, nous ayant fait publier des résultats incomplets en ce qui concerne les agrégés, nous les rétablissons :

Agrégés scientifiques — 3 sièges

Scrutin du 21 juin

Suffrages exprimés : 732.

Majorité absolue : 367.

Ont obtenu :

Membres titulaires

MM.

RUMEAU, S.N.E.S..... 493 voix, élu

CAMPAN, S.N.E.S..... 446 — élu

CHAZAL, S.N.E.S..... 337 —

JACQUEMART, indép..... 328 —

SCHLEGEL, S.G.E.N..... 246 —

LE RÉVÉREND, S.G.E.N. 237 —

Membres suppléants

MM.

GUINIER, S.N.E.S..... 496 voix, élu

MARVILLET, S.N.E.S.... 474 — élu

PANIEL, S.N.E.S..... 471 — élu

DURRANDE, S.G.E.N.... 252 —

LITTAYE, S.G.E.N..... 232 —

Ballottage pour un siège de titulaire.

Scrutin du 10 juillet

Suffrages exprimés : 594.

Majorité absolue : 298.

Ont obtenu :

MM.

JACQUEMART, indép..... 364 voix, élu

CHAZAL, S.N.E.S..... 223 —

Agrégées scientifiques — 2 sièges

Scrutin du 21 juin

Suffrages exprimés : 438.

Majorité absolue : 220.

Ont obtenu :

Membres titulaires

Mmes et Mlles

COURTIN, S.N.E.S..... 247 voix, élue

DIONOT, S.N.E.S..... 236 — élue

FLAMAND, S.G.E.N..... 189 —

GREDY, S.G.E.N..... 179 —

Membres suppléants

Mmes et Mlles

PARODI, S.N.E.S..... 223 voix, élue

MASSON, S.N.E.S..... 210 —

AFFRE, S.G.E.N..... 205' —

GIARD, S.G.E.N..... 199 —

Ballottage pour un siège de suppléant.

Scrutin du 10 juillet

Suffrages exprimés : 342.

Majorité absolue : 172.

Ont obtenu :

Mmes et Mlles

AFFRE, S.G.E.N..... 200 voix, élue

MASSON, S.N.E.S..... 141 —

V. Documents officiels

Rapport sur la Composition de mathématiques (classe de Mathématiques)

au Concours général de 1950 (1)

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général, président ; de Mme AYRAULT, professeur de Mathématiques (Fontenay) au Lycée Jules-Ferry ; de MM. KÉROMEN, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Louis-le-Grand ; MAGNIER, professeur de Mathématiques Spéciales (Navale) au Lycée Saint-Louis ; PICARDAT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Chaptal ; POUGNAND, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Buffon.

ANALYSE DU SUJET

1^{re} PARTIE. — Dans un plan (P), on donne une conique (Γ) définie par un foyer F, la directrice correspondante (D), et son excentricité e , et un point fixe C distinct de F, essentiellement supposé *intérieur* à (Γ).

1° A un point quelconque m de (P), on fait correspondre le point n (dit associé de m), homothétique de F dans une homothétie (H_m) ayant son centre h sur (D) et telle que (H_m) transforme m en C.

Démontrer que, lorsque m décrit une droite (M) de (P), n décrit une droite (N) [dite associée de (M)] et vice-versa.

On obtient h comme point de rencontre de Cm avec (D) ; en général, la donnée de m détermine h , l'homothétie (H_m), puis le point n sans ambiguïté. Dans le cas particulier où la droite Cm est parallèle à (D), il y a lieu de considérer que (H_m) devient une translation de vecteur $\overrightarrow{mC}$ et le point n est encore déterminé par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{Fn} = \overrightarrow{mC}$: c'est le symétrique de m par rapport au milieu de FC.

Dans le cas singulier où m est en C, on doit regarder h comme indéterminé sur (D) et (H_m) comme ayant l'unité pour rapport d'homothétie : ceci conduit à regarder que n est encore déterminé et confondu avec F : C admet F comme point associé.

Quand n est-il rejeté à l'infini ? Faisons varier m sur une droite arbitraire passant par F : dans ces conditions h est fixe ; le rapport d'homothétie de (H_m) est $\frac{h\overline{C}}{hm}$ (quand m est différent de h). C, intérieur à (Γ),

n'est pas situé sur (D), donc hC n'est pas nul ; ce rapport prend, quand m varie sur la droite Fh, toutes les valeurs positives ou négatives possibles, il est égal à $\frac{h\overline{n}}{h\overline{F}}$ ($h\overline{F}$ toujours $\neq 0$) ; donc n prend toute position possible

(1) L'énoncé du problème a été publié dans nos fascicules d'énoncés publiés précédemment.

(sauf h) sur cette droite. Si m tend vers h , le rapport précédent augmente indéfiniment en valeur absolue, n s'éloigne à l'infini. Si m s'éloigne à l'infini, le rapport considéré tend vers zéro et n tend vers h . Ainsi les points de (D), et seulement ces points, ont des associés rejetés à l'infini, et sont aussi les associés de points m à l'infini.

Il y avait lieu de bien observer que la transformation ponctuelle associant à m le point n , 1° n'est pas une homothétie, (H_m) dépendant de m , 2° n'est pas *réciroque*. Il apparaît que lorsqu'on échange dans la définition de cette transformation les rôles des points C et F, m et n sont échangés ; ceci permet de ne pas réétudier la transformation inverse, analogue (sinon identique) à la première. La droite (D) joue le même rôle dans les deux transformations.

Soit maintenant supposé que m varie sur une droite arbitraire (M) coupant (D) en un point φ ; (H_m) change φ en un point φ' de (D) tel que la droite $C\varphi'$ soit parallèle à $m\varphi$ qui est (M). φ' est donc fixe. (H_m) change la droite $F\varphi$ en la droite parallèle $n\varphi'$; donc n varie sur une droite fixe (N), parallèle à $F\varphi$ et passant par φ' . La transformation change les droites en droites ; la relation

$$\frac{\overline{\varphi'C}}{\overline{\varphi m}} = \frac{\overline{\varphi'n}}{\overline{\varphi f}} \quad \text{d'où} \quad \overline{\varphi m} \times \overline{\varphi'n} = \text{Cte} \neq 0,$$

montre d'ailleurs que lorsque m décrit (M), n décrit toute la droite (N). Au point φ correspond un associé rejeté à l'infini sur (N) ; le point φ' de (N) est l'associé d'un point m rejeté à l'infini sur (M).

Cas particuliers de la transformation d'une droite : Le cas où (M) est parallèle à (D) donne lieu aux constatations suivantes :

$$\frac{\overline{hm}}{\overline{hC}} = \text{Cte} = k \neq 0 \quad \frac{\overline{hF}}{\overline{hn}} = k \quad \frac{\overline{Fn}}{\overline{Fh}} = \frac{\overline{hn} - \overline{hF}}{-\overline{hF}} = \frac{k-1}{k} = \text{Cte}$$

n décrit une droite homothétique de (D) dans une homothétie de centre F, son rapport étant $\frac{k-1}{k} \neq 0$ en général [si (M) ne passe pas par C] ; ici (N), comme (M), est parallèle à (D).

Si m décrit la parallèle à (D) passant par (C), on sait déjà que n reste symétrique de m par rapport au milieu de CF, n décrit la parallèle à (D) passant par F.

En résumé, si (M) est parallèle à (D), il en est de même de (N) et vice-versa. Le cas particulier où (M) passe par (C) [sans être parallèle à (D)] a déjà été étudié ; (N) passe par (F), et vice-versa.

Enfin, si (M) est confondue avec (D), l'associée (N) de (M) est rejetée à l'infini.

2° Quel est le lieu décrit par n quand m décrit la conique (Γ) ?

N.-B. — On désigne, dans tout le problème, la distance d'un point quelconque p à une droite ($\mathcal{P}$) par $\mathcal{P}(p)$.

Le rapport d'homothétie de (H_m) est au signe près $\frac{D(C)}{D(m)}$ [puisque (D) est invariante dans l'homothétie considérée].

C'est aussi le rapport algébrique $\frac{\overline{Cn}}{mF}$.

$$\text{Donc } \frac{Cn}{Fm} = \frac{D(C)}{D(m)} \text{ ou } \frac{Cn}{D(C)} = \frac{Fm}{D(m)},$$

Pour que m soit sur (Γ) il faut et il suffit que $\frac{Fm}{D(m)} = e$.

Cette condition équivaut à $Cn = eD(C)$. Posons :

$$eD(C) = R.$$

Le lieu demandé de n est donc le cercle de centre C et de rayon R : soit (C) ce cercle.

C étant intérieur à (Γ) , le rapport $\frac{CF}{D(C)}$ est inférieur à e .

Ainsi $CF < eD(C)$, ou $CF < R$. Le point F est intérieur au cercle (C) .

La relation $\frac{R}{D(C)} = e$ montre que le cercle (C) est sécant à (D) si $e > 1$, c'est-à-dire si (Γ) est une hyperbole ; il est tangent à (D) si $e = 1$, c'est-à-dire si (Γ) est une parabole ; il n'a aucun point commun avec (D) si $e < 1$, c'est-à-dire si (Γ) est une ellipse.

Remarque : Cette discussion résulterait aussi du fait que les points communs éventuels à (C) et (D) sont les associés des « points à l'infini » de (Γ) .

3° La polaire (Φ) du point F par rapport au cercle (C) étant supposée (cas général) sécante à (D) en un certain point I , caractériser la droite (Δ) ayant (Φ) comme associée.

A un point rejeté à l'infini sur (Δ) correspond comme associé le point I sur (Φ) : ceci indique que (Δ) est parallèle à la droite CI .

Au point A de rencontre de (Δ) avec (D) doit correspondre comme associé le point rejeté à l'infini sur (Φ) : donc FA est parallèle à (Φ) , autrement dit FA est perpendiculaire à CF .

On suppose (cas général) CF non perpendiculaire à (D) . Dans ces conditions, A est à distance finie.

En résumé, on peut construire (Δ) en élevant en F la perpendiculaire à CF qui coupe (Δ) en A ; (Δ) est la parallèle à CI issue de A .

Relation utile par la suite (donnée à vérifier dans le texte intégral du problème) :

n désignant l'associé d'un point quelconque m de (P) , menons par n la droite ayant la direction de (Φ) qui coupe (nécessairement) (D) en un point I_1 .

A des droites telles que (N) , de même direction, correspondent des droites associées (M) se coupant sur (D) : donc la droite nI_1 , qui a la direction de la droite FA , est l'associée d'une droite passant par A , et, évidemment, par m . Ainsi la droite Am a pour associée la droite nI_1 .

L'homothétie (H_m), qui change m en C , et F en n , a comme centre un point h de (D) ; menons par m la parallèle à CI , qui coupe (nécessairement) (D) en un certain point J ; le rapport de (Hm) est :

$$\rho = \frac{h\bar{I}}{h\bar{J}}.$$

La droite nI_1 est homothétique, dans (Hm) , de la droite FA , donc I_1 est l'homothétique de A , d'où :

$$\rho = \frac{h\bar{I}_1}{hA}. \text{ D'ailleurs } \rho = \frac{h\bar{C}}{hm}.$$

Le vecteur $\vec{II_1}$ est homothétique du vecteur $\vec{JA}$, donc

$$\vec{II_1} = \frac{h\bar{C}}{hm} \vec{JA}. \text{ En valeur absolue, } II_1 = \frac{hC}{hm} JA \quad (1').$$

Cette relation permet de comparer à la distance $\Delta(m)$, de m à (Δ) , la distance $\Phi(n)$, de n à (Φ) ; en effet

$$\begin{aligned} \Delta(m) &= \Delta(J) = JA \sin(\Delta, D), & [(\Delta, D) \text{ angle aigu de } (\Delta) \text{ et } (D)] \\ \Phi(n) &= \Phi(I_1) = II_1 \sin(\Phi, D) & [(\Phi, D) \text{ angle aigu de } (\Phi) \text{ et } (D)] \end{aligned}$$

Il s'ensuit, d'après (1') :

$$\Phi(n) = \frac{hC}{hm} \cdot JA \sin(\Phi, D) = \frac{hC}{hm} \frac{\Delta(m)}{\sin \Delta, D} \sin(\Phi, D), \text{ soit}$$

$$\Phi(n) = K \frac{hC}{hm} \Delta(m) \text{ en posant } K = \frac{\sin(\Phi, D)}{\sin(\Delta, D)}.$$

Dans cette relation :

$$(1) \quad \Phi(n) = K \frac{hC}{hm} \Delta(m),$$

K ne dépend que des directions de (Φ) , (Δ) , (D) , donc est constant quand m varie dans le plan, puisque (D) , (Φ) et (Δ) sont des droites fixes.

Cette relation sera utilisée, dans la suite du problème, quand m varie plus particulièrement sur (Γ) , mais elle est indépendante de cette hypothèse.

Remarque de contrôle : Pour tout point m d'une droite passant par A , le rapport des distances à (D) et (Δ) est constant, donc

$$\frac{D(m)}{\Delta(m)} = \text{Cte.}$$

Cette droite a pour associée une parallèle à (Φ) , donc on doit trouver que $\frac{D(m)}{\Delta(m)} = \text{Cte}$ entraîne $\Phi(n) = \text{Cte}$; cela tient à ce que $\frac{hC}{hm} = \frac{D(C)}{D(m)}$, ce qui permet d'écrire (1) sous la forme $\Phi(n) = KD(C) \frac{\Delta(m)}{D(m)}$ où $KD(C) = \text{Cte.}$

II. 1° Ce paragraphe est plus une explication de méthode qu'un problème, et ne présentait aucune difficulté :

On y considère, outre le plan (P) , une droite (Z) oblique à (P) et coupant ce plan au point ω , et le plan (Π) perpendiculaire à (Z) en ω .

A tout point u du plan (P), on fait correspondre sa projection orthogonale v sur le plan (II) : en effectuant un des deux rabattements, choisi une fois pour toutes, du plan (II) sur le plan (P), autour de l'intersection (X) de ces deux plans comme charnière, le point v prend comme nouvelle position un point u' du plan (P). Il est visible immédiatement que u et u' sont sur une même perpendiculaire à X, et que le rapport de leurs ordonnées par rapport à X :

$\frac{X(u')}{X(u)}$ est égal à $\cos \theta$ [θ étant l'angle de la rotation effectuée (dite rabattement)], en valeur algébrique. On peut donc considérer que u' se déduit de u par l'opération ponctuelle, dite « affinité orthogonale d'axe X et de rapport d'affinité $\cos \theta$ » qui ne dépend que de la donnée de (Z) par rapport à (P).

Si l'on fait abstraction des tracés graphiques qui pourraient (tel le « trait » de la géométrie descriptive traditionnelle) fournir u' connaissant u , on peut considérer que u' est défini en fonction de u par cette affinité, ce qui donne simplement la solution des problèmes métriques suivants :

a) Trouver, en vraie grandeur, la distance $Z(u)$ de u à Z :

C'est aussi la distance de v à Z, soit $v\omega$, rabattue en vraie grandeur en $u'\omega$, distance de u' au point ω .

b) Trouver en vraie grandeur les angles des deux plans Zu et Zu_1 , u_1 désignant un second point, situé, comme u , dans le plan (P) :

Ce sont les angles des droites ωv , ωv_1 ; et, dans (P), ce sont aussi les angles (supplémentaires entre eux) des droites $\omega u'$, $\omega u'_1$.

En particulier, si les plans Zu et Zu_1 sont rectangulaires, les droites $\omega u'$, $\omega u'_1$ le sont aussi et le segment $u'u'_1$ transformé, par l'affinité, du segment uu_1 est vu de ω sous un angle droit.

Ces remarques seront à utiliser dans la suite de (II).

2° Le point F étant intérieur au cercle (C), il existe un angle aigu α défini par la relation

$$(2) \quad \cos \alpha = \frac{CF}{R}.$$

Considérons la perpendiculaire FA en F à la droite CF et faisons-la tourner autour de CF, dans un sens arbitraire, de l'angle α ainsi défini. On obtient une droite (Φ_1) coupant (P) en F et faisant avec (P) l'angle α : il existe deux telles droites, symétriques par rapport à (P).

Prenons cette droite (Φ_1) comme droite (Z), le point F jouant le rôle de ω (II, 1°). Et, tout d'abord, le rôle du point u de (P) sera joué par un point quelconque n du cercle (C).

D'après la remarque a, la distance $\Phi_1(n)$ de n à la droite (Φ_1) est égale à Fn' , n' étant transformé de n par l'affinité orthogonale d'axe CF [qui joue ici le rôle de (X)] et de rapport $\cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \sin \alpha$ [car le plan perpendiculaire à (Φ_1) en F fait avec (P) l'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$].

Quand n décrit (C), n' décrit une ellipse ayant (C) comme cercle principal, la droite CF comme axe focal ; ses demi-longueurs d'axes sont

$$\mathcal{A} = R \quad \mathcal{B} = R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = R \sin \alpha.$$

La relation $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^2 + \mathcal{C}^2$ permet d'en déduire la demi-distance focale $\mathcal{C}$ de cette ellipse : cela donne visiblement

$$\mathcal{C} = R \cos \alpha, \text{ et, d'après la relation (2) :}$$

$$\mathcal{C} = CF.$$

Ainsi F est l'un des foyers de cette ellipse : la directrice correspondante est la polaire de F par rapport au cercle principal (C), qui n'est autre que la droite (Φ).

$\Phi_1(n) = Fn'$ s'écrit aussi $\Phi_1(n) = \mathcal{C} \Phi(n')$, puisque

$$\frac{Fn'}{\Phi(n')} = \mathcal{C}, \text{ excentricité de l'ellipse.}$$

$\mathcal{C}$, c'est $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}} = \cos \alpha$. D'autre part, la droite nn' , étant perpendiculaire à CF, est parallèle à (Φ), les points n et n' ont même distance à (Φ) :

$$\Phi(n') = \Phi(n), \text{ d'où, en résumé}$$

$$\Phi_1(n) = \Phi(n) \cos \alpha.$$

Il existe un rapport constant entre les distances de tout point n du cercle (C) aux droites fixes (Φ_1) et (Φ).

3° Dans ce paragraphe, c'est la remarque b de (II, 1°) qui va être utilisée, le rôle de (Z) étant toujours dévolu à la droite (Φ_1), introduite dans (II, 2°).

On y considère deux plans variables, rectangulaires, passant par la droite (Φ_1), et leurs points d'intersection avec la directrice (D) de (Γ), désignés par h et k .

Faisons jouer les rôles de u et u_1 [dans (II, 1° b)] par ces points h et k . L'affinité orthogonale d'axe CF et de rapport $\sin \alpha$ change respectivement h et k en h' et k' sur la droite fixe (D'), transformée de (D) dans cette affinité. Le segment $h'k'$ de (D') est vu de F sous un angle droit.

Comment se correspondent les points variables h et k sur (D) ?

Soient q' le pied de la perpendiculaire abaissée de F sur (D') et q le point de (D) que l'affinité précédente transforme en q' . Les droites hh' , kk' , qq' sont parallèles à la direction, fixe, de (Φ) ; d'après le théorème de Thalès, les segments qh , qk , varient proportionnellement aux segments $q'h'$, $q'k'$. (D) et (D') étant supposées orientées $\overline{qh} = m \cdot \overline{q'h'}$ $\overline{qk} = m \cdot \overline{q'k'}$, m étant un nombre constant.

Or, le triangle $h'Fk'$, rectangle en F, donne :

$$\overline{q'h'} \cdot \overline{q'k'} = -\overline{q'F}^2 = \text{Cte.}$$

Il en résulte $\overline{qh} \cdot \overline{qk} = -m^2 \cdot \overline{q'F}^2 = \text{Cte.}$

L'analogie entre la correspondance h/k et la correspondance h'/k' incite à interpréter cette dernière relation comme il suit : sur la perpendiculaire

élevée en q à la droite (D), considérons les points de rencontre du cercle de diamètre hk avec cette droite, appelons-les λ et μ :

$$\overline{qh} \cdot \overline{qk} = \overline{q\lambda} \cdot \overline{q\mu} = -q\lambda^2 = \text{Cte.}$$

Donc λ , et aussi son symétrique μ , par rapport à (D), sont fixes. De chacun des points λ et μ on voit le segment variable hk sous un angle droit.

4° Montrer que $\Phi_1(h)$ varie proportionnellement à la distance $h\lambda = h\mu$. D'après (II, 2°, a), $\Phi_1(h)$, distance de h à la droite (Φ_1) , est égale à la distance Fh' .

Dans le triangle rectangle $h'Fk'$

$$Fh'^2 = \overline{h'q'} \cdot \overline{h'k'}$$

et
$$\overline{h'q'} = \frac{\overline{hq}}{m} \quad \overline{h'k'} = \frac{\overline{hk}}{m} \quad \text{d'où} \quad Fh'^2 = \frac{\overline{hq} \cdot \overline{hk}}{m^2}.$$

Dans le triangle rectangle $h\lambda k$
$$\lambda h^2 = \overline{hq} \cdot \overline{hk}.$$

Ainsi
$$\frac{Fh'^2}{\lambda h^2} = \frac{1}{m^2} = \text{Cte} \quad \frac{Fh'}{\lambda h} = \text{Cte} \quad \Phi_1(h) \text{ varie proportionnellement à } h\lambda.$$

C.Q.F.D.

Le coefficient de cette proportionnalité est $\frac{1}{|m|}$, qui est aussi le rapport de $h'k'$ à hk , et aussi celui de λk à Fk' [k pouvant être considéré comme une position du point variable h quand il varie sur (D)]. Les triangles $Fh'k'$ et λhk sont semblables (côtés proportionnels).

Les triangles λhk et μhk , symétriques l'un de l'autre par rapport à (D), sont tous deux semblables au triangle $Fh'k'$, mais l'un d'eux est directement semblable au triangle $Fh'k'$. Comme jusqu'ici, rien ne distingue dans leur définition λ et μ , nous pouvons supposer que ce soit λhk qui soit directement semblable à $Fh'k'$.

Autrement dit, il existe une opération de similitude directe (Σ) qui fait correspondre aux points λ, h, k , les points respectifs F, h', k' . Elle transforme (D) en (D'), et le vecteur $\overrightarrow{\lambda q}$ en le vecteur $\overrightarrow{Fq'}$. Ceci montre que (Σ) , déterminée par cette remarque, est indépendante de la position de h sur (D). Il est, à cet effet, à remarquer que λ est lui-même indépendant de cette position : car, en orientant (D) selon un axe $\overrightarrow{(D)}$, l'affinité fait correspondre à $\overrightarrow{(D)}$ un axe $\overrightarrow{(D')}$ porté sur (D') et le sens de rotation autour de λ d'un mobile parcourant (D) dans le sens de $\overrightarrow{(D)}$ doit être le même que le sens de rotation autour de F d'un mobile, homologue du précédent par (Σ) , qui parcourt (D') dans le sens de $\overrightarrow{(D')}$.

Considérons comme position particulière de h sur (D), le point A, déjà considéré dans (I), tels que FA soit perpendiculaire à CF. La position correspondante de h est le point de rencontre de CF avec (D), que nous appelons B [en excluant le cas particulier où CF est parallèle à (D), pour abréger, puisque C est supposé arbitraire à l'intérieur de (I)].

B étant sur CF est son propre homologue dans l'affinité, et par consé-

quent aussi dans la similitude (Σ) qui fait correspondre k' à k . B est donc le centre de la similitude (Σ).

Etudions la figure particulière, où le cercle de diamètre AB, position du cercle de diamètre hk , obtenus quand h vient en A, passe encore par λ et μ

et, de plus, par F, puisque $\widehat{AFB}$ est un angle droit. A a comme homologue dans l'affinité, et aussi dans la similitude (Σ), le point A' de la demi-droite

FA, tel que $\frac{\overline{FA'}}{\overline{FA}} = \text{rapport de l'affinité} = \sin \alpha < 1$, donc A' est entre F

et A. L'angle $\widehat{FBA'}$, homologue dans (Σ) de l'angle $\widehat{\lambda BA}$, est égal à $\widehat{\lambda BA}$ et de même sens que lui. Sur le demi-cercle de diamètre AB et qui contient

le point λ , est situé aussi F, puisque $\widehat{FBA}$ a le même sens que $\widehat{FBA'}$, donc aussi même sens que $\widehat{\lambda BA}$. De plus, $\widehat{FBA} > \widehat{FBA'}$, ou $\widehat{FBA} > \widehat{\lambda BA}$.

Il en résulte que F et A, sur le cercle de diamètre AB, sont, de part et d'autre de la corde $\lambda\mu$. A est le milieu de l'arc de ce cercle intercepté par l'angle inscrit $\lambda F\mu$. Donc les demi-droites d'origine F, contenant respectivement les points λ et μ , ont comme bissectrice intérieure la demi-droite FA.

La similitude (Σ) fait correspondre aux points B, λ , A, les points respectifs B, F, A'. Elle conserve les angles de demi-droites et les rapports de segments, d'où le fait que les triangles λBF et ABA' sont semblables. On en déduit la proportion :

$$(\mathcal{P}_1) \quad \frac{B\lambda}{BA} = \frac{F\lambda}{A'A}.$$

Rien n'est changé, aux considérations précédentes, si on substitue à l'affinité d'axe CF et de rapport $\sin \alpha$, l'affinité d'axe CF et de rapport opposé $-\sin \alpha$. Mais alors il y a lieu de remplacer A' par le point, que nous appelons A'', symétrique de A' par rapport à F, et la droite (D') par la droite (D'') symétrique de (D') par rapport à la droite BFC. L'axe $(\overrightarrow{D'})$ défini plus haut, est remplacé par l'axe $(\overrightarrow{D''})$, également symétrique de $(\overrightarrow{D'})$, par rapport à BFC.

Les sens de rotation définis par les axes $(\overrightarrow{D'})$ et $(\overrightarrow{D''})$ relativement au point F sont opposés, ce qui montre que dans la substitution opérée, c'est maintenant le point μ qu'il convient de substituer au point λ .

Par analogie avec la proportion ($\mathcal{P}_1$) nous obtenons, désormais :

$$(\mathcal{P}_2) \quad \frac{B\mu}{BA} = \frac{F\mu}{A''A} \quad (A'' \text{ remplaçant } A', \mu \text{ remplaçant } \lambda).$$

Les premiers membres des égalités ($\mathcal{P}_1$) et ($\mathcal{P}_2$) étant visiblement égaux, de la comparaison de ces proportions résulte la nouvelle proportion :

$$\frac{F\lambda}{A'A} = \frac{F\mu}{A''A}.$$

Ces rapports égaux sont encore égaux à

$$\frac{F\mu - F\lambda}{AA'' - AA'} = \frac{F\mu + F\lambda}{AA'' + AA'}.$$

Or $AA'' - AA' = A'A'' = 2FA'$, A étant extérieur au segment $A'A''$, et
 $AA'' + AA' = AF + FA'' + AF - FA' = 2AF$. Ainsi

$$\frac{F\mu - F\lambda}{2FA'} = \frac{F\mu + F\lambda}{2AF} \quad \text{d'où}$$

$$\frac{F\mu - F\lambda}{F\mu + F\lambda} = \frac{FA'}{FA} = \sin \alpha.$$

En faisant abstraction de la distinction opérée entre λ et μ , et qui n'a eu d'autre rôle que de préciser des considérations de situation, on arrive donc à la relation :

$$(\mathcal{P}_3) \quad \frac{|F\lambda - F\mu|}{F\lambda + F\mu} = \sin \alpha$$

que le texte de l'énoncé demandait de prouver.

5° Déterminer une droite (Δ_1) , sécante à (P) en C , telle que tous les couples de plans $\Delta_1 h$ et $\Delta_1 k$ restent orthogonaux quand h varie sur (D) , k ayant la même signification que dans (II, 3°).

Supposons le problème résolu et (Δ_1) trouvée : bien entendu les considérations de (II, 3°) et (II, 4°) développées en considérant (D) dans (P) et (Φ_1) sécante à (P) en F , formant avec (P) l'angle α sont encore valables en substituant seulement à (Φ_1) la droite (Δ_1) et à F le point C , à l'angle α l'angle β , que (Δ_1) forme avec (P) . Mais il nous faut déterminer, à partir des données, la droite (Δ_1) passant par C .

Par hypothèse, les couples de plans orthogonaux passant par (Δ_1) déterminent, toujours sur (D) , les mêmes couples de points h et k , donc des segments hk vus des mêmes points λ et μ (qui sont connus) sous des angles droits. Nécessairement, d'après les résultats de (II, 4°) :

la projection orthogonale de (Δ_1) sur (P) est une droite portant la bissectrice des demi-droites $C\lambda$ et $C\mu$;

l'angle β satisfait à la relation analogue à $(\mathcal{P}_3)$:

$$(\mathcal{P}_4) \quad \frac{|C\lambda - C\mu|}{C\lambda + C\mu} = \sin \beta.$$

C est distinct de λ et de μ , sans quoi il serait, sur le cercle de diamètre AB et sur la droite BF , lignes qui n'ont en commun que B et F ; or, C est distinct de F , et de B , puisque C ne peut être situé sur (D) .

La bissectrice de $C\lambda$ et $C\mu$ est donc portée par une droite bien déterminée et connue : en général, cette droite coupe (D) en un point A (connu) et la perpendiculaire à CA en C coupe, de même (D) , en un point $\bar{B}$ (connu).

Dans le plan perpendiculaire à (P) , mené par la droite $C\bar{A}$ [où plan perpendiculaire en C à $C\bar{B}$], il existe deux droites faisant avec P l'angle β ($0 < \beta < \frac{\pi}{2}$) défini par la relation $(\mathcal{P}_4)$. Cet angle existe, car

$$|C\lambda - C\mu| < C\lambda + C\mu.$$

La droite (Δ_1) est nécessairement l'une de ces droites.

Mais il nous reste à montrer que l'une quelconque des droites ainsi construites répond au problème posé :

Ce que l'on sait, c'est que deux plans rectangulaires quelconques, passant par (Δ_1) , droite ainsi choisie, déterminent sur (D) des points h et l , tels que les segments hl sont vus de certains points fixes $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ sous des angles droits.

Les plans $\Delta_1 \bar{A}$ et $\Delta_1 \bar{B}$, par construction de (Δ_1) , sont perpendiculaires, puisque $\bar{C}\bar{B}$ est perpendiculaire au premier de ces deux plans et contenu dans le second. Ils coupent (D) en $\bar{A}$ et $\bar{B}$, qui sont les points d'un couple (hl) . Les points $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$, voient $\bar{A}\bar{B}$ sous un angle droit, ils sont donc sur le cercle de diamètre $\bar{A}\bar{B}$ et sont symétriques par rapport à (D) .

Or, ces propriétés appartiennent aux points λ et μ , car on pouvait construire $\bar{A}$ et $\bar{B}$ comme points de rencontre de (D) avec le cercle $C\lambda\mu$.

Supposons, pour fixer les idées, $C\lambda > C\mu$, dans ces conditions, on déduit de $(\mathcal{P}_4)$

$$\frac{C\mu}{C\bar{\lambda}} = \frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta} < 1.$$

On peut distinguer les points $\bar{\lambda}$ et $\bar{\mu}$ en supposant $C\bar{\lambda} > C\bar{\mu}$: on sait que (Δ_1) faisant l'angle β avec (P) ,

$$\frac{C\bar{\mu}}{C\bar{\lambda}} = \frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta}$$

$C\bar{\mu}$ et $C\bar{\lambda}$, comme $C\mu$ et $C\lambda$ ont pour bissectrice intérieure $\bar{C}\bar{A}$.

On passe donc de λ à μ , et aussi de $\bar{\lambda}$ à $\bar{\mu}$, par une symétrie relativement à la droite $\bar{C}\bar{A}$, suivie d'une homothétie de centre C et de rapport $\frac{1 - \sin \beta}{1 + \sin \beta}$.

Cette opération ponctuelle (*similitude indirecte*) transforme le cercle passant par $C, \bar{A}, \bar{B}$ en un autre cercle, de rayon plus petit, passant par C, μ , qui coupe donc le premier cercle en C et μ . $\bar{\mu}$ doit appartenir au nouveau cercle et est distinct de C , donc $\bar{\mu}$ n'est autre que μ , et $\bar{\lambda}$ n'est autre que λ .

De l'identité, ainsi prouvée entre $(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ et (λ, μ) résulte que tout cercle $h\bar{\lambda}\mu$ est confondu avec le cercle $h\bar{\lambda}\mu$; ces cercles recoupent (D) respectivement en l et k , donc il y a identité entre les couples (hk) et les couples (hl) , c'est-à-dire que les plans $\Delta_1 h$ et $\Delta_1 k$ sont orthogonaux, quel que soit h .

Le problème posé est possible et admet deux solutions (Δ_1) symétriques par rapport à (P) .

Remarque. — L'étude des cas où B est rejeté à l'infini sur D , et où la même circonstance se présente pour l'un des points $\bar{A}$ ou $\bar{B}$ construits dans (II. 5°) ne présente pas de difficultés, et les résultats trouvés demeurent valables quant aux conclusions finales.

(Δ_1) étant l'une des droites fixes ainsi trouvées, que peut-on dire du rapport $\frac{\Delta_1(h)}{h\bar{\lambda}}$?

On a trouvé dans (II, 3°) que $\frac{\Phi_1(h)}{h\lambda} = \text{Cte}$

De même ici $\frac{\Delta_1(h)}{h\bar{\lambda}} = \text{Cte}$ et comme λ est identique à $\bar{\lambda}$, le rapport mentionné dans l'énoncé est constant.

Il en résulte que, lorsque h varie sur (D), le rapport $\frac{\Delta_1(h)}{\Phi_1(h)} = \text{Cte}$.

6° *Conséquences* : Rappelons-nous ici que m étant un point quelconque de la conique (Γ), il lui correspond le point appelé h à l'intersection de (D) et de la droite Cm .

Dans l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{Cm}{Ch}$, la droite (Δ_1) , issue de C est invariante : les distances de h et de m à cette droite sont homothétiques, ce qui s'écrit : $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta_1(h)} = \frac{Cm}{Ch} = \frac{hm}{Ch} \times \frac{Cm}{hm}$.

Le parallélisme de Cn et mF donne $\frac{Cm}{hm} = \frac{Fn}{Fh}$.

L'homothétie de centre F et de rapport $\frac{Fn}{Fh}$, où la droite (Φ_1) issue de F est invariante, montre que $\frac{Fn}{Fh} = \frac{\Phi_1(n)}{\Phi_1(h)}$.

Il vient $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta_1(h)} = \frac{hm}{hC} \frac{\Phi_1(n)}{\Phi_1(h)}$ et comme on a vu dans (II 5°) que $\frac{\Delta_1(h)}{\Phi_1(h)} = \text{Cte}$

$$\Delta_1(m) = K' \frac{hm}{hC} \Phi_1(n) \quad K' \text{ étant une constante.}$$

Rappelons ici la relation (1) de (I, 3°) :

$$\Phi(n) = K \frac{hC}{hm} \Delta(m) \text{ d'où } \Delta(m) = \frac{1}{K} \frac{hm \cdot \Phi(n)}{hC}.$$

Formons le rapport $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)}$.

$$\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)} = KK' \frac{\Phi_1(n)}{\Phi(n)}$$

On a vu dans (II, 2°) que lorsque n décrit (C)

$$\frac{\Phi_1(n)}{\Phi(n)} = \text{Cte.}$$

Donc enfin $\frac{\Delta_1(m)}{\Delta(m)} = \text{Cte} \quad (5).$

On a prouvé, en résumé, qu'à tout point C intérieur à la conique (Γ) on peut faire correspondre une certaine droite (Δ) dans le plan (P) de la conique et une certaine droite (Δ_1) coupant le plan (P) en C , déterminée à la symétrie près par rapport au plan (P), tel que le rapport des distances d'un point variable de (Γ) aux droites (Δ_1) et (Δ) demeure constant. Ce théorème est dû à Henri Lebesgue.

III. 1^o *Que peut-on dire de la projection orthogonale de (Γ) sur un plan $(\mathcal{P})$ perpendiculaire à (Δ_1) ?*

Il y a proportionnalité, avec rapport constant, entre $\Delta(m)$ et la distance de m à un plan fixe quelconque passant par (Δ) . Choisissons ce plan parallèle à la droite (Δ_1) , c'est alors le plan projetant orthogonalement (Δ) sur $(\mathcal{P})$. $\Delta(m)$ est proportionnel à la distance de m à ce plan, qui est aussi celle de la projection de m à la projection de (Δ) .

$\Delta_1(m)$ est la distance de la projection de m à un point fixe, tracé de (Δ_1) sur $(\mathcal{P})$. Il en résulte, d'après (5), que la *courbe projection de (Γ) sur le plan $(\mathcal{P})$ est une conique (γ) ayant pour foyer la trace (ou projection) de (Δ_1) et pour directrice la projection de (Δ) .*

En déduire le lieu du point de rencontre des tangentes aux extrémités d'une corde de (Γ) passant par le point C :

Ce lieu est projeté sur $(\mathcal{P})$ suivant le lieu analogue relatif à la conique (γ) , les cordes de (γ) passant par un de ses foyers. On reconnaît que ce lieu projeté est une droite, la directrice de (γ) relative à ce foyer. Et le lieu proposé dans (P) n'est autre que la droite (Δ) .

Ainsi, la droite (Δ) correspondant au point C, est la « polaire » de C par rapport à (Γ) ; cela aurait pu résulter de l'emploi de la transformation qui fait l'objet de la partie (I).

De la proposition connue : « une tangente à (γ) , limitée d'une part à son point de contact, d'autre part, à son point de rencontre avec une directrice, donne un segment vu du foyer correspondant sous un angle droit », résulte de même, par transfert à (Γ) , que :

le segment d'une tangente à (Γ) , limité à son point de contact et à la droite (Δ) , est vu de la droite (Δ_1) sous un angle dièdre droit.

2^o Supposons, pour éviter des complications d'emploi de mesures algébriques, que (Γ) soit une ellipse, ou une parabole. (γ) est nécessairement une ellipse, ou une parabole également (cette dernière courbe n'a qu'une tangente de direction donnée, propriété projective en projections cylindriques).

On considère deux points C et C' intérieurs à (Γ) et par ailleurs quelconques. C est le « pied » sur (P) de la droite (Δ_1) ; C' est, de même, le « pied » sur P, d'une droite analogue (Δ'_1) . La droite CC', qui contient des points intérieurs à (Γ) coupe nécessairement (Γ) en un point au moins à distance finie, soit m_0 . On appelle θ la mesure de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta_1m}$ et θ' celle de l'angle dièdre $\widehat{m_0\Delta'_1m}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \theta' \leq \pi$).

Etablir que lorsque m varie sur (Γ) , θ et θ' sont liés par une relation de la forme :

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2}} = \text{Cte.}$$

Soient t le point de rencontre des tangentes à (Γ) en m et m_0 , p le point de rencontre des tangentes aux extrémités de la corde de (Γ) située sur Cm_0 . Projetons orthogonalement la figure sur le plan (Φ) perpendiculaire en C à (Δ_1) : soient T, P, M_0, M les projections de t, p, m_0, m . CP est perpendiculaire à CM_0 , et d'après le théorème de Poncelet, CT est bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{MCM_0}$, rectiligne du dièdre $m\Delta_1m_0$. Donc $\widehat{M_0CT} = \frac{\theta}{2}$. Les perpendiculaires TK, TL abaissées de T sur les droites

CM_0, CP , donnent lieu à la relation $\frac{KT}{LT} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$.

En revenant au plan (P) , les segments KT et LT sont projections sur (Φ) des segments kt et lt , le premier parallèle à Cp , le second parallèle à Cm_0 . Quand m se déplace sur (Γ) , tk et tl gardent des directions fixes, donc $KT = kt \times \text{Cte}$, $TL = tl \times \text{Cte}$, et l'on peut écrire : $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{kt}{lt} \times \text{Cte}$.

On voit de même, en considérant une projection auxiliaire de (P) sur le plan (Φ') perpendiculaire en C' à (Δ'_1) , que : $\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \frac{k't}{l't} \times \text{Cte}$

$k't$ étant parallèle à $C'p$, et $l't$ étant parallèle à $C'm_0$. Les points t, l, l' sont donc alignés, l sur Cp , l' sur $C'p$.

Par division, on obtient : $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \frac{kt}{k't} : \frac{lt}{l't}$.

Quand m varie sur (Γ) , t se déplace sur la tangente m_0p , $\frac{kt}{k't}$ reste constant, la figure tkk' variant homothétiquement, le centre d'homothétie étant m_0 .

D'autre part $\frac{lt}{l't} = \frac{C'm_0}{Cm_0} = \text{Cte}$.

D'où $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \text{Cte}$.

C.Q.F.D.

Résultats et observations : Notre maître regretté, Henri LEBESGUE, souhaitait que sa contribution si originale à éclaircir les questions de Mathématiques élémentaires relatives aux coniques, fasse l'objet d'études proposées aux concours, estimant que rien n'était plus propre à mettre en évidence les beautés de la Géométrie.

Jusqu'ici, ce vœu du grand géomètre était resté lettre morte : c'est en hommage à sa mémoire que nous avons tenté de lui donner un essai de satisfaction.

Cependant, la transposition de ses méthodes pour les rendre accessibles à de jeunes esprits, nous a conduit à proposer ce sujet certainement long et hardi. Le résultat de ces efforts est cependant loin d'être décevant.

Il était à prévoir que les concurrents seraient arrêtés dans la partie (II, 4°) et dans la partie (II, 5°) qui n'ont été effectivement qu'abordées, vu le

manque de temps pour rédiger des solutions complètes ; en les donnant ici, nous avons le sentiment d'abuser un peu de l'hospitalité de ce *Bulletin*.

Nous devons citer, pour faire le point de l'impression générale résultant de la correction, des considérations développées, de manière très pertinente, par l'un des professeurs du Jury, qui s'est intéressé très vivement à cette expérience.

« Novice à ce Jury, je ne sais s'il est utile, ni même convenable, de dire les remarques d'ordre général que j'ai pu faire ; mais je me demande précisément, si, après une autre expérience analogue, celle de cette année ne ferait pas écran entre mes souvenirs de lycéen ou normalien et de nouvelles impressions.

En effet, je n'ai enseigné en Élémentaires que pendant mon stage d'agrégation, puis dans une classe mêlée provisoirement à une classe de Saint-Cyr. J'ai interrogé aussi au baccalauréat. Chaque année, plus que la précédente, j'ai été effaré du peu de solidité des connaissances des bacheliers en Mathématiques, et me suis trouvé tenté de parler d'une faillite de l'Enseignement secondaire, et de dire trompeurs les programmes d'étude et d'examens qui ne correspondent pas aux possibilités intellectuelles de la génération actuelle.

Or, en corrigeant cette soixantaine de copies des meilleurs élèves de l'Enseignement secondaire (et aucune d'elles n'est très bonne), il m'a semblé, au contraire, qu'il n'y avait pas, aujourd'hui, moins le *très bons élèves* que par le passé, et que, pour ceux-là du moins, des termes comme ceux que j'emploierais en parlant des assez bons et des moyens seraient injustifiés.

Plus précisément :

1) Je m'attendais à trouver beaucoup de démonstrations utilisant des triangles semblables, des angles alternes-internes, valables dans un cas spécial de figure. Or, au contraire, les concurrents m'ont paru très familiarisés avec le théorème de Thalès sous sa forme algébrique, et surtout plusieurs ont bien su remarquer, dans une figure, que tels éléments se correspondaient dans une transformation simple (homothétie, affinité...) ; je vois là un signe net d'une grande amélioration de l'enseignement de la Géométrie.

2) Je craignais aussi l'emploi plus ou moins heureux de notions hors du programme (points à l'infini) ; sauf dans quelques copies il n'y en a guère eu.

3) Certaines copies sont peu soignées ; bien entendu, quelques-unes contiennent des fautes d'orthographe ; dans l'une d'elles, d'ailleurs assez bonne, les deux figures principales du début ont été omises. Mais dans l'ensemble, la rédaction a été assez nette ; la division, extrêmement précise du texte, facilitait d'ailleurs considérablement le travail des concurrents.

Je ferais pourtant deux critiques générales, l'une déjà indiquée à propos du paragraphe 3^e de la I^{re} partie : il semble que les constructions géométriques, le tracé expérimental du lieu d'un point d'une figure variable, l'étude de celle-ci au voisinage de ses formes limites ne soient pas employées dans la recherche d'une solution. De même, je n'ai vu aucun candidat s'aider au début de la II^e partie d'une petite épure de géométrie descriptive.

Mais, surtout, j'ai l'impression que, parmi les concurrents, il n'y en a pas eu pour qui aient été dégagées nettement, à propos des exemples du programme, les propriétés des transformations. Certes, c'est là un travail de synthèse qui a plus sa place en Mathématiques supérieures qu'en élémentaires ; mais, à mes yeux, les concurrents qui auraient pu commettre plus souvent un lapsus en employant le mot usuel de « transformé » au lieu du mot « associé » du texte (choisi, je pense, pour éviter toute confusion), n'auraient pas dû être surpris de se voir demander si cette transformation ponctuelle était *toujours définie* ; ils auraient dû se demander, d'eux-mêmes, si elle avait une *inverse*, si celle-ci était toujours définie, si elle était distincte de la transformation initiale... Je n'ignore pas les difficultés qu'éprouvent mes collègues de Mathématiques élémentaires pour traiter entièrement un très lourd programme ; mais, sinon dans une leçon magistrale, qui ne pourrait être faite que tard dans l'année, au moins à l'occasion d'un problème, une comparaison, par exemple, des différentes transformations du programme serait, il me semble, extrêmement fructueuse. »

Remarques particulières : 1° a) Les concurrents n'ont pas toujours compris le paragraphe : « Que devient cette homothétie... ». Elle devient une translation (variable avec m) ; certains ont donné une construction de n dans ce cas.

b) Quand m est sur CF, la transformation a le même effet qu'une inversion. Très peu de candidats l'ont exprimé.

c) Au contraire, la plupart des concurrents ont bien reconnu que, pour m sur (D), n était à l'infini et réciproquement ; mais ce n'est qu'une minorité des meilleurs qui a pensé à préciser la direction du point à l'infini, n correspondant à une position de m sur (D), et inversement.

d) « ... n décrit une droite N... » Il résulte de ce qui précède, que les concurrents n'ont pas su profiter des indications précises que fournissaient les premiers paragraphes. En fait, sur 60 copies lues, 40 n'ont pu démontrer le fait demandé ; parmi ces 40 une dizaine contiennent pourtant des indications sur des propriétés de (N) obtenues en supposant que ce soit une droite. Une dizaine de copies contiennent des démonstrations fantaisistes méritant d'être pénalisées.

Cette fin du paragraphe 1° a donc été le premier obstacle véritable des concurrents ; plusieurs ont donné la démonstration très simple qui s'imposait ; l'un d'eux a donné une démonstration plus longue, mais dénotant, de la part de son auteur, une certaine maturité : « (N) est une droite si (M) passe par (C) ; mais si l'on compare deux transformations définies par la même droite (D), le même point F, et deux points C, C', situés sur la même parallèle à (D), les transformées n, n' d'un même point se déduisent l'un de l'autre par translation : $\overrightarrow{nn'} = \overrightarrow{CC'}$; il suffisait alors, par une translation, d'amener C sur (M). »

2° Cette question a été bien comprise, et, en général, bien faite (5 copies sur 60 n'ont pas la moyenne pour elle). Rares pourtant ont été ceux qui ont fait un rapprochement entre la nature de la conique (possibilité pour m

d'aller à l'infini) et l'intersection de (D) et de (C). Je n'ai vu signaler nulle part, que les droites se transformant en droites, les tangentes à (Γ) se transformaient en tangentes à (C), d'où résultait une vérification de la propriété immédiate « F intérieur à (C) ».

3° Cette question a été rarement traitée ; pourtant, on trouve dans une quinzaine de copies des réponses plus ou moins complètes — ou consciencieuses — aux deux premiers paragraphes. Tout d'abord la grande majorité des concurrents construit la droite (Ψ) associée à (Φ), et non la droite (Δ) dont (Φ) est l'associée. Résultat d'une lecture peu attentive du texte qui ne prêtait à aucune ambiguïté, certes, mais avec cette circonstance atténuante qu'ils avaient constaté, en 1°, que la transformation était réciproque pour des points particuliers.

II^e PARTIE. — 1° A été très bien compris, sinon très bien expliqué. Pourtant quelques candidats, qui avaient bien traité cette question, ont préféré continuer dans les questions suivantes (il est vrai qu'ils ne sont pas allés bien loin) à se servir de figures de l'espace.

2° Egalement bien comprise et bien traitée, par ceux, du moins, qui étaient allés jusqu'à elle.

3° Au contraire, cette question a arrêté presque tous les concurrents, et ceux qui l'ont franchie, n'ont pu venir à bout de la seconde question du 4°.

Un des concurrents a récité, à l'occasion de la question 3°, des propriétés de l'involution à points doubles imaginaires qui, effectivement, auraient pu lui être utiles, mais qu'il n'a pas su exploiter.

La formule $\frac{|F\lambda - F\mu|}{F\lambda + F\mu} = \sin \alpha$ n'a pu être démontrée.

Il est remarquable que tous les correcteurs ont mis l'accent sur les mêmes insuffisances.

Un autre signale que six sur 60 des candidats ont montré que $F\lambda$ et $F\mu$ sont des droites symétriques par rapport à la droite FA, mais aucun n'a démontré la propriété pour les demi-droites.

148 concurrents ont pris part à l'épreuve, dont trois ont remis des copies blanches. Les copies ont été triées dans une première réunion, après lecture de chacune par deux correcteurs. 24 ont été retenues pour un examen plus approfondi, par tous les correcteurs.

Palmarès : Il a été attribué un premier et un second prix (pas de troisième prix) et 10 accessits. Les notes globales (sur 20) varient de 18,8 à 9,6.

La copie classée première est remarquable par la qualité des raisonnements, malgré quelques lourdeurs. La seconde est fort intelligente, mais il lui manque des raccourcis en langage ordinaire : la rédaction est sobre, et ne fait pas assez usage de mesures algébriques. La partie III a été abordée.

Les autres copies primées sont estimables, soit par l'intelligence des figures, soit par le soin de la rédaction.

Le premier prix est le lauréat de l'an dernier du Concours général de Première qui y fut classé premier. On retrouve également des lauréats de ce concours, obtenant, en 1950, les premier, troisième et septième accessits.

Dans l'ensemble de toutes les copies, on constate une très forte accumulation au-dessous de 8 sur 20, et une quinzaine de résultats au-dessus de 10, qui ont fourni d'ailleurs presque tous les lauréats.

La comparaison du concours de cette année avec celui de l'année précédente est plutôt en faveur des concurrents de 1950, surtout si l'on prend comme élément de comparaison l'ensemble des résultats obtenus par tous les concurrents. Les copies ont été signalées cette année comme de correction plus aisée, ce qui est très encourageant puisqu'il s'agissait cette fois de Géométrie. Il nous est permis de conclure sur une impression nettement optimiste.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

P. ROBERT.

DEUXIÈME PARTIE

Etude élémentaire des méthodes statistiques

Exposé de l'Ingénieur Général NICOLAU, Directeur de l'Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction mécanique, à la réunion du 20 février 1950 des professeurs de Mathématiques.

MONSIEUR LE DIRECTEUR GÉNÉRAL,

MONSIEUR LE PRÉSIDENT,

MESDAMES, MESSIEURS,

M. le Professeur FRÉCHET a bien voulu me demander de vous entretenir, en son absence, de l'enseignement de l'Analyse statistique, qui, comme vous le savez, est l'objet de ses préoccupations. Il fallait un calculateur, pourriez-vous justement dire, et voici venir, non pas certes un danseur, mais un simple ingénieur. Mon excuse c'est que cet ingénieur a été conduit, sur le tard, à se faire maître d'école ; vous y gagnerez de connaître le point de vue d'une fraction d'usagers des Mathématiques que vous avez mission d'enseigner, qui fait partie de la profession appelée sans doute à en tirer le plus important bénéfice.

Pour vous situer exactement dans l'atmosphère où je me place, permettez-moi de vous indiquer tout d'abord, en quelques mots, la position et la structure des Ecoles de l'Armement que j'ai eu le très grand honneur, non seulement de diriger, mais aussi, pour une part notable, de créer ou d'établir après la Libération sur des bases nouvelles.

D'une part, ces écoles comprennent l'Ecole Nationale Supérieure de l'Armement, notre école d'application qui, sur le même plan que les écoles d'application du Génie Maritime et de l'Aéronautique, a pour objet de transformer en ingénieurs militaires de l'Armement les jeunes bottiers de l'X affectés dans notre Corps. Il s'agit là de leur mettre avant tout les pieds

au sol, puis de leur faire faire le tour d'horizon des techniques de production qu'ils auront à mettre en œuvre et de mettre l'accent sur les connaissances scientifiques qui, en l'état actuel de ces techniques et de leurs tendances, paraissent les plus aptes à en assurer le progrès.

D'autre part, ces écoles comprennent un dispositif complet de promotion ouvrière, permettant d'élever progressivement les meilleurs de nos apprentis jusqu'aux galons d'ingénieurs de Travaux d'Armement, leur admission ultérieure dans le Corps des Ingénieurs militaires n'étant d'ailleurs pas exclue. Pour bien comprendre l'esprit qui gouverne ce cycle de formation technique de nos agents d'exécution, il faut songer que l'un des effets, sinon même l'un des buts du progrès technique que nous poursuivons tous, est de libérer le travailleur de l'esclavage d'un machinisme trop longtemps mal entendu ; d'où la nécessité d'élever son niveau culturel à la hauteur de la dignité qui lui est ainsi consentie. Il ne s'agit plus seulement d'apprendre à nos apprentis les gestes et les réflexes d'un métier manuel, avec les règles technologiques de la profession. Il s'agit surtout de les cultiver, d'en faire des hommes, des êtres pensants. Il s'agit d'élever leur valeur morale tout autant que leur valeur physique. Il s'agit de donner, en outre, aux meilleurs la possibilité de gravir les échelons de la hiérarchie professionnelle dans la mesure de leurs capacités ou de leurs efforts.

Le cadre, et pour mieux dire le support, est constitué par les quelque 23 Etablissements constructeurs et Manufactures d'Armes rattachés à la D.E.F.A., et qui, en ce temps, ne comprennent pas moins de 35.000 ouvriers, pour la plupart mécaniciens. Chaque Etablissement possède son école d'apprentissage, où les enfants sont admis, sauf exceptions, après le certificat d'études, un bon nombre avec le brevet élémentaire. La durée de l'apprentissage est de trois ans, mais dès la deuxième année les meilleurs élèves sont sélectionnés pour subir une formation plus poussée et être maintenus à l'école une quatrième année, durant laquelle leurs vues sur le métier sont élargies. Au sortir de la troisième ou de la quatrième année, tous sont astreints à travailler au moins quatre — ou trois — années à l'atelier. Durant cette période d'assimilation sur le tas, ils ont la faculté de suivre, en dehors des heures de service, des cours préparatoires aux écoles techniques, dites normales, qui portent exclusivement sur les trois moyens d'expression du technicien (langue maternelle et éventuellement langue étrangère, mathématiques, dessin industriel). Sans chercher à élever le niveau des connaissances déjà acquises, on s'applique à faire de ces moyens d'expression, dont la « lettre » est connue, des éléments de culture.

A l'issue de ce stage, les meilleurs sont admis aux écoles techniques normales (Tarbes, St-Etienne, Paris) où, en prenant pour thèmes les techniques du métier, leur niveau culturel est élevé sensiblement au niveau du baccalauréat 2^e partie. Ils en sortent, après deux ans d'études, techniciens, c'est-à-dire préparés aux emplois de maîtrise dans les trois départements essentiels des entreprises de construction mécanique : bureau d'études, bureau de fabrication, atelier. Mais les meilleurs entrent, au concours, à l'Ecole Tech-

nique Supérieure où, en deux ans, ils atteignent le niveau actuel des ingénieurs A. et M. Ainsi, dans l'ensemble, la sélection se fait par élimination progressive, basée par suite, non seulement sur les facultés intellectuelles et les aptitudes professionnelles, mais, mieux encore, sur les facteurs moraux qui manifestent la persévérance et la volonté. C'est au demeurant une course de fond.

Arrivons maintenant à l'analyse statistique. Qu'a-t-elle à faire dans la formation des mécaniciens ?

Le temps n'est plus où les joueurs, déçus dans leurs folles espérances, se plaisaient à accabler la statistique de leurs sarcasmes.

Le temps n'est plus où de mauvais artisans pouvaient défier le bon sens de leurs contemporains au point de leur faire tourner en dérision la statistique.

« On fait dire à une statistique ce qu'on veut, à une condition, c'est qu'on évite de dire comment elle est faite », plaisantait Deteuf. Bien sûr ! N'en est-il pas de même de tout l'outillage mathématique, lequel ne saurait créer la vérité, mais bien exprimer et analyser ce qu'on lui donne pour vérité.

Le temps n'est plus où — sans doute parce que les méthodes statistiques cherchaient encore leur voie à travers le classique calcul des probabilités — d'illustres savants pouvaient, au nom d'un intransigeant déterminisme, s'insurger contre la statistique.

« Je ne comprends pas qu'on puisse arriver à une science pratique et précise en se fondant sur la statistique », écrivait Claude Bernard dans sa mémorable *Introduction à l'étude de la Médecine expérimentale...*, et encore : « Il n'y a pas de loi dans l'indéterminisme... ». « Les mathématiciens ont fait de longs calculs sur les erreurs accidentelles en leur appliquant les règles du jeu de hasard. Ces théories sont à peu près dépourvues d'intérêt pour les expérimentateurs... » Cette fois, c'est Henry Le Châtelier qui parle.

Les méthodes statistiques ont fait aujourd'hui leurs preuves dans les sciences expérimentales, et dans leurs applications techniques.

L'esprit humain se débarrasse peu à peu du Cartésianisme étriqué qui lui masquait trop de réalités physiques ; il découvre le caractère statistique du déterminisme sous les verres grossissants dont il est armé. Il apprend que l'indéterminisme a ses lois ; les méthodes statistiques les lui enseignent.

Dans le no man's land où se meut l'ingénieur, entre le fil conducteur de la théorie et la réalité physique, il n'y a place que pour le nombre. L'analyse statistique lui donne le moyen de faire parler le nombre et d'apprendre de lui, à défaut de la certitude que masquent tant d'aléas, le degré de confiance sur lequel se peut bâtir le concret.

Il va de soi que, dans tous les domaines de la conjecture, les méthodes statistiques règnent en maîtresses.

Pour l'industriel, ces domaines ne sont pas seulement d'ordre commercial, économique ou social, mais aussi d'ordre technique. Les problèmes d'exploitation qu'elles permettent notamment de résoudre (soit que les probabilités

y soient prises comme données dans le calcul des dimensions des installations, soit qu'elles constituent l'inconnue même du problème) sont classiques : charge des réseaux téléphoniques ou télégraphiques, trafics des industries de transport, débits des cours d'eau alimentant les installations hydro-électriques, etc...

Mais il est pour l'ingénieur un domaine d'élection des méthodes statistiques beaucoup plus vaste et fécond : la recherche expérimentale et le contrôle des fabrications, missions essentielles de l'ingénieur de production de notre temps.

Bien qu'en ma qualité de Président de la section « Mécanique de précision et Métrologie » de la Société Française des Mécaniciens, je me sois efforcé d'attirer avant-guerre l'attention des mécaniciens sur cet aspect nouveau de nos techniques, comme nul n'est prophète en son pays, il a fallu que la nouvelle de l'extrême fécondité des résultats acquis durant la guerre nous parvienne des pays anglo-saxons pour que nos ingénieurs de production commencent à dresser l'oreille.

Non seulement l'analyse factorielle se propose de nous mettre en état d'interpréter correctement les résultats de nos expériences, d'en tirer le maximum d'informations et d'en déterminer le degré de confiance, mais elle entend nous permettre de fixer le programme même de ces expériences de manière à obtenir des résultats significatifs avec le minimum de dépenses. Saura-t-on jamais la moisson expérimentale qui, chaque jour, faute de discernement dans la conduite de nos recherches, se trouve perdue devant les contradictions qu'il est impossible de lever à *posteriori* ? En l'état de pauvreté de nos moyens de recherche, qui ne mesurera l'importance d'un tel moyen ?

Plus payantes encore sont les applications de l'analyse statistique au contrôle des fabrications.

A l'échelle industrielle de notre époque, l'élément fabriqué n'apparaît plus isolément, mais dans le cadre de la « population » où l'a fait naître le travail continu ou en série. C'est dire que, pour le mécanicien, la statistique est désormais partout, comme partout est la mesure.

C'est elle qui apporte une solution économique au problème du contrôle par prélèvements, solution qui tient un juste équilibre entre le risque de producteur et le risque du client.

C'est elle aussi qui, prise pour base du dimensionnement, substitue, à la froide et implacable notion de tolérance, une notion plus souple et vivante, sans rigueurs inutiles.

C'est elle, enfin, qui, dans son application la plus efficiente, le « Quality control », que nous traduisons imparfaitement « contrôle statistique des fabrications », permet, par des mesures sur des prélèvements effectués judicieusement à des intervalles réguliers, de suivre sur des graphiques l'évolution dans le temps de la valeur moyenne et de la dispersion des critères mesurés sur des échantillons prélevés. On s'assure ainsi que le fonctionnement de la machine reste normal (sous contrôle dit-on), c'est-à-dire

que la probabilité d'avoir des pièces hors tolérance reste inférieure à une valeur donnée. Cette méthode, qui a connu en Grande-Bretagne et aux U.S.A. un extraordinaire développement dans les fabrications de guerre, a permis de réaliser des économies considérables de calibres et de main-d'œuvre. Je souligne en passant qu'elle procède d'une idée très générale qui ne saurait trop être méditée. Qu'il s'agisse de fabrications ou d'enseignement, l'usage s'est établi de laisser l'ouvrier, l'élève, cheminer en quelque sorte à l'aveuglette dans une direction donnée, puis de lui révéler tout à coup, par un contrôle, par un examen, son point d'arrivée. N'est-il pas plus raisonnable et plus efficace de lui permettre de se contrôler constamment en bordant de deux traits la route à suivre ?

Tels sont, en raccourci, les besoins qui m'ont conduit à introduire l'enseignement de l'analyse statistique dans nos écoles de l'Armement.

A l'Ecole Nationale Supérieure de l'Armement, tout d'abord, où nos jeunes polytechniciens sont appelés, non seulement à pratiquer l'analyse statistique sur des cas concrets « vécus », mais à se préparer, par un enseignement assez élevé pour en dominer les moyens, à en gouverner les applications au cours de leur carrière d'ingénieur.

A l'Ecole Technique Supérieure, ensuite, où il s'agit d'obtenir que les futurs chefs de nos agents d'exécution soient assez avertis de la mise en œuvre des méthodes statistiques pour comprendre les directives qui leur sont données, pour avoir foi dans leur efficacité et pour en assurer la correcte exécution.

Aux Ecoles Techniques Normales enfin, où nos futurs agents d'exécution doivent eux-mêmes en apprendre assez pour apporter un utile concours aux applications pratiques de l'analyse statistique auxquelles il leur sera demandé de coopérer.

Le couperet de la limite d'âge m'a empêché d'étendre cet enseignement à nos écoles d'apprentissage, où je me proposais de demander à nos jeunes ingénieurs militaires d'avertir leurs futurs ouvriers, en bons apôtres, des notions très élémentaires concernant les bases expérimentales de la statistique et, jusqu'à la notion de corrélation, aussi utile aujourd'hui à mon sens pour un praticien, que celle de relation fonctionnelle qui n'en stylise généralement qu'une limite idéale pratiquement inaccessible.

Mais je sais que, dès que ce sera possible, mes successeurs réaliseront cette idée qui tend à créer dans nos Etablissements, chez les travailleurs de tous rangs attelés à la même tâche, une commune orientation d'esprit.

Mon collaborateur, l'Ingénieur Principal Girschig, Ingénieur des Arts et Manufactures, qui s'honore d'être l'élève de M. Georges Darmois, et que j'ai chargé d'introduire l'enseignement de la statistique dans nos écoles, sur les bases les plus modernes, après une information poussée en Angleterre concernant l'évolution de cette science et de ses applications dans les industries de guerre, vous exposera avec plus de pertinence que je ne saurais le faire moi-même, les programmes des cours qu'il fait lui-même, non seulement depuis 1945 à l'Ecole Nationale Supérieure de l'Armement, mais aussi

depuis 1949 à l'Institut Supérieur des Matériaux et de la Construction mécanique, école de haute spécialisation des ingénieurs mécaniciens constructeurs, que j'ai reçu mission de créer dans le cadre de l'Education Nationale (Direction de l'Enseignement Technique). Ces principes sont aussi à la base des programmes élaborés à l'usage de nos écoles techniques normales et supérieure et que développe actuellement dans ces écoles son ancien collaborateur l'Ingénieur militaire Cave.

Je ne doute pas de l'intérêt que vous prendrez à sa communication : d'une part, en effet, je suis en mesure d'indiquer que notre expérience, bien que récente, a donné déjà des résultats remarquables ; d'autre part, au moment où se pose une fois encore le problème de l'adaptation de l'enseignement, à tous ses degrés aux conditions nouvelles créées par l'incroyable progression, au cours de ce demi-siècle, de la science et des techniques qui s'en réclament dans tous les domaines, j'imagine que vous êtes tous convaincus de la nécessité de ne pas tarder davantage à répondre à l'appel lancé il y a 150 années en faveur de la diffusion des méthodes statistiques, par notre grand Laplace.

Exposé de M. l'Ingénieur militaire CAVE

MONSIEUR LE DIRECTEUR GÉNÉRAL,
MONSIEUR LE PRÉSIDENT,
MESDAMES, MESSIEURS,

Je suis très confus d'avoir à traiter, devant un auditoire aussi qualifié que le vôtre, un sujet qui relève des Sciences mathématiques et je sollicite, par avance, toute votre indulgence.

On m'a demandé de vous exposer quel pourrait être un programme d'enseignement de la statistique dans les classes des lycées. Je me sens incapable de traiter directement un tel sujet et préfère de beaucoup vous exposer les avantages qu'un ingénieur peut retirer de la connaissance de cette branche des mathématiques appliquées. Je vous laisserai le soin, connaissant le but à atteindre, d'élaborer les programmes d'enseignement correspondants, tâche pour laquelle vous êtes certainement beaucoup mieux qualifiés que moi.

Je m'efforcerai de vous convaincre que l'interprétation statistique d'un ensemble de résultats expérimentaux correspond à une conception nouvelle, souvent très féconde, de la réalité physique des phénomènes étudiés. Un enseignement élémentaire de la statistique doit avoir pour but de faire acquérir à l'élève ce mode de pensée nouveau, en le familiarisant, sur des exemples numériques concrets, à l'emploi de notions statistiques, même assez complexes. La valeur éducative d'un tel enseignement justifie, à mon avis, l'abandon d'un exposé mathématique qui serait obligatoirement très élémentaire et dont ne tireraient, en conséquence, aucun profit les élèves qui ne poursuivraient pas leurs études scientifiques dans les Facultés ou les Grandes Ecoles.

I. DESCRIPTION STATISTIQUE D'UNE SÉRIE D'OBSERVATIONS. — En abordant

dans l'Enseignement Secondaire l'étude de la physique ou de la chimie, on acquiert facilement la conviction que tout résultat scientifique peut s'exprimer par un nombre parfaitement défini que seule l'imperfection des instruments de mesure ne permet pas de connaître avec exactitude.

Cette conception trop schématique s'applique souvent très mal à la réalité. Lorsque un ingénieur prélève, par exemple, dix éprouvettes de résilience dans une même coulée d'acier, les résultats qu'il obtient diffèrent souvent entre eux de $\pm 10\%$, sans que les écarts observés puissent, dans ce cas, être attribués à l'imprécision de la machine d'essai utilisée. Les fluctuations constatées sont le signe d'une hétérogénéité de l'acier étudié, qu'il importe de connaître tout autant que la valeur moyenne de la propriété mesurée. On peut dire que, dans le domaine de la recherche appliquée, les fluctuations se manifestent très fréquemment à l'échelle macroscopique, alors qu'elles ne deviennent sensibles qu'à l'échelle moléculaire pour les propriétés physiques ou chimiques des corps purs. Il semble utile d'introduire assez tôt dans l'enseignement les notions élémentaires qui permettent de décrire la configuration d'ensemble d'une série d'observations.

Les artilleurs semblent avoir été les premiers à exploiter d'une manière pratique un ensemble d'observations non concordantes. Constatant, en effet, l'impossibilité de contrôler tous les facteurs déterminant la trajectoire d'un projectile, ils ont cherché à étudier expérimentalement la distribution statistique d'un grand nombre de coups tirés dans des conditions apparemment identiques. Ils ont ainsi négligé les caractères individuels de chaque coup, pour ne retenir que l'effet global, seul réellement efficace, du tir de nombreux projectiles. On connaît l'importance des résultats obtenus dans ce domaine. L'exemple des artilleurs peut être suivi avec profit dans tous les cas où il est impossible de contrôler, ou même de définir, l'ensemble des facteurs déterminant l'effet étudié, circonstances que l'on rencontre dans les recherches techniques, médicales, biologiques, en agriculture et dans la plupart des sciences appliquées.

S'appuyant sur des exemples numériques dont la signification concrète peut être facilement comprise des élèves, il sera facile de définir les caractères essentiels d'une distribution statistique : courbe de fréquence, courbe de fréquence cumulée, paramètres de localisation (moyenne arithmétique, médiane), paramètres de dispersion ou d'échelle (quartiles, écart type), règles d'emploi des tables numériques des principales distributions mathématiques.

II. GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE DISTRIBUTION. ÉCHANTILLONNAGE.

-- L'expérience ne fournit, en général, qu'une série limitée d'observations, série qui, dans de nombreux cas, ne comporte pas l'ensemble des résultats qu'il serait théoriquement possible de recueillir.

Lorsque l'on contrôle la résistance à la traction d'une livraison de ciment en cassant dix éprouvettes, cette série d'éprouvettes doit être considérée comme un échantillon parmi toutes celles que l'on pourrait confectionner à l'aide du lot de ciment reçu. C'est, en fait, la population « mère » que for-

meraient toutes ces éprouvettes qui caractérise, d'une façon précise, la fourniture livrée. On cherche à déduire les paramètres de la population « mère » à partir des caractéristiques de l'échantillon étudié, en faisant l'hypothèse que cet échantillon est prélevé au hasard dans la population « mère » correspondante. Sans donner de démonstrations mathématiques rigoureuses, on peut exposer la notion de convergence en probabilité comme un fait expérimental, en procédant, par exemple, au tirage au sort d'une vingtaine d'échantillons de quatre ou cinq pièces dans une population normale, de moyenne m et d'écart type σ connus, matérialisée par des fiches portant inscrites les valeurs des résistances à la traction des éprouvettes de ciment qu'elles sont censées représenter. On insistera sur le fait que les écarts entre les moyennes d'échantillons de n pièces et la moyenne théorique atteignent rarement $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ et ne dépassent pratiquement jamais $\frac{3\sigma}{\sqrt{n}}$.

Il est par suite possible d'obtenir une estimation de la valeur moyenne d'autant plus précise que l'effectif n de l'échantillon prélevé est plus important (sans toutefois que cette précision puisse dépasser la limite de sensibilité de l'appareil de mesure utilisée). On indiquera également que l'écart type empirique est une estimation convergente de l'écart type théorique σ , mais que les différences observées peuvent être très importantes lorsque l'effectif de l'échantillon est faible. Les valeurs des limites de confiance relatives aux estimations de la moyenne et de l'écart type pour des échantillons d'effectifs croissants peuvent être données sous forme de tableaux numériques permettant de préciser l'importance pratique des erreurs d'échantillonnage.

III. SIGNIFICATION DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX. TESTS STATISTIQUES.

— On est souvent conduit à comparer les résultats de différents procédés de fabrication, de plusieurs équipes d'ouvriers, l'influence de divers lots de matières premières... Ce problème est simple lorsque les mesures effectuées sont reproductibles ou que les écarts observés sont très importants par rapport à la dispersion des essais correspondants à une même classe. Dans le cas contraire, il est difficile et parfois dangereux de tirer des conclusions définitives des expériences effectuées. L'analyse statistique permet souvent d'apprécier d'une manière objective la valeur des résultats obtenus.

Supposons, par exemple, qu'une fabrique de lampes électriques veuille étudier l'influence de deux lots, A et B, de tungstène, d'origines différentes, sur la durée de vie des ampoules fabriquées. Les essais à entreprendre sont longs et les résultats pour un même lot de tungstène sont fortement dispersés. Afin d'atténuer les effets de cette dispersion, on décide d'essayer, dans des conditions identiques neuf lampes de chacun des lots A et B.

Les durées de vie moyennes sont respectivement de :

$$\bar{x}_A = 1.500 \text{ heures,} \quad \bar{x}_B = 1.350 \text{ heures.}$$

Doit-on en conclure que le lot A doit être préféré au lot B ? La comparaison des deux moyennes $\bar{x}_A$ et $\bar{x}_B$ ne permet pas de répondre à cette

question, car il manque une unité de mesure pour juger si la différence constatée est systématique ou doit être attribuée aux erreurs d'échantillonnage et serait, par suite, susceptible de s'inverser pour une nouvelle série d'essais. Cette unité de mesure ne peut être trouvée que dans la dispersion des résultats correspondants à un même lot et le test de Student apporte une réponse satisfaisante à la question posée. Il est facile de distinguer qualitativement, par un graphique analogue à celui de la figure 1, le cas où l'on doit considérer la différence observée comme systématique de ceux pour lesquels les essais entrepris ne permettent de tirer aucune conclusion. On pourra, sans démonstration mathématique, illustrer par des exemples numériques l'emploi des tables de Student. Dans la discussion des résultats obtenus on insistera plus spécialement sur le fait que l'emploi des tests statistiques limite, à une valeur raisonnable, le risque de tirer d'une série d'observations des conclusions qui ne s'appuient sur aucune évidence expérimentale réelle et permet ainsi d'éviter les nombreuses contradictions apparentes que l'on rencontre si fréquemment dans les sciences appliquées.

On pourra également exposer sur les exemples concrets le test de Fisher-Snedecor sur la comparaison des variances, ainsi que les méthodes de comparaisons de plusieurs moyennes (analyse de la variance à simple entrée). (Références bibliographiques : 1, 2, 4, 5).

IV. RÉGRESSION ET CORRÉLATION. — Si les lois de la Mécanique, de la Physique ou de l'Astronomie peuvent s'exprimer, avec une excellente approximation, par des relations fonctionnelles, un déterminisme aussi rigoureux ne convient que rarement à l'étude des sciences appliquées. Lorsque l'on mesure, par exemple, la résistance à la rupture R et la dureté H d'un grand nombre d'aciers de nuances voisines, les points représentatifs de ces mesures ne se situent pas rigoureusement sur une courbe, mais forment un nuage allongé dont le grand axe présente une pente positive (fig. 2).

Si la résistance à la rupture et la dureté n'étaient fonction que d'un seul paramètre indépendant, par exemple, la teneur en carbone des aciers étudiés, les points représentatifs se situeraient effectivement, aux erreurs de mesure près, sur une même courbe. Mais, en réalité, les caractéristiques R et H dépendent de manière complexe de très nombreux facteurs qui déterminent la qualité des aciers utilisés. Deux aciers de même dureté n'auront pas rigoureusement la même résistance à la traction et, dans ces conditions, il ne peut être question de rechercher une relation fonctionnelle entre ces deux grandeurs. On peut seulement s'efforcer de décrire, dans le cadre des expériences effectuées, les effets moyens observés. Les caractéristiques R et H ne sont, en effet, pas indépendantes, en ce sens qu'une augmentation de la dureté se traduit, *en moyenne*, par un accroissement correspondant de la résistance à la rupture : on dit que les grandeurs R et H présentent une corrélation positive. On peut ainsi prédire la valeur moyenne de la résistance à la traction d'après une mesure de dureté, mais il subsiste dans cette prédiction une marge d'incertitude d'autant plus grande que la corrélation entre les deux variables est plus lâche. La notion de corrélation, qui inclut

d'ailleurs la notion de relation fonctionnelle, permet, comme on le voit, une description plus riche et plus fidèle des observations (1, 4, 5).

V. SURVEILLANCE DE LA RÉGULARITÉ D'UNE FABRICATION. — Quels que soient les contrôles exercés au cours d'une fabrication, on sait qu'il est impossible de produire en série des pièces qui soient rigoureusement identiques entre elles. Lorsque l'on vérifie les pièces à l'aide d'appareils suffi-

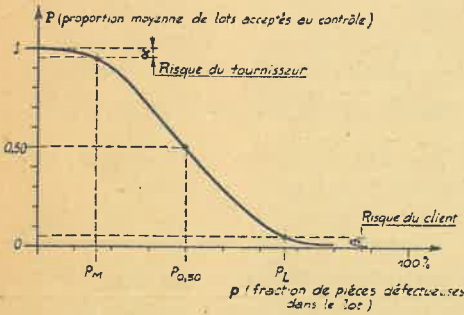


Fig. 3

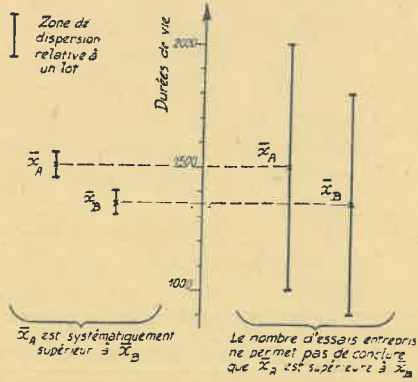


Fig. 1

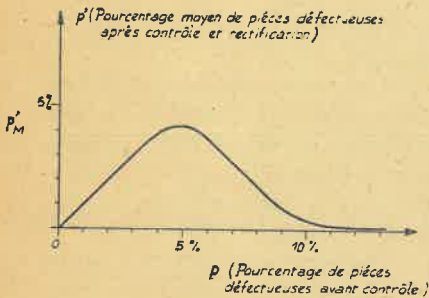


Fig. 4

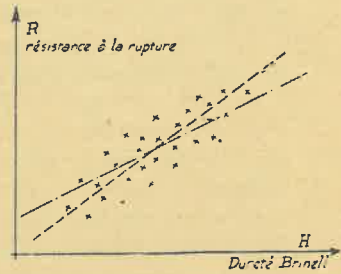


Fig. 2

samment sensibles, on constate toujours une certaine dispersion des caractéristiques mesurées, qui peuvent être dimensionnelles, pondérales, magnétiques, électriques, mécaniques, chimiques, etc... Le bureau d'étude doit tenir compte de cette dispersion en imposant un intervalle de tolérance dont les valeurs extrêmes soient tout juste compatibles avec le bon fonctionnement ou l'utilisation normale des produits fabriqués. Le chef d'atelier doit, dans ces conditions, choisir les moyens de production pour respecter les tolérances imposées. L'intervalle de dispersion d'un procédé de fabrication apparaît donc comme une caractéristique essentielle à connaî-

tre, caractéristique que les méthodes statistiques de « Quality Control » permettent de déterminer et de contrôler dans les meilleures conditions.

Les méthodes de « Quality Control » ou de surveillance statistique d'un procédé de fabrication reposent sur les bases suivantes, que l'expérience de nombreuses usines en Angleterre et aux U.S.A. a pleinement confirmées.

1° Lorsqu'un procédé de fabrication est définitivement mis au point (nous dirons « sous contrôle »), les causes possibles de variabilité des produits fabriqués sont nombreuses, très souvent indépendantes, difficiles à analyser et n'ayant individuellement aucun effet nettement prépondérant.

2° On constate, dans ces conditions, que la suite chronologique des pièces fabriquées par une machine bien au point peut très sensiblement être assimilée à une suite de pièces prélevées au hasard dans une population hypothétique dont la courbe de distribution, définie et stable dans le temps, est une caractéristique essentielle de la machine ou du procédé de fabrication utilisé.

3° La production d'une pièce peut, dans ces conditions, être assimilée à un événement aléatoire dont la probabilité de réalisation est égale à la fréquence relative de cet événement dans la distribution qui caractérise le procédé de fabrication utilisé.

4° On considérera comme indice d'un dérèglement de la machine l'obtention de toute pièce ou de tout ensemble de pièces (échantillon de n pièces produites dans un court intervalle de temps), dont la probabilité de réalisation est très faible (l'expérience conduit à utiliser un seuil voisin de $2/1000$, soit $\pm 3,09 \sigma$ pour une distribution normale).

La mise en œuvre des méthodes de surveillance statistique d'un procédé de fabrication comporte deux étapes distinctes :

a. Il faut, en premier lieu, déterminer les paramètres de la loi de dispersion qui caractérise le procédé de fabrication étudié et vérifier la stabilité de cette loi dans le temps. On obtient ce résultat en contrôlant un nombre suffisant (supérieur à 25, par exemple) d'échantillons de n pièces ($2 \leq n \leq 10$) prélevées à des intervalles de temps s'étendant sur plusieurs heures ou plusieurs jours, selon la cadence de la fabrication étudiée.

Des méthodes simplifiées d'analyse de la variance, basée sur l'utilisation de « l'amplitude » (1) comme paramètre de dispersion, permettent de vérifier très rapidement que la machine est sous contrôle, c'est-à-dire :

a) que la dispersion entre les moyennes des divers échantillons prélevés peut être expliquée par la dispersion des pièces au sein d'un même échantillon ;

aa) que la dispersion au sein des divers échantillons reste constante dans le temps.

Lorsque l'on constate que la machine étudiée n'est pas sous contrôle, pour l'une ou l'autre des raisons précédentes (a ou aa), on peut affirmer que les conditions de fonctionnement varient d'une manière systématique et qu'une

(1) L'amplitude d'un échantillon est la différence entre les mesures de la plus petite et de la plus grande pièce de l'échantillon correspondant.

étude bien conduite permettra d'identifier, et peut-être de supprimer, les causes des perturbations constatées. Lorsqu'au contraire, la machine est sous contrôle, toute tentative d'amélioration risque d'être effectuée en pure perte.

b. Lorsqu'un procédé de fabrication est définitivement mis « sous contrôle », il faut ensuite vérifier qu'aucun dérèglement nouveau ne se produit au cours du temps ; on obtient ce résultat en prélevant périodiquement des échantillons dont les moyennes et amplitudes doivent demeurer comprises entre des limites déterminées par l'étude préliminaire du fonctionnement de la machine contrôlée.

En résumé, les méthodes d'analyse statistique permettent :

1° De déceler d'une manière objective et automatique l'existence de causes systématiques de variations du fonctionnement d'une machine et d'éviter, au contraire, toute perte de temps dans la recherche d'incidents de marche inexistantes (étude et mise sous contrôle de la machine).

2° De définir numériquement la précision d'une machine et par suite de répartir à bon escient les diverses commandes en fonction des possibilités des machines dont dispose l'atelier.

3° D'effectuer, sans pertes de temps, le réglage d'une machine, en éliminant tout tâtonnement inutile.

4° De surveiller à peu de frais le fonctionnement d'une machine et de déceler immédiatement tout dérèglement effectif, en évitant également toute intervention non justifiée.

5° Dans le cas où la dispersion de la machine est inférieure aux tolérances imposées, de supprimer toute vérification individuelle des pièces produites, en substituant au contrôle passif, et à *posteriori*, des pièces, le contrôle « actif » du procédé même de fabrication. On évite ainsi, par des interventions immédiates, la production de pièces hors tolérances.

Les méthodes de surveillance statistique des fabrications s'étendent également au cas où les pièces produites ne peuvent être classées qu'en deux catégories, bonnes ou mauvaises. L'exposé de ces procédés sortirait du cadre de cette étude et le lecteur, plus particulièrement intéressé par ces questions, voudra bien consulter les ouvrages cités en référence (2, 3, 6, 7, 8). Il pourra ainsi choisir les exemples qui lui paraîtront les plus instructifs pour illustrer, dans un enseignement général, les avantages des méthodes statistiques.

VI. LES MÉTHODES DE RÉCEPTION PAR PRÉLÈVEMENT. — La réception d'un lot de produits industriels peut s'effectuer par vérification de la totalité des éléments qu'il comporte (contrôle à 100 %), ou par examen d'un échantillon de pièces prélevées au hasard dans le lot livré. Les procédés de réception par prélèvement, qui sont obligatoires lorsque les essais à effectuer sont destructifs, entraînent dans tous les cas une diminution importante des frais de contrôle, tout en offrant des garanties suffisantes lorsque l'on peut tolérer la présence d'une faible proportion de pièces défectueuses dans les lots acceptés.

Lorsque l'on établit un plan de contrôle par prélèvement, on pense, en premier lieu, à éliminer d'une manière quasi-totale (par exemple dans 95 cas sur 100) les lots contenant plus de p_L % pièces défectueuses, pourcentage au delà duquel la fourniture devient pratiquement inutilisable. Le client court ainsi un risque d'accepter au maximum, dans 5 cas sur 100, des lots dont le pourcentage de pièces défectueuses dépasse le pourcentage limite acceptable p_L .

La seule considération des risques du client et du pourcentage limite acceptable correspondant ne suffit pas à déterminer d'une manière rationnelle le plan de contrôle sur prélèvement à utiliser. Il faut en outre que la majorité des lots de bonne qualité livrés par le fournisseur soient acceptés, disons par exemple dans 95 cas sur 100 également, sinon la méthode de contrôle par prélèvement se traduirait par un gaspillage dont le client assumerait finalement les frais. On voit donc qu'un plan de contrôle par échantillonnage doit être ajusté en tenant compte des possibilités de fabrication et de la protection qu'il doit assurer.

Les propriétés d'un plan de contrôle par prélèvement peuvent se résumer en une courbe unique, appelée courbe caractéristique d'efficacité, ou courbe de sélectivité, qui indique, en fonction de la fraction p de pièces défectueuses contenues dans les lots soumis au contrôle, la proportion moyenne P de lots qui seraient acceptés (fig. 3).

On peut reporter sur ce graphique :

- 1) le pourcentage limite acceptable par le client p_L ;
- 2) le pourcentage moyen p_M correspondant à la majorité des lots susceptibles d'être fabriqués dans des conditions normales par le fournisseur.

Le plan de prélèvement aura été choisi d'une manière rationnelle si les risques du client et du fournisseur sont faibles, par exemple, inférieurs à 0,10.

Un plan de contrôle sur prélèvement permet, en définitive, de séparer d'une manière pratiquement certaine les lots de bonne qualité ($p < p_M$) de ceux de qualité médiocre ($p > p_L$).

Dans le choix du plan de contrôle, il faut éviter à tout prix que le pourcentage moyen, p_M , correspondant à la fabrication de qualité normale du fournisseur, soit voisin de la valeur $p_{0,50}$ pour laquelle le contrôle accepterait un lot sur deux. Il vaudrait mieux, dans ces conditions, décider en jouant à pile ou face si l'on accepte ou si l'on refuse les lots livrés, car on éviterait ainsi les frais d'examen des échantillons correspondants.

La considération des courbes caractéristiques d'efficacité montre clairement que l'utilisation des méthodes de contrôle par prélèvement n'est possible qu'à la condition que le pourcentage moyen p_M soit inférieur au pourcentage limite acceptable p_L . L'écart entre les valeurs p_L et p_M peut être d'autant plus réduit que la pente de la courbe caractéristique est plus raide. Cette pente dépend, en première analyse, du nombre *absolu* de pièces de l'échantillon prélevé, et non de l'importance relative de l'échantillon et du lot correspondant. A sélectivité égale (mêmes valeurs de p_M ; p_L et des

risques α et β), les frais de contrôle à répartir sur chaque pièce livrée seront d'autant moins élevés que les lots seront plus importants. L'accroissement de la sélectivité (diminution de l'intervalle p_M, p_L) entraînera au contraire une augmentation du prix du contrôle effectué.

Lorsque les vérifications effectuées ne sont pas destructives, on peut procéder au contrôle de la totalité des pièces des lots refusés sur prélèvement et remplacer les pièces défectueuses par des pièces bonnes. On améliore ainsi la qualité moyenne des produits livrés. On peut résumer les propriétés « rectificatives » d'un schéma de contrôle par une courbe qui indique la qualité moyenne des lots après contrôle en fonction de la proportion de pièces défectueuses qu'ils contenaient avant contrôle (fig. 4).

L'ordonnée p'_M du maximum de cette courbe représente la qualité moyenne limite (A O Q L average output quality limit) que l'on peut garantir après contrôle, quelle que soit la qualité initiale des lots présentés.

Les considérations qui précèdent s'appliquent à tout plan de contrôle par échantillonnage, quelles qu'en soient les modalités.

Le procédé le plus simple consiste à prendre dans chaque lot un seul échantillon et à accepter le lot correspondant sous réserve que le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon soit inférieur ou égal à un nombre fixé d'avance. Un tel processus n'est jamais le plus économique. Les statisticiens ont prouvé qu'il existe des méthodes de prélèvement qui nécessitent le contrôle d'un beaucoup plus petit nombre de pièces que le plan d'échantillonnage simple de même efficacité.

Le principe de ces méthodes, dites « progressives », consiste à ne pas fixer à l'avance l'effectif de l'échantillon à prélever et d'arrêter le contrôle dès que les renseignements recueillis permettent de prononcer l'acceptation ou le refus du lot examiné. Après avoir choisi les valeurs p_M et p_L , et les risques du client et du producteur correspondant au problème posé, un abaque ou un tableau permet de déterminer les modalités du contrôle à effectuer. Dans l'une de ces méthodes, on attribue au lot un coefficient numérique H , appelé handicap. On prélève les pièces une à une et l'on calcule à chaque fois le score S , en ajoutant au handicap ou au score correspondant au prélèvement précédent une unité si la dernière pièce prélevée est bonne ou en lui retranchant un nombre b appelé pénalité si la pièce est mauvaise. Le lot sera refusé si le score s'annule, sans avoir atteint la valeur $2H$, double du handicap. Il sera accepté si le score atteint au contraire le double du handicap, sans être passé par 0.

Les valeurs H et b sont lues directement sur une abaque, en fonction de p_L et p_M et des risques α et β .

L'économie réalisée sur le nombre moyen de pièces contrôlées peut dépasser 60 %.

En résumé, on peut dire que les procédés de contrôle par échantillonnage nécessitent dans chaque cas une étude complète du problème posé. Un plan de contrôle par prélèvement ne procure qu'une garantie sur la qualité moyenne des lots acceptés et l'emploi de telles méthodes de contrôle ne

présente donc un réel intérêt que si les opérations de réception doivent se répéter un assez grand nombre de fois sur des lots de même origine.

De nombreux ouvrages (9, 10) permettent de choisir sans connaissances mathématiques spéciales les plans de prélèvement les mieux adaptés à chaque cas particulier.

VII. CONCLUSIONS. — Je me suis efforcé, au cours de cet exposé, de montrer par quelques exemples, la valeur des méthodes statistiques dans l'interprétation des résultats expérimentaux. Avant d'étudier d'une manière rigoureuse les théories mathématiques sur lesquelles repose l'analyse statistique, je pense qu'il est indispensable d'expliquer, dans un langage clair, et aussi simple que possible, la nature des problèmes que ces méthodes prétendent résoudre. Pour l'ingénieur l'emploi des mathématiques n'est qu'un procédé plus efficace pour atteindre le but poursuivi et non une fin en soi. L'expérience des pays étrangers démontre clairement qu'un ingénieur de culture moyenne peut utiliser avec profit les méthodes de calcul statistique les plus complexes, sans avoir nécessairement approfondi les démonstrations rigoureuses des tests qu'il utilise d'une manière courante.

Tout enseignement élémentaire des méthodes statistiques devrait avoir pour but d'éveiller l'intérêt des auditeurs et non de les rebuter dès le prime abord par un exposé abstrait de problèmes dont ils pourraient difficilement saisir le sens.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. *Méthodes statistiques en Biologie et en Agronomie*, par VESSEREAU (J.-B. Baillère et fils, Paris).
2. *Les méthodes statistiques modernes et leur application au contrôle des fabrications en série*, par J. MOTIES (Institut National de la Statistique).
3. La surveillance statistique des fabrications en série, par R. GIRSCHIG, *Mécanique*, novembre 1949.
4. *Industrial Experimentation*, par K. A. BROWNLEE (His Majesty Stationery Office, Londres).
5. *Statistical Methodes in Research and Production* par Owen L. DAVIES (Oliver and Boyd, Londres).
6. *A first Guide to Quality Control for Engineers* (His Majesty Stationery Office, Londres).
7. *British Standart* n° 600 R.
8. *Quality Control*, par L. GRANT (Mac Graw Hill, New-York).
9. *Sampling Inspection*, Columbia University (Mac Graw Hill, New-York).
10. *Sampling Inspection Tables*, par DODGE et ROWNING (John Wiley, New-York).

Axiomatique et Redécouverte

Réunion de la Commission d'Etude, 19 octobre 1950

Conférence de M. GLAESER, Chef de travaux
à la Faculté des Sciences de Nancy

QUELQUES EXPÉRIENCES D'ENSEIGNEMENT AXIOMATIQUE

Un enseignement rigoureux doit, pour être complet, comporter deux étapes :

1° Il doit d'abord susciter chez l'élève un besoin de rigueur ; lui faire comprendre la nécessité de certaines analyses minutieuses qui, exposées sans préparatifs, paraîtraient bizarres ; l'éveiller à la pensée logique.

2° Il doit ensuite satisfaire plus ou moins complètement les exigences ainsi créées : le degré de rigueur dépendra plus de la maturité des élèves que des préférences du professeur.

Un grand nombre de mathématiciens s'est occupé de la seconde étape : on a élaboré maints exposés axiomatiques. Nous nous occuperons plutôt ici d'expériences dont l'intérêt consiste à « soigner » la première étape : il s'agit de ne pas « faire avaler », comme une médecine, à un jeune auditoire désarmé, une construction toute faite, dont il ne comprend pas la raison d'être.

Je choisirai deux essais : l'un concerne l'éveil au raisonnement dirigé (expérience faite en classe de 5° au Lycée Michelet) ; l'autre a pour but d'asseoir le cours de géométrie sur l'axiomatique de Hilbert, compte tenu des nécessités pédagogiques (expérience faite en classe de Mathématiques, à Lyon, en participation aux essais de M. THOVERT).

EXPÉRIENCE FAITE EN 5°. — 1^{er} objectif : *Apprendre aux élèves à s'exprimer correctement.*

La première leçon fut consacrée au « jeu des bonnes définitions ». Sur la question : « Qu'est-ce qu'un Lycée ? », un dialogue s'engage :

Un Elève. — C'est une maison où il y a des enfants.

Le Professeur. — Vous voulez dire une pouponnière.

Un Elève. — Non, une maison où il y a de grands enfants, etc., etc...

Il faut vingt minutes pour arriver à l'énoncé correct : « Un Lycée est un établissement d'Enseignement Secondaire appartenant à l'Etat. » On cherche alors à définir les objets les plus hétéroclites, et on finit la classe en cherchant la définition d'un *carré*.

Cet exercice de formulation a été poursuivi toute l'année à propos de tous les énoncés. Le début du cours de géométrie comprend une chaîne de « définitions » ou de « propositions », dont chacune nécessite la connaissance des précédentes (droite, segments, segments égaux, somme, double, moitié, etc., de segments. Etude analogue des angles).

2^e objectif : *Le principe d'honnêteté.*

C'est alors l'occasion de faire prévaloir le « principe d'honnêteté », qui

est à la base de l'axiomatique. Il faut distinguer très précisément ce que l'on *admet* de ce que l'on *démontre*, ce que l'on *définit* et ce qu'on ne *définit pas*. Ainsi, pas de soi-disant définition de la droite. Sous le titre *Vocabulaire*, je dicte : « *Les expressions figures égales et figures superposables sont synonymes.* » Il est facile de faire sentir aux élèves (en utilisant par exemple une jauge en caoutchouc) que cet énoncé n'est pas une définition, et de conclure par cette boutade de mon maître CAGNAC : « Un dictionnaire est un recueil de cercles vicieux. » Il est nécessaire de déclarer à la classe qu'en Mathématiques il se présente *trois sortes de propositions* :

- celles qui sont *fausses* ;
- celles qui sont *vraies*, mais non démontrables ou dont on n'a pas encore parlé ;
- celles, enfin, qui ont déjà été *démontrées* (ou explicitement admises).

Ainsi en 5^e, où le programme de géométrie comprend essentiellement la géométrie pré-euclidienne, il arrive parfois que des élèves, ou plutôt des parents trop zélés, invoquent la notion de parallélisme dans un problème. C'est alors l'occasion de développer la distinction ci-dessus énoncée.

3^e objectif : Géométrie concrète et géométrie déductive.

La troisième tâche du professeur en 5^e est de faire comprendre à ses élèves la distinction complète de la géométrie déductive et de la géométrie concrète, sans pour autant négliger l'une ou l'autre.

Vers le mois de décembre, lorsque les quelques théorèmes élémentaires sur les angles de même sommet ont déjà été étudiés, j'ai demandé à ma classe de « ranger », pour ne plus s'en servir pendant quelque temps, le cahier de « géométrie démontrée », car nous allions entreprendre une toute autre activité : l'étude de la géométrie concrète, tout à fait différente de la précédente.

J'utilisai alors largement ce qu'on pourrait appeler « les vertus pédagogiques du pléonasme » et je *répétai deux fois par cours*, à mon auditoire, cette opposition entre les deux géométries, en ayant soin d'en varier l'expression autant que possible.

L'usage des instruments usuels fut expérimenté sans autre souci de justification ; j'avais soin de mettre en évidence les incertitudes de ce genre de « preuves » et de tirer parti des coïncidences fortuites que d'aucuns parmi mes élèves voulaient ériger en règle générale. Je me suis abstenu systématiquement de faire déterminer la somme des angles d'un triangle ou d'en tracer simultanément les trois hauteurs pour ne pas anticiper sur les étonnements futurs, mais, par contre, la construction de polygones réguliers (y compris les décagones et pentagones), à condition d'être présentée comme une recette qui sera justifiée plus tard, le tracé de pavages réguliers et semi-réguliers, donneront suffisamment à l'élève l'occasion de manipuler des instruments. De même, ne pas oublier le pliage et les calques.

Nous revînmes à la géométrie déductive avec le cérémonial adéquat (changement solennel de cahier). Au cours des premières démonstrations sur les cas d'égalité, j'eus la confirmation que les élèves ne risquaient plus

de faire la confusion entre les « certitudes intuitives » et les « certitudes démontrées ». Je m'étais procuré un grossier triangle de toile, et je demandais à un élève de le superposer à un triangle dessiné au tableau. On finit par constater que l'égalité d'un angle compris entre deux angles égaux chacun à chacun assurait l'égalité du triangle.

Le professeur. — Comment constater l'égalité de cet angle ?

Réponse. — En géométrie concrète par la mesure.

Le professeur. — Et en géométrie déductive ?

Réponse de la classe unanime. — ON REGARDERA LES HYPOTHÈSES.

Je signale que pour être fidèle au « principe d'honnêteté », j'ai formulé l'un des cas d'égalité comme un postulat (Cf. *L'Axiome* III. 7, en annexe) et en démontrant les autres. Le reste de l'année fut employé à manipuler les divers cas d'égalité au cours d'exercices pré-euclidiens d'une difficulté croissante.

EXPÉRIENCE FAITE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES. — Si la classe de 5^e peut marquer le début d'une initiation à l'axiomatique, l'expérience que M. THOVERT poursuit depuis plusieurs années dans sa classe de Mathématiques Élémentaires à Lyon et que M. DUVERT et moi-même avons essayé de réaliser, est beaucoup plus proche d'un enseignement véritablement axiomatique.

Pour ma part, j'ai mis à profit les deux semaines d'octobre qui précèdent la rentrée effective, pour donner à mes élèves une idée des fondements axiomatiques de la géométrie d'après David Hilbert (cf. *Grundlagen der Geometrie*). Il ne convient pas de surcharger les programmes de notions nouvelles : aussi ne me suis-je permis d'enseigner, à titre de compléments, que des notions susceptibles d'éclairer véritablement le cours. Il est souhaitable pourtant de définir, au début de l'année, les relations d'équivalence (qui interviennent dans l'égalité, la similitude, la congruence, l'équivalence, etc.), la notion de groupe qui imprègne tous les chapitres du cours de Mathématiques, la notion d'ordre, qui intervient dans toutes les inégalités, enfin la notion de limite. J'ai abordé alors l'étude des axiomes d'Hilbert. L'énumération des axiomes d'appartenance est accueillie par mon jeune auditoire avec une indifférence polie.

Ce n'est qu'à la leçon suivante, après l'examen minutieux de l'exercice (2), dont on trouvera en annexe l'énoncé, que l'on commence à comprendre de quoi il s'agit.

Je demande alors : « Peut-on maintenant me démontrer, à partir des axiomes I, que la droite se compose d'une infinité de points ? » Au moment où l'élève comprend que l'exercice (2) prouve le contraire, l'intérêt s'éveille, et quand, après l'énoncé des axiomes de dispositions, ce théorème est effectivement démontré, chacun comprend la nécessité de la démonstration.

Cette partie du cours fut suivie dans une « atmosphère axiomatique » ; les élèves s'interrogeaient constamment afin de savoir si chacune de leurs affirmations était légitime. A condition de « fourrer » les démonstrations d'exemples simples empruntés à la géométrie « non-ordinaire » on entre-

tient chez l'élève, le besoin de rigueur. (A titre d'exemple : sur la sphère, il existe des triangles qui ont trois angles droits ; par le pôle, on peut mener plusieurs méridiens perpendiculaires sur l'équateur). On démontrera, au fur et à mesure, toute une série de théorèmes de base : par exemple, existence et unicité de la perpendiculaire, ou bien encore l'inégalité triangulaire $AB \leq AC + CB$.

Je n'ai fait que signaler les axiomes de continuité. Je me suis borné à dire qu'il existait deux autres axiomes, en vertu desquels je pourrais démontrer par exemple : « que tout segment joignant un point intérieur à un point extérieur, coupait la circonférence. »

Bien que les élèves, dans leur ensemble, se soient intéressés à ces développements, il faut, pour juger des résultats, tenir compte de ce que la plupart ne travaillent « sérieusement » que les questions qui « paient à l'examen » (et encore !).

La plupart ne s'occuperont plus d'axiomatique pendant l'année scolaire.

Mais une enquête faite parmi mes anciens élèves passés en Mathématiques Supérieures m'a montré que cinq ou six chaque année (sur un quinzaine environ) gardaient un vif souvenir de ces questions et les avaient assez bien assimilées.

ANNEXE

Les axiomes de la géométrie (d'après Hilbert, dans « Grundlagen der Geometrie »)

I. *Les axiomes d'appartenance.*

- I₁ Par deux points passe une droite et une seule.
- I₂ Sur toute droite il existe au moins deux points et hors de cette droite au moins un point.
- I₃ Par trois points non alignés passe toujours un plan et un seul (1).
- I₄ Si un plan contient deux points A et B, il contient la droite AB.
- I₅ Si deux plans ont un point commun, ils en ont au moins un deuxième.
- I₆ Il existe au moins quatre points non coplanaires (2).

II. *Les axiomes de disposition.*

- II₁ Parmi trois points alignés, il en existe un et un seul (3) que l'on peut qualifier de « situé entre les deux autres ».
- II₂ Etant donné deux points A et B il existe un point C tel que B soit entre A et C.
- II₃ Etant donné un triangle ABC et une droite coupant AB entre A et B ; elle recoupe alors l'intérieur d'un des segments BC ou CA.

III. *Axiome d'égalité.*

- III₁ Etant donné deux points A et B et une demi-droite A'x, il existe un point B' et un seul sur A'x tel que l'on puisse dire $AB = A'B'$.
- III₂ L'égalité est une relation d'équivalence, c'est-à-dire que $AB = AB$ (réflexivité), que $AB = CD$ entraîne $CD = AB$ (symétrie), et que $AB = CD$ et $CD = EF$ entraîne $AB = EF$ (transitivité).

III₃ $AB = BA$ (4).

III₄ Etant donné trois points alignés ABC et trois autres points alignés A'B'C', tels que B soit entre A et C, que B' soit entre A' et C'. Les relations $AB = A'B'$ et $BC = B'C'$, entraînent $AC = A'C'$.

III₅ Etant donné deux demi-droites Ax et Ay de sommet A, et un demi-plan défini par la demi-droite A'x', il existe une demi-droite A'y' tel que les angles (Ax, Ay) et (A'x', A'y') puissent être qualifiés égaux.

III₆ L'égalité des angles est une relation d'équivalence.

III₇ Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, les autres angles homologues sont égaux.

IV. *L'axiome d'Euclide ou de l'unicité de la parallèle.*

V. *Axiomes de continuité.*

V₁ *Axiome d'Archimède* : Quels que soient les segments u et l , il existe un entier n tel que $nu > l$ (5).

V₂ *Axiome de complétion* : L'espace considéré est le plus riche de ceux qu'on peut concevoir parmi ceux qui satisfont à tous les axiomes précédents.

Note du rapporteur. — En remerciant très vivement M. GLAESER, nous pouvons annoncer la publication, dans un de nos prochains *Bulletins*, de la conférence que M. CHOQUET fit en juin dernier à l'Institut Henri-Poincaré pour « un enseignement rigoureux de la géométrie ». D'autre part, nous attendons avec beaucoup d'espérance la parution d'un petit livre de M. BOULLIGAND, intéressant directement notre sujet : « Accès aux principes de la géométrie euclidienne. (Cas du plan) ».

Y. CROZES.

Notes à l'annexe

(1) Les axiomes ainsi formulés ne sont pas indépendants. En particulier l'unicité de I₁ résulte des axiomes II.

(2) A la suite de l'étude des axiomes I, on peut proposer en exercice la démonstration des principaux « théorèmes » du premier chapitre du programme de Première. Puis l'exercice suivant :

Exercice. — On considère six objets A, B, C, X, Y, Z, que nous appellerons « points ».

Les groupes de points ABC, AX, AY, AZ, XYZ, BX, BY, BZ, CX, CY, CZ, seront appelés « droites ».

Enfin les « plans » seront les groupements ABCX, ABCY, ABCZ, XYZA, XYZB, XYZC. Démontrer que cette « géométrie » de six points satisfait aux axiomes d'appartenance.

(3) Après II₁ on peut déjà définir le segment et la demi-droite : « Etant donné deux points, O et M, la demi-droite OM est l'ensemble des points N tel que O ne soit pas entre M et N. »

(4) La relation $AB = BA$ n'est pas « évidente ». Si l'on comptait les longueurs en durée de marche, la durée de l'aller n'est pas la durée du retour.

(5) Un espace formé de tous les points à coordonnées *rationnelles* satisfait à tous les axiomes précédents. Il faut donc un axiome pour passer à l'espace des points à coordonnées *réelles*.

Réunions de Professeurs de Mathématiques

Quelques professeurs de Classes nouvelles se sont réunis en juin dernier lors d'un stage pédagogique à Sèvres, sous la présidence de M. l'Inspecteur général DESFORGE. Diverses questions concernant l'enseignement des Mathématiques furent abordées ; il parut souhaitable de poursuivre ultérieurement cet échange de vues. Précisons, pour « les anciennes élèves de Mlle DIONOT », que ces réunions sont faites dans le même esprit que celles organisées par elle depuis de longues années. Ceux et celles qui ne sont point « ancien élève » sont cordialement invités, qu'ils soient ou non professeurs de Classes nouvelles.

Voici les sujets actuellement à l'étude ; les noms cités sont ceux des chefs de groupe. Ceux-ci seraient heureux de toute communication que voudraient bien leur adresser leurs collègues.

- A) A la recherche des erreurs de nos élèves (M. HUISMAN, Montaigne).
- B) Les bases intuitives et logiques d'un enseignement élémentaire des Mathématiques (Mlle FÉLIX, La Fontaine ; M. FOUCHÉ, Janson).
- C) Préparation et expérimentation d'exercices permettant de rechercher les aptitudes à l'abstraction et au raisonnement logique chez les élèves des différentes classes (M. COLLIGNON, J. DECOUR, M. MONAVON, Louis-le-Grand).
- D) Exercices de géométrie et d'arithmétique pour la 5^e (Mme FROMENT, La Fontaine ; Mme ROUGER, V.-Hugo).
- E) L'enseignement de l'algèbre dans le Premier Cycle doit-il se borner à l'enseignement d'un bon mécanisme ? (Mlle HILLIAN, St-Cloud ; Mme JAEGER, Sèvres).
- F) L'Astronomie dans les classes du Premier Cycle (Mlle MASSON, Marie-Curie).
- G) La racine carrée en 3^e (Mlle FÉLIX, La Fontaine).

H) Classes nouvelles : Etude du questionnaire proposé aux professeurs de Classes nouvelles : « Comment peut-on utiliser les intérêts de l'enfant dans les diverses classes du Premier Cycle ? » (Mlle DIONOT, Sèvres).

Les réunions ont lieu, en principe, le *troisième jeudi de chaque mois*. La dernière a eu lieu au Centre pédagogique de Sèvres, et M. l'Inspecteur général DESFORGE a pris part aux discussions. La prochaine se tiendra au *Lycée Fénelon, le jeudi 15 février, à 16 heures*.

Groupements et Revues s'occupant de l'histoire des sciences

Groupe français d'historiens des sciences, 12, rue Colbert, Paris.

Les membres de l'Enseignement sont admis sans autre condition. Cotisation : 200 francs par an, donnant droit à l'abonnement, au prix de 960 francs par an, au lieu de 1.600 francs, aux *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* (quatre numéros par an).

Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications, quatre

numéros par an. Rédaction, 12, rue Colbert, Paris. Editeur, Presses Universitaires, 700 francs par an.

Institut d'Histoire des Sciences et des Techniques de l'Université de Paris, 13, rue du Four, Paris, 6°. L'Institut publie, aux Presses Universitaires la revue *Thalès*, recueil annuel des travaux.

Séminaire d'Histoire des Mathématiques, Institut Henri-Poincaré, 11, rue Pierre-Curie, Paris, 5°. Créé sous la présidence de M. FRÉCHET, le séminaire a pour secrétaire M. SERGESCU. Une réunion d'étude et de discussions a lieu les premier et troisième jeudis de chaque mois, pendant la durée des cours des Facultés. Le séminaire est animé par des membres de l'Enseignement du Second Degré.

L'Intermédiaire des Recherches Mathématiques (M. BELGODÈRE), 55, rue de Varenne, peut aider tous les chercheurs, pour des questions de bibliographie en particulier.

Une propriété caractéristique de l'homothétie

L'homothétie est une transformation qui a un point invariant et un seul (à distance finie) et dans laquelle l'homologue d'une droite est une droite de même direction. Ces propriétés sont caractéristiques.

En effet, soit une transformation (T) ayant un point invariant O et dans laquelle toute droite (D) a pour homologue une droite (D') de même direction. A étant un point arbitrairement choisi (distinct de O), l'homologue de la droite OA est la droite OA elle-même ; donc l'homologue du point A est un point A' situé sur OA. Soit alors un point quelconque M (non-situé sur OA). Son homologue M' se construit à l'intersection de OM et de la parallèle à AM menée par A'. La transformation (T) est une homothétie de

centre O et de rapport $\frac{OA'}{OA}$.

Application. — Le produit de deux homothéties est, en général, une homothétie, car une droite se transforme en une autre droite de même direction et il y a, en général, un point invariant O. (O_1, k_1) et (O_2, k_2) étant les homothéties composantes il existe en effet un couple de points O, O' tel que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O_1O'} &= k_1 \overrightarrow{O_1O} \\ \overrightarrow{O_2O} &= k_2 \overrightarrow{O_2O'}\end{aligned}$$

et O est à distance finie sur la droite O_1O_2 si $k_1k_2 \neq 1$.

G. SINGIER.

Note sur l'étude des Déplacements

Pour éviter de définir les translations et les rotations par des constructions à priori et d'avoir à montrer ensuite que ce sont des déplacements, on peut adopter le plan suivant :

1° Deux figures égales F et F' sont définies comme deux positions succes-

sives d'une même figure f . Dans un plan deux points a et b de f , dans l'espace trois de ses points abc non alignés déterminent la position de f .

2° Dans un plan, F et F' sont déterminées par deux vecteurs égaux $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$, positions successives du vecteur $\vec{ab}$. La construction classique de l'homologue M' d'un point M se déduit de l'égalité de F et F' :

$$(1) \quad (\vec{A'B'}, \vec{A'M'}) = (\vec{AB}, \vec{AM}), \quad A'M' = AM.$$

La constance de l'angle de deux vecteurs homologues en résulte ($\vec{MP}, \vec{M'P'} = (\vec{AB}, \vec{A'B'}) = \theta$, et on peut appeler θ l'angle du déplacement.

D'où l'étude des cas particuliers.

a) $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ sont confondus : transformation identique.

b) $\vec{AB} = \vec{A'B'}$ ($\theta = 2k\pi$). Le déplacement s'appelle une translation et la construction générale (1) est équivalente à $\vec{MM'} = \vec{AA'}$.

c) $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ ont une origine commune O . Le déplacement s'appelle une rotation et la construction (1) est équivalente à $(\vec{OM}, \vec{OM'}) = \theta, OM = OM'$.

Les théorèmes énonçant que la translation et la rotation sont des déplacements disparaissent.

3° Dans l'espace, F et F' sont déterminées par deux triangles égaux ABC , $A'B'C'$, positions successives du triangle abc de f . On étudiera d'abord le cas particulier où les plans ABC et $A'B'C'$ sont confondus : le déplacement admet un plan invariant P et on peut le définir en donnant P et les vecteurs $\vec{AB}, \vec{A'B'}$, qui sont homologues dans P et déterminent un déplacement dans ce plan, donc une translation ou une rotation :

a) Si c'est une translation, on constate que l'homologue M' d'un point quelconque M de l'espace se construit comme en géométrie plane :

$$\vec{MM'} = \vec{AA'}.$$

b) Si c'est une rotation, on peut la définir par son centre O et son angle θ . On en déduit que tous les points de la perpendiculaire Δ en O à P sont des points doubles, et qu'en orientant Δ il suffit de connaître cet axe et θ pour construire l'homologue M' d'un point M quelconque.

c) L'étude du cas particulier $\theta = \pi$ conduit par les méthodes habituelles aux conclusions relatives à un déplacement quelconque.

R. ROSTOLLAND,
professeur au Lycée de St-Germain-en-Laye.

Livres reçus

Nous informons nos collègues que, dans un souci de stricte objectivité, le Bureau a décidé qu'il ne serait plus donné aucun commentaire des divers ouvrages classiques reçus pour la bibliothèque.

Arithmétique, classe de Mathématiques Élémentaires, par une réunion de professeurs. Un volume cartonné, 180 pages. Librairie Générale de l'Enseignement libre, 77, rue de Vaugirard, Paris.

Notions de Géométrie dans l'Espace, par A. BIGUENET et R. DUVAL, à l'usage des élèves des cours professionnels, des centres d'apprentissage, etc. Un volume cartonné, 316 pages. Editions Eyrolles, 61, boulevard Saint-Germain, Paris.

Cours de Géométrie plane, par H. BILLOT et A. POLLET, professeurs à l'E.N.P. de Saint-Ouen, 1^{er} et 2^e livres de géométrie. Un volume, 256 pages. Bibliothèque de l'Enseignement Technique (Cycle du Technicien), Dunod, 92, rue Bonaparte, Paris, VI^e.

Examens et Concours 1950

Sujets de leçons de Mathématiques proposés aux oraux des Concours de Recrutement

1. Agrégation féminine

Leçons de Mathématiques Élémentaires

1. Comparaison d'un angle inscrit et de l'angle au centre interceptant le même arc et des sens de ces angles supposés orientés. Applications (*Classe de Seconde C et Moderne*).
2. Exemples d'études de lieux géométriques en géométrie plane (*Classe de Seconde C et Moderne*).
3. Polygones réguliers (*Classe de Seconde C et Moderne*).
4. Etude de la fonction homographique (*Classe de Première C et Moderne*).
5. Droite et plan perpendiculaires (*Classe de Première C et Moderne*).
6. Volume de la pyramide (*Classe de Première C et Moderne*).
7. Première leçon sur les fractions (*Classe de Mathématiques*).
8. Première leçon sur les nombres positifs et négatifs (*Classe de Mathématiques*).
9. Résolution et discussion d'un système d'équations du premier degré à deux inconnues. Interprétation graphique (*Classe de Mathématiques*).
10. Etude de la fonction $a \cos x + b \sin x$. Résolution et discussion de l'équation $a \cos x + b \sin x = c$ (*Classe de Mathématiques*).
11. Première leçon sur la résolution des triangles (*Classe de Mathématiques*).
12. Première leçon sur les trièdres (*Classe de Mathématiques*).
13. Projection orthogonale d'un cercle. Application à la représentation d'un cercle en géométrie descriptive ou en géométrie cotée, au choix de la candidate (*Classe de Mathématiques*).

14. Rabattement d'une figure plane. Applications (géométrie descriptive ou géométrie cotée, au choix de la candidate) (*Classe de Mathématiques*).
15. Cosmographie. Eclipses de lune et de soleil (*Classe de Mathématiques*).
16. Etude géométrique de la transformation par similitude dans le plan (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).
17. Symétries par rapport à un point et par rapport à un plan ; produits de telles symétries (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).
18. Etude géométrique de la transformation par inversion (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).
19. Etude géométrique des faisceaux linéaires de cercles (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).
20. Etude des tangentes et des asymptotes à une conique définie par un foyer, la directrice correspondante et l'excentricité (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).
21. Hyperbole définie par ses asymptotes et un point (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).
22. Intersection de deux cônes ou cylindres de révolution circonscrits à une même sphère (*Classe de Mathématiques Supérieures, programme de « Géométrie pure »*).

Leçons de Mathématiques Spéciales

(Toutes ces leçons étaient demandées pour une *classe de Mathématiques Spéciales*).

Les numéros correspondent aux leçons de Mathématiques Élémentaires et de Mathématiques Spéciales « associées »).

1. Première leçon sur les nombres complexes.
2. Première leçon sur les séries à termes réels.
3. Dérivation et intégration des séries entières.
4. Mouvement d'un point passant sur un plan incliné avec frottement, la vitesse initiale étant dirigée suivant une ligne de plus grande pente du plan.
5. Décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.
6. Emploi de la dérivée pour l'étude des variations d'une fonction. Exemples.
7. Cinématique. Changement du repère. Composition des vitesses. Composition des accélérations lorsque le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.
8. Donner quelques exemples de surfaces dont une représentation en géométrie analytique met en évidence un mode de génération géométrique simple ou des propriétés géométriques remarquables.
9. Construction des courbes planes définies en coordonnées polaires. Exemples. (Les résultats généraux sur les tangentes, sur la concavité et sur les branches infinies sont supposés connus).
10. Divisions homographiques sur une conique.

11. Géométrie descriptive. Intersection d'une sphère et d'une quadrique de révolution.
12. Exemples classiques d'équations différentielles du premier ordre dont l'intégration se ramène à celle d'équations à variables séparées. La candidate s'efforcera de montrer le parti que l'on peut tirer dans une telle étude de considérations géométriques.
13. Systèmes d'équations linéaires à trois inconnues. Résolution et discussion. Interprétations géométriques.
14. Fonction inverse d'une fonction continue et monotone.
15. Equation différentielle linéaire du premier ordre.
16. Fonctions composées ; dérivation.
17. Première leçon sur les séries entières.
18. Formes linéaires.
19. Fonctions symétriques entières des racines d'une équation algébrique entière.
20. Plus grand commun diviseur de deux polynômes.
21. Fonction exponentielle.
22. Séries absolument convergentes à termes réels et à termes complexes.

2. Certificat d'aptitude à l'Enseignement dans les Collèges

(Concours féminin)

Leçons de géométrie

1. Notions exposées sur un nombre très restreint d'exemples de théorèmes réciproques, de conditions nécessaires et suffisantes, de propriétés caractéristiques (*Classe de Troisième*).
2. Méthode exposée sur un nombre limité d'exemples de recherches de lieux géométriques (*Classe de Troisième*).
3. Lieu des points équidistants de deux droites données. Cercles tangents à trois droites données concourantes 2 à 2 (*Classe de Seconde C*).
4. Lieu des points d'où l'on voit un segment donné sous un angle donné. Application à un mode de génération du cercle. (On suppose traitée la comparaison de l'angle inscrit et de l'angle au centre) (*Classe de Seconde C*).
5. Vecteurs équipollents. Translation (*Classe de Seconde C*).
6. Rapport de deux segments. Etude du rapport arithmétique dans lequel un point partage un segment donné ou ses prolongements (*Classe de Seconde C*).
7. Théorème de Thalès. Applications simples. (Les triangles semblables sont hors du sujet) (*Classe de Seconde C*).
8. Parallélisme des droites et des plans (*Classe de Première*).
9. Droite et plan perpendiculaires (*Classe de Première*).
10. Plans perpendiculaires (*Classe de Première*).
11. Volume du parallélépipède (*Classe de Première*).
12. Faisceau harmonique de droites. Exemples simples (*Classe de Sec. C*).

13. Figure homothétique d'un cercle dans le plan. Centres d'homothétie de deux cercles (*Classe de Seconde C*).
14. Cercles passant par deux points donnés et tangents : a) à une droite donnée ; b) à un cercle donné (*Classe de Mathématiques*).
15. Cercles orthogonaux (*Classe de Mathématiques*).
16. Différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles. Axe radical. (Le candidat suivra à son choix l'ordre indiqué de l'ordre inverse) (*Classe de Mathématiques*).
17. Produit de deux homothéties (*Classe de Mathématiques*).
18. Première leçon sur les trièdres supplémentaires (*Classe de Math.*).
19. L'ellipse considérée comme lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite fixes est égal à une constante inférieure à 1. Construction par points. Tracé. Symétries (*Classe de Math.*).
20. Equivalence des deux définitions suivantes de l'ellipse : a) par ses deux foyers ; b) par un foyer et la directrice associée (*Classe de Math.*).
21. Enveloppe d'un côté d'un angle droit dont le sommet décrit un cercle et dont l'autre côté passe par un point fixe (*Classe de Math.*).
22. Tangentes issues d'un point à une parabole. Théorèmes de Poncelet (*Classe de Mathématiques*).
23. Recherche du lieu des sommets des cônes de révolution passant par une conique donnée. On suppose traité le théorème de Dandelin (*Classe de Mathématiques*).
24. Rabattement d'une figure plane (*Descriptive*).
25. Distance d'un point à un plan (*Descriptive et cotée*).

Leçons d'Algèbre, d'Arithmétique et de Trigonométrie

Classe de Seconde C : Inéquation du premier degré à une inconnue. Applications.

Classe de Seconde : Signe du trinôme du second degré, étude sur des exemples numériques.

Classe de Seconde C et Moderne : Etude de la fonction linéaire. Représentation graphique. Pente d'une droite. Applications.

Classe de Première : Détermination de la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré.

Classe de Première : Variation de la fonction homographique, l'étude de la fonction : $y = \frac{a}{x}$ étant supposée faite.

Classe de Première : Recherche de deux nombres ayant pour somme et pour produit deux nombres donnés.

Classe de Troisième Moderne : Problèmes empruntés à la géométrie ou à la physique conduisant à des relations de la forme : $y = ax^2$; $y = \frac{a}{x}$ où a est un coefficient numérique.

Classe de Sciences Expérimentales : Etude de la fonction : $y = \sqrt[n]{x}$, n entier positif.

Classe de Mathématiques : Recherche directe de la dérivée de la fonction :

$y = \frac{1}{2} \sqrt{-x^2 + 14x - 24}$. Application. Etude des variations de cette fonction.

Classe de Mathématiques : Etude de la fonction : $y = x^3 + px + q$ sur trois exemples numériques.

Classe de Mathématiques : Inéquation du second degré à une inconnue.

Classe de Mathématiques : Progressions géométriques. Applications.

Classe de Quatrième Moderne : Proportions et nombres proportionnels.

Classe de Cinquième : Reste de la division d'un nombre entier par 2, 5, 9, 3. Caractères de divisibilité par ces nombres.

Classe de Cinquième : Multiplication d'une somme ou d'une différence par un nombre. Mise en facteur étudiée à partir de problèmes concrets.

Classe de Mathématiques : Recherche des diviseurs d'un nombre au moyen de la décomposition en facteurs premiers. Applications. (La recherche du P.G.C.D. et du P.P.C.M. n'est pas comprise dans le sujet).

Classe de Mathématiques : Première leçon sur les nombres premiers.

Classe de Mathématiques : Diviseurs communs à deux nombres entiers. Recherche du P.G.C.D. de deux nombres entiers par la méthode des divisions successives. Propriétés du P.G.C.D. Nombres premiers entre eux. Propriétés relatives à la divisibilité.

Classe de Mathématiques : Définition de la racine carrée à 1 près par défaut d'un nombre entier. Relations caractéristiques. Extraction de la racine carrée à 1 près par défaut. On pourra se contenter d'expliquer l'opération pour un nombre de quatre chiffres.

Classe de Première : Problèmes simples, d'origine géométrique, conduisant à une équation du premier degré, quand on prend comme inconnue un rapport trigonométrique.

Classe de Première C : Résoudre : $\sin x = \sin a$ $\cos x = \cos a$ $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} a$. Exemples.

Classe de Mathématiques : a, b, c, A, B, C désignant les côtés et les angles d'un triangle ABC, établir le système de relations :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Énoncer et démontrer le théorème réciproque.

Classe de Mathématiques : Résolution d'un triangle ABC dans un cas non classique. On pourra, sans obligation, choisir l'exemple suivant. Données : le côté a ; le demi-périmètre p ; le rayon du cercle inscrit r . Faire une construction géométrique du triangle à partir des données et retrouver les résultats de la discussion précédente.

Classe de Mathématiques : Résolution et discussion de l'équation :

$$a \cos x + b \sin x = c.$$

Classe de Mathématiques : Résoudre un triangle connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

Le Gérant : L. PARAZINES.

MATHÉMATIQUES

Collection BENOIT

Mathématiques , cl. de 6 ^e , par BENOIT	100 fr.
Mathématiques , cl. de 5 ^e , par BENOIT et CANAPALE ..	100 fr.
Mathématiques , cl. de 4 ^e , par BENOIT et CANAPALE ..	220 fr.
Mathématiques , cl. de 3 ^e , par BENOIT et CANAPALE ..	300 fr.
Algèbre et Géométrie , cl. de 2 ^e A et B, par BENOIT et CANAPALE.	200 fr.
Algèbre , cl. de 2 ^e C et M, par BENOIT et CANAPALE. . .	180 fr.
Géométrie (et Trigonométrie) , cl. de 2 ^e C et M, par BENOIT et CANAPALE	200 fr.
Géométrie et Algèbre , cl. de 1 ^{re} A et B, par BENOIT	160 fr.
Géométrie , cl. de 1 ^{re} C et M, par BENOIT.	200 fr.
Algèbre et Trigonométrie , cl. de 1 ^{re} C et M, par BENOIT	130 fr.
Algèbre , cl. de Mathématiques, par BENOIT.	170 fr.
Trigonométrie , cl. de Mathématiques, par BENOIT. . .	160 fr.
Géométrie , cl. de Mathématiques, par BENOIT et CANAPALE	600 fr.
Arithmétique , cl. de Mathématiques, par BENOIT .. .	80 fr.
Descriptive et cotée , cl. de Mathématiques, par BENOIT	40 fr.
Mécanique , cl. de Mathématiques, par BENOIT	80 fr.
Algèbre, Trigonométrie et Mécanique , cl. de Sciences expérimentales, par BENOIT	250 fr.

Nouveautés :

Cosmographie, cl. de Math , Sciences exp. et Philo., par
BENOIT et BACCHUS. *Février 1951*

Trigonométrie et Algèbre, cl. de Philosophie, par
BENOIT. *Février 1951*

*Les différents ouvrages de la Collection BENOIT sont adressés gracieusement
à MM. les Professeurs de Mathématiques qui en font la demande.*

MASSON & C^o, Éditeurs, 120, Bd St-Germain, Paris-6^e

Nouveautés

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES

G. CAGNAC — L. THIBERGE

GÉOMÉTRIE PLANE

Classes de 2^e C et Moderne

PAR

J. DOLLON

Professeur agrégé au Lycée Louis-le-Grand

E. GILET

Censeur du Collège J.-B.-Say

Un volume de 396 pages, avec fig. et probl., cartonné **490 fr.**

ALGÈBRE

Classes de 2^e C et Moderne

PAR

J. DOLLON

Professeur agrégé au Lycée Louis-le-Grand

J. SIROS

Professeur agrégé au Lycée Lakanal

Un volume de 238 pages, avec fig. et probl., cartonné **360 fr.**

Précédemment paru :

Arithmétique, cl. de 6^e, par L. THIBERGE, E. GILET et J. SIROS,
un volume..... **360 fr.**

Arithmétique et Géométrie, cl. de 5^e, par L. THIBERGE et E. GILET,
un volume, cartonné **490 fr.**

A paraître :

Arithmétique, Algèbre et Géométrie, cl. de 4^e, par L. THIBERGE
et E. GILET, un volume, cartonné..... **Mai 51**

Librairie DELAGRAVE, 15, rue Soufflot, PARIS-V^e

Collection BRACHET-DUMARQUÉ

Vient de paraître :

ALGÈBRE, 2^e et 1^{re} A et B

COSMOGRAPHIE, avec la collaboration de **P. COUDERC**

Classes de Philo-lettres et de Sciences expérimentales

MATHÉMATIQUES } I. ALGÈBRE-TRIGONOMETRIE ;
II. COSMOGRAPHIE.

Classe de Philo-lettres

Sous presse :

COSMOGRAPHIE, avec la collaboration de **P. COUDERC**

Classe de Mathématiques

Eléments d'ARITH-ALGÈBRE (5^e, 4^e, 3^e). **SOLUTIONS**

Eléments de GÉOMÉTRIE (5^e, 4^e, 3^e). **SOLUTIONS**

LIBRAIRIE A. HATIER

8, Rue d'Assas - Paris (6^e)

Cosmographie, par André DANJON

classe de Mathématiques 380 fr.

classes de Philosophie et Sciences exp. .. . 260 fr.

La question de cours à la 1^{re} partie du Baccalauréat,

par Serge MINOIS et René FAVRELLE .. . 100 fr.

Leçons de Mathématiques, classe de Philosophie,

par Serge MINOIS et René FAVRELLE .. . 120 fr.

L'entraînement méthodique au calcul algébrique,

par G. GLAESER.. .. . 80 fr.

Les sujets de problèmes de Mathématiques proposés au Baccalauréat (juin et septembre). Deux fascicules 45 fr. chaque

Les Humanités scientifiques, revue mensuelle pour les classes de 1^{re} et de Mathématiques de 48 pages, dirigée par S. MINOIS et R. TOUREN ; l'abonnement annuel.. .. . 450 fr.

C.C. Paris 5507-91

— SPÉCIMEN GRATUIT SUR DEMANDE —