

Sur le premier enseignement de la Géométrie

*Exposé fait à la rencontre internationale de Keerbergen (Belgique)
par Mademoiselle FELIX, professeur au Lycée La Fontaine
(Pâques 1951)*

Nous voudrions présenter quelques remarques au sujet d'un premier enseignement de la géométrie dans nos Lycées et Collèges, en tenant compte à la fois de l'état mental de l'enfant et des aperçus modernes sur la nature de la logique et les fondements de la géométrie.

M. GONSETH, dans son livre « Qu'est-ce que la logique ? », écrit, à pro-

pos de la forme intuitive relative à l'espace : « Nous ne sommes pas sans quelques renseignements sur son évolution dans la prime enfance. Mais nous pouvons renoncer à nous en servir. A partir d'un certain âge, elle peut être considérée comme fixée, de même que les connaissances qu'elle comporte : dès lors, celles-ci peuvent être dites *à priori*. »

A partir d'un certain âge ? C'est ce qui intéresse le professeur d'Enseignement du Second Degré chargé des débuts de la géométrie. Que possède l'enfant qui, vers douze ans, est en Cinquième ? Des souvenirs d'expériences déjà innombrables sur des objets matériels, une classification implicite de ces objets, qui sont fixes ou mobiles, déformables, articulés, indéformables, etc..., mais en même temps colorés, épais, etc... Il distingue certaines formes remarquables, le déplacement et le mouvement, la direction et le sens, la longueur, la surface, le volume, etc... En même temps, il possède un vocabulaire assez étendu, employant des mots usuels, d'autres plus savants dont l'aspect l'a séduit. Il en comprend d'autres qu'il emploie, mais pas spontanément. Et ces substantifs sont associés à des conjonctions, des adverbes, qui donnent à ses phrases un aspect plus ou moins logique.

Bref, il commence, pour suivre la description de M. Gonseth, à superposer à la réalité « un schéma descriptif, sommaire, symbolique et inachevé ». Mais ce schéma fragile n'est guère pourvu encore d'une structure intrinsèque rigide, et, en tout cas, l'enfant n'en a pas nettement conscience. Raisonner sur cette structure, c'est faire de la géométrie déductive. Enrichir le schéma, créer des représentations intuitives, c'est déjà abstraire. C'est faire de la géométrie expérimentale. C'est ce que M. Gonseth appelle « une préaxiomatisation inconsciente ». Par exemple, c'est la formation de l'idée de droite que suggère un fil tendu, avant toute axiomatisation explicite, stade précédant l'idée de droite géométrique qui résulte de « l'abstraction par axiomatisation ».

Et maintenant, quel est le but que nous nous proposons d'atteindre en trois ou quatre ans ? D'une part, nous voulons enseigner la géométrie élémentaire. Certainement, nous ne songeons pas à ces mathématiques formalisées dont discutent les savants dans les Congrès, où la phrase la plus souvent citée est la célèbre boutade de Bertrand Russel : « Les mathématiques sont une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle, ni si ce que l'on dit est vrai. » Il ne s'agit même pas de ces géométries axiomatisées qu'il a bien fallu créer lorsque les résultats catastrophiques apparurent, tels que l'ensemble triadique de Cantor qui contredit la notion intuitive de la continuité d'une ligne, ou la courbe de Péano qui détruit la conception immédiate de la dimension. Tout au plus peut-on faire apercevoir cet effort dans la classe terminale des sections scientifiques. La géométrie que nous voulons enseigner est déductive à partir de bases intuitives, modérément euclidienne, légèrement teintée par les géométries non euclidiennes et finalement organisée autour des grandes distinctions de géométrie métrique, affine, projective.

En outre, et c'est très important, nous voulons concourir à l'éducation générale de l'esprit de l'enfant, et même de son caractère.

I. — Il me semble essentiel, avant tout enseignement déductif de la géométrie, d'assurer un état suffisant de la préaxiomatisation inconsciente et du vocabulaire correspondant. Nos élèves nous arrivent, à ce point de vue, dans des états si étrangement divers qu'il faut peut-être y voir une des difficultés de notre enseignement. Ne serait-ce pas par ce facteur qu'agirait l'influence bien connue du milieu familial ? Je pense qu'il serait indispensable d'assurer, au cours d'une année préparatoire qui serait par exemple notre Cinquième, la solidité et la richesse du schéma descriptif qui est le fruit de la géométrie expérimentale et en même temps de former et préciser le vocabulaire descriptif adéquat. Le professeur de mathématiques est certainement le seul qualifié pour cette tâche, surtout si l'on ne peut arriver à coordonner le vocabulaire mathématique avec ceux, si différents, des professeurs de dessin, de gymnastique, de travaux manuels, sans parler des professeurs de langues, française, anciennes ou étrangère vivantes.

Mais il serait illusoire de prétendre imposer un mot précis avant que la schématisation inconsciente n'ait agi pour former le concept, et c'est ce travail qu'il nous faut provoquer. Naturellement, les moyens sont : l'observation des objets physiques en vue de leur description, l'usage d'instruments de toutes sortes pour le dessin, le pliage, le découpage... En somme, le matériel du jardin d'enfants ? Peut-être, mais utilisé dans un but précis : achever la formation prélogique.

Les instruments les plus variés pourraient être étudiés : règles à un ou deux bords, équerres justes ou fausses, fixes ou glissantes ; pliages des différents types, appareils articulés, ficelles tendues, etc... Mépriserons-nous ces instruments et les rejeterons-nous hors de la géométrie, alors qu'ils ont été étudiés par tous les grands géomètres de Dinostrate et Nicomède à Poncelet et Hilbert ? (Cf. les « Leçons sur les constructions géométriques », de M. LEBESGUE, 1^{re} partie). Ces instruments seront utilisés pour créer librement des figures, les copier, les déformer suivant certaines lois à découvrir, ou bien qui sont imposées d'avance ? La langue associée doit permettre de décrire, sans ambiguïté et correctement, la structure de la figure, le fonctionnement des instruments et les opérations à effectuer pour les constructions.

Quel travail à entreprendre ! Distinguer les mots voisins tels que : milieu, moitié, moyen, médiane ; les ronds et les cercles, les carreaux plus ou moins longs et les parallélogrammes, rectangles, carrés ; les figures pareilles, égales, semblables, etc...

Remarquons bien qu'il ne s'agit nullement ici de donner des définitions logiques des figures géométriques, puisque ceci n'a de sens que dans une axiomatisation, mais de donner une connaissance globale et distincte des figures et de leurs éléments. Par exemple, on ne définit pas, à ce stade, un rectangle, pas plus qu'arbre ou chien, mais on peut définir une diagonale d'un polygone.

Objectera-t-on qu'une telle étude préliminaire rendra plus difficile l'enseignement ultérieur ? Il faut voir la réalité sans hypocrisie : c'est un fait que l'enfant pense à des segments parallèles en découpant des bandes de papier

et qu'il construit des carrés pour faire des cocottes. Et c'est bien heureux ! Car qui croira qu'il nous suffirait plus tard de prononcer une phrase de définition pour que l'enfant puisse raisonner à partir d'elle sans y mettre un contenu intuitif ? Faisons l'expérience sur nous-même, en étudiant, par exemple, si nous ne connaissons pas ces questions, des chapitres pourtant bien simples d'algèbre, tels que les notions d'anneau ou d'idéal. Sans chercher un exemple si loin, après avoir donné une définition si particulière de la tangente, à quoi pensons-nous donc, étudiant la puissance d'un point par rapport à un cercle ou un théorème de Poncelet sur une conique, lorsque nous faisons tourner la droite autour d'un point extérieur ? Pensons aussi à la faute grossière commise dans certains manuels qui laissent croire que le fait d'avoir dénommé « aire » une certaine limite d'aires de polygones est suffisant pour que l'on puisse attribuer à cette limite les propriétés habituelles des aires (Voir « Sur la mesure des grandeurs », de M. LEBESGUE). Erreur ou hypocrisie ?

Je crois que la bonne méthode ne consiste pas à ignorer le continu intuitif de la pensée de nos élèves, ni à faire semblant de l'ignorer pour ne pas en tenir compte, ni à leur interdire d'y faire allusion. Au contraire, la franchise doit régner, et puisque, au stade logique, il faudra bâtir une construction déductive sur cette base intuitive, il faut assurer la solidité de celle-ci.

Seulement, quelques précautions, toutes particulières à ce stade, sont à prendre, que le professeur, averti des exigences de la logique, sentira sans peine. Par exemple, l'enfant a l'intuition des segments parallèles, mais cela ne signifie pas qu'il a la notion de droites indéfinies, parallèles, ou non : il s'agit d'une notion d'ordre pratique. De même, il peut arriver que l'enfant, par pliage par exemple, découvre que la somme des angles d'un triangle vaut à peu près un plat (et comment espérer qu'il n'ait jamais entendu formuler cette conclusion ?). Qu'importe ! Connaissance pratique ! Si le maître n'use pas du prestige de l'adulte pour lui imposer une affirmation générale prématurée, sera-t-il difficile, le moment venu, de faire comprendre à l'enfant la place de cette affirmation parmi les vérités démontrées ? En somme, il faudrait éviter toute affirmation générale qui dépasse l'expérience et que l'enfant croira sur parole, et cependant laisser se construire un schéma pratiquement et sommairement fidèle du monde des figures.

Pourrait-on maintenant préciser un peu les chapitres à explorer ? Sans essayer d'élaborer un programme, il me semble que l'on peut faire les suggestions suivantes : d'abord, faire acquérir la notion d'angle à partir de la notion de pointe, de coin. Qu'un nombre, mesure unique, suffise pour déterminer un angle, cela n'a rien d'évident. La mesure d'une longueur rectiligne est au contraire d'expérience courante, et celle des surfaces simples à l'aide des carrelages et découpages n'est pas difficile à préciser. Occasion naturellement de faire des exercices d'arithmétique.

Proche de la notion d'angle, est celle de direction d'une courbe et de tangente. Notre collègue Bouchat signalait récemment la découverte, par ses jeunes élèves, de la solution d'un problème de construction où une circonférence devait se raccorder à un segment de droite. L'enfant faisait

varier le cercle suivant une loi définie et ne découvrirait naturellement pas la définition moderne de la tangente, mais il élaborait une notion qui, en se précisant, deviendra la notion de limite. Que serait la belle phrase qu'il apprendra plus tard sans le sens intuitif de la tangente, sinon une définition toute gratuite ? Retenons que les constructions utilisant le raccordement seront fécondes en observations utiles.

La topologie combinatoire est aussi une source de remarques intéressantes et utiles. Combien d'élèves connaissent le nombre de régions déterminées par trois droites du plan, sans même parler de trois ou quatre plans ? Et les deux dispositions d'un quadrangle, figure à quatre sommets et six côtés ? (Les dénombrements sont naturellement aussi une mine d'exercices pour l'étude des nombres entiers).

Peut-être ne serait-il pas trop tôt pour parler un peu de l'infini. Les enfants s'en sont déjà inquiétés à cet âge. Le choc initial, resté en général secret, a été si soudain que l'enfant se souvient souvent de ce qui l'a provoqué : infini dénombrable, ou bien sentiment que le temps, est peut-être infini dans le passé. Le mot « infini », ou « illimité » est craint. On préfère « autant qu'on veut ».

En étudiant les conditions de détermination des dessins, on est amené à introduire les idées essentielles du nombre de paramètres dont dépend une figure, soit en position, soit à un déplacement près. On se rendra compte que la position d'une figure plane indéformable est déterminée par la position de deux de ses points (ce qui sera plus tard un axiome de la géométrie euclidienne). Toutes ces précisions sont un acheminement vers la distinction entre hypothèse et conclusion, et vers la notion que la liberté de définition d'une figure est assujettie à certaines limitations, qu'il y a un déterminisme imposé par la structure de l'espace. Quelle préparation pour l'étude ultérieure des lieux géométriques ! Enfin, par l'obligation de préciser les « demandes », l'enfant pourrait acquérir, non seulement la notion de la classification des formes, mais encore celle de discussion : cas particuliers, d'exception, d'impossibilité ; conditions suffisantes, surabondantes. incompatibles, incohérentes.

La relation du particulier et du général doit aussi être précisée. Le manieement d'un parallélogramme articulé montre bien qu'un rectangle devient un parallélogramme si un angle est libre de varier, et qu'un parallélogramme devient un rectangle si un angle devient droit. La question n'est pas de savoir lequel est antérieur, mais de mettre en évidence les classes d'extensions diverses, s'incluant les unes les autres. Ceci est acquis par l'étude du nombre de paramètres dont dépend la figure. La transivité de l'inclusion prépare à l'emploi des syllogismes.

Toute cette étude expérimentale est aussi un acheminement vers la conception d'un espace isotrope par opposition à un espace orienté autour de la verticale. Comme le fait observer notre collègue M. Fouché, la notion de verticale est remplacée en géométrie plane, par la trace, sur le plan du dessin, du plan de symétrie du corps humain ; concevoir l'espace comme isotrope, c'est donc affranchir de cette symétrie, ou du moins, concevoir cet affranchissement.

Avec la possibilité d'attacher des nombres aux longueurs, aux surfaces, s'introduit avec précision la notion de similitude. Le théorème de Thalès, dans les cas simples, est absolument clair pour des enfants de onze ans (je l'ai constaté en Sixième), si, naturellement, on n'essaye pas de le déduire d'une définition abstraite préalable des rapports ! Au contraire, plus tard, c'est le théorème de Thalès qui éclairera la notion du rapport.

Quoi encore ? Le théorème de Pythagore par les aires ? La trigonométrie des angles aigus. On arrive ainsi à la géométrie de l'apprenti, du travailleur manuel... Mais, professeur de Lycée ou de Collège français, nous sentons en général qu'il faut résolument s'arrêter dans cette direction. Retenons seulement, qu'un vaste champ est le domaine de la formation pré-géométrique, qu'il faut consacrer du temps et des soins éclairés au cours de séances de travaux pratiques sous la direction de maîtres particulièrement compétents, capables de diriger et d'utiliser les réactions des enfants.

Si l'acquisition d'un vaste ensemble de connaissances intuitives utilisables pratiquement n'est pas le but essentiel de l'enseignement dans les Lycées, il faut, sans plus tarder, changer de méthode.

II. — Le but réel de l'enseignement des mathématiques à des enfants qui, pour une grande part, n'en feront aucun usage plus tard, est de constituer les cadres d'une pensée logique et d'initier au vocabulaire correspondant. Les faits géométriques sont les plus simples qui peuvent constituer un matériel abstrait sur lequel une pensée formalisée travaille en se distinguant d'une pensée purement intuitive, ou partiellement sentimentale ou mystique. C'est donc vers une libération de l'esprit par un effort d'honnêteté que nous tendons. On peut aussi noter, d'un point de vue tout différent qui mériterait une étude spéciale, un aspect social de la question : le non spécialiste doit pouvoir comprendre, au moins partiellement, l'esprit de la vraie science, vivante et puissante, que le grand public ne peut plus ignorer entièrement ; faute de quoi la masse se sentirait esclave d'une petite caste d'initiés dangereux. C'est pourquoi, l'apport, quelque riche qu'il soit, de la géométrie expérimentale, nous semblerait de peu de valeur pour la culture générale, si elle n'était pas la meilleure préparation, la seule peut-être pour certains esprits, au raisonnement déductif.

Il serait déjà bien précieux, au moment où nous nous efforçons de progresser sur le plan logique, de ne pas être continuellement gênés par une insuffisance de connaissance de l'espace physique et du vocabulaire adéquat, mais l'utilité du travail préliminaire peut apparaître comme bien plus profond. Pour la mettre en évidence, suivons le début du livre de M. FAVARD, « Espace et dimension » : « Je vais d'abord essayer de dire rapidement quelles sont les données sensibles qui contribuent à la formation de la notion d'espace. Dans le reste du chapitre, nous développerons les différentes démarches de l'esprit qui, de là, ont conduit à la notion d'espace familière à tous ceux qui ont quelque connaissance de la géométrie. Il doit être entendu que toutes les remarques sont relatives à des faits d'expérience et que, nulle part, on ne doit y voir, ni un embryon de raisonnement, ni un essai de déduction... La mise en ordre de nos sensations et

leur intégration dans un schéma logique, fruit de notre esprit, nous a conduit à dégager, des résultats des expériences les plus familières, certains cadres : Le principe d'identité, principe de ma pensée dont l'affirmation est en dehors de cette expérience ; la notion d'ordre et de transivité. La notion de distances et leur addition commutative et associative, l'ensemble archimédique et infini de ces distances ; l'inégalité triangulaire impliquée dans la notion de distance ; l'axiome de Pasch (sur la disposition des points d'intersection de trois droites) ; la notion d'angle, invariant d'un système de deux droites... » N'est-ce pas le programme même que nous cherchions pour le stade prélogique ?

Mais, revenons au livre déjà cité de M. Gonseth : « Tout objet est identique à lui-même. C'est le principe d'identité. Tout objet est ou n'est pas. C'est le principe du tiers exclu. Un objet ne peut pas à la fois être et ne pas être. C'est le principe de contradiction. » Ces objets, dont nous parlons maintenant, quels sont-ils ? Ce sont déjà les objets abstraits, les objets logiques. En complément (et en réaction) du processus d'abstraction une phase nouvelle de l'élaboration des concepts introduits des symboles : « La pensée revient en arrière et se cherche une nouvelle réalisation concrète. » La lettre A, par exemple, est « une réalisation assez satisfaisante d'un objet quelconque ». Finalement, « de même que l'intuition de l'espace est le terme d'une abstraction préaxiomatique, les règles intuitives de la logique et du bon sens, ne sont, *pour une part*, que l'aboutissement d'une schématisation à partir du monde des objets concrets ». Nous voici donc en pleine phase de transition.

Et « *l'autre part* » des règles de la logique ? Elle est relative aux idées de jugement et de vérité. A la primitive idée de *vérité* « *conditionnée*, forte dans un certain domaine d'application », il faudra substituer l'idée de vérité « *inconditionnelle* », de vérité logique, concept « *abstrait par axiomatisation*, dont l'emploi n'est fixé, en définitive, que par une certaine pratique ». Et ce sera la tâche de l'étude de géométrie déductive.

Il est certain que les enfants aspireront tous plus ou moins à compléter la géométrie expérimentale par une géométrie plus théorique. D'une part, il y a un désir de règles infaillibles et mécaniques qui évitent des tâtonnements et qui constituent une économie de pensée. (L'arithmétique du calcul en a donné le modèle). D'autre part, les enfants d'une douzaine d'années ont un besoin de généralisation, un soupçon de la permanence de certaines lois, et les questions se multiplieront : « Est-on certain d'obtenir toujours la figure convenable en faisant... Obtient-on exactement la bissectrice en... Une ligne brisée régulière finira-t-elle toujours par se fermer ?... Les côtés sont-ils vraiment égaux ? » Ces mots : toujours, vraiment, exactement, sont révélateurs. D'autre part, de nombreux problèmes de construction que le travail soulèvera n'ont pas de solution immédiate et une étude théorique apparaît comme nécessaire. Certains enfants auront le désir de définitions verbales, d'autres, en conquérant progressivement tout le plan, introduisent l'infini. Le besoin de dépasser l'expérience devient impérieux : c'est le moment de commencer l'initiation à la géométrie déductive.

Il faut avouer que les différences apparaissent énormes d'un enfant à l'autre. Mieux sans doute que tous les tests un peu artificiels, les réactions des enfants à cette période de transition sont révélatrices de leur nature d'esprit et de leurs dons prédominants.

On pourrait peut-être caractériser les méthodes d'enseignement durant cette période, par le remplacement du travail pratique de dessin par le dessin mental, la construction de la figure par vision intérieure. L'expérience prouve que l'exercice permet d'atteindre, dans ce domaine, des résultats étonnants. Je crois qu'un tel entraînement est essentiel, car c'est sur une figure conçue d'après sa définition que l'on raisonne, et non pas sur une figure dessinée.

L'autre aspect du travail à ce moment sera la création d'un cahier personnel de géométrie expérimentale, où seront codifiés les résultats obtenus, rédigés selon les besoins de chacun. Du reste, cela ne signifie pas l'abandon irréalisable de l'enseignement en commun : les élèves sont intéressés par les idées de leurs camarades. Il est toujours instructif de voir la réaction de la classe lorsqu'on demande : « Trouvez-vous que ceci mérite d'être mis dans le cahier ? » Le rôle essentiel du professeur, plus encore qu'au premier stade, serait de contrôler la direction générale de l'étude tout en profitant des suggestions des élèves dans les périodes heureuses, de proposer les sujets d'étude dans les jours mornes où personne n'a d'idées, d'organiser la discussion générale dans la recherche, et surtout d'enseigner comment on rédige et comment on dispose un cahier de géométrie.

Il faut, du reste, je crois, considérer que cette période de transition n'est pas vraiment distincte chronologiquement de la précédente et de la suivante. Elle représente seulement les moments du travail le plus abstrait de la période pré-géométrique, et les moments du travail le plus concret de la période déductive dont nous allons maintenant dire quelques mots.

III. — Quel est le niveau de nos élèves au point de vue logique au moment où ils vont commencer la géométrie déductive ? Il ne faut pas trop compter sur nos collègues pour nous le dire, si j'en juge par les réponses recueillies. Le professeur d'histoire dit qu'ils ne savent pas raisonner. (Par exemple, on prend comme cause d'une guerre un événement que l'on vient de placer à une date postérieure). Le professeur de latin répond que le raisonnement n'intervient vraiment dans cette discipline que lorsqu'on fait de la syntaxe, ce qui ne se présente guère avant la Troisième. Ainsi, c'est bien nous, professeurs de mathématiques, qui sommes chargés de l'initiation.

Il ne faut pas sous-estimer le pouvoir logique de nos élèves. On observe parfois des réactions d'une finesse et d'une profondeur étonnantes qui nous remplissent d'admiration et, plus souvent, nous étonnent et nous révèlent ce qui, dans la mentalité de nos élèves diffère de la nôtre, surtout si l'on compare, devant ces remarques inattendues, notre attitude à celle de la classe. Ce sont précisément ces expériences qui nous apprennent notre métier de professeur. Il serait bien instructif de faire un recueil de mots d'élèves : non pas un sottisier, mais une carte d'échantillons (nous en donnons quelques exemples en note). Ce qui ressort le plus nettement, c'est qu'il y a des

jours où l'on peut raisonner et d'autres pas (instabilité bien connue de l'attention chez l'enfant) et qu'il faut le laisser réagir en gestes et paroles sans craintes de moquerie ou de sanctions en cas d'erreurs.

Parlons seulement des bons jours. Les autres seront consacrés à la géométrie concrète. Il serait bien intéressant de savoir si la différence entre les enfants et nous est uniquement une question de degrés ou si c'est une question de nature. Par exemple, l'étonnement inquiet devant les premières affirmations obtenues par raisonnement par l'absurde (par exemple pour prouver que trois droites sont concourantes) provient-il seulement de la nouveauté ou d'une répugnance à employer le tiers exclu ? Par contre, c'est un vrai plaisir pour tous de constater sur un exemple (points équidistants de deux points donnés, par exemple) que le théorème contraire résulte du réciproque et que le réciproque du contraire résulte du théorème direct. C'est pourtant bien aussi un raisonnement par l'absurde ! On constate que le raisonnement par récurrence plaît bien et peut même être découvert avec un peu d'aide (par exemple pour la somme des angles d'un polygone). Mais que dire de la méfiance dès que « cela ne tombe pas juste » ? Est-ce seulement un résidu d'habitudes enfantines, une crainte de voir les calculs se compliquer ? Ou bien faut-il y voir, jusqu'à un certain point, une conception granulaire, pythagoricienne, de l'espace ? Est-il certain que nos élèves ont une intuition du continu ? Il semble bien parfois que la réponse est *non*.

Quoi qu'il en soit, notre tâche va être de montrer la possibilité de raisonnements déductifs en géométrie. Cela ne signifie évidemment pas que l'on va faire un exposé déductif de la géométrie ! Un exposé qui partirait de quoi, puisque nous n'énonçons pas les axiomes, et qui s'adresserait à qui, puisque les enfants ne savent pas encore raisonner ?

Je vois diverses notions à révéler : l'équivalence logique de deux énoncés. La possibilité de chaînes déductives. La possibilité de convergence de deux chaînes qui concourent à la formation d'une conclusion : l'obligation, dans l'expression verbale, d'exposer l'une après l'autre ces deux chaînes qui sont pensées simultanément, introduit ce petit mot réservé au logicien et entièrement ignoré des élèves : *or*.

La confiance dans les conclusions d'un raisonnement ne peut provenir que de l'habitude de la discussion et la recherche des cas d'exception. On s'aperçoit qu'après avoir cru plus ou moins nettement à l'évidence des propriétés (d'un parallélogramme, par exemple) déjà pratiquement connues, les élèves, surtout les moins doués, restent assez longtemps au stade du doute. Ayant compris qu'ils possèdent une vérité « conditionnée », ils sont lents à concevoir la possibilité d'une vérité « logique ». Comment ne pas les comprendre puisque la sagesse des peuples a formulé des proverbes tels que « toute règle a ses exceptions », et même, « l'exception confirme la règle » ! Ce refus est déjà un progrès sur l'acquiescement superficiel et obéissant. Pour dépasser ce stade, après toute démonstration faite sur une figure, objet de l'étude, dans le but de démontrer une propriété de celle-ci, il faut prendre cette démonstration elle-même comme objet d'étude pour en déterminer la portée et faire la discussion de sa validité. Il nous faut être

très sévères pour nous-mêmes, très sincères dans cet examen, si nous voulons donner à l'enfant confiance dans la logique. Et, par conséquent, il ne faut pas prétendre démontrer trop de choses !

Une remarque encore : en précisant les relations entre hypothèses et conclusions, on s'aperçoit (ce que l'enfant sent avec évidence) que toute proposition exacte a des réciproques exactes. Il ne faut pas demander : « La réciproque de ce théorème est-elle exacte ? », mais : « Comment énoncer une réciproque pour qu'elle soit exacte ? ».

Mais que comprendra notre cahier de « géométrie déductive » (pour adopter l'heureuse distinction proposée par M. GLAESER (Conf. du 16 octobre 1950) si le cahier de géométrie expérimentale comprend, comme je le propose, l'étude des angles, les trois cas d'égalité (le troisième à propos de l'emploi du compas) et naturellement l'inégalité triangulaire contenue dans la notion de distance ?

Passons en revue les principaux points, ou, pour mieux dire, carrefours de la forêt touffue dont nous explorons certaines parties.

Naturellement, il n'y a pas de « début » au cours de géométrie déductive dont nous parlons (classe de Quatrième). Surtout pas de pseudo-définitions inutiles et purement verbales en géométrie intuitive, insuffisantes en géométrie déductive. Nous commençons le cahier lorsque les enfants sentent qu'un raisonnement mérite d'être rédigé et conservé.

Premier chapitre : *Les angles*. Equivalence du résultat concernant les angles adjacents supplémentaires et celui qui concerne les angles opposés par le sommet. Quant à savoir lequel précède l'autre, ce n'est pas moi qui puis le dire, faute d'une axiomatique ! Chaque enfant a une opinion, considérant en général comme plus primitif l'égalité des angles opposés par le sommet. Qu'importe ? L'essentiel est la réversibilité du raisonnement.

Au cours de la révision, insister sur le fait qu'on utilise continuellement ce que l'on voit sur l'ordre de succession des demi-droites. On doit donc préciser dans les « demandes » le sens dans lequel les angles doivent être portés (angles compris entre 0 et 2 plats, sauf rares exceptions).

Deuxième chapitre : *Les triangles*. On codifie en des énoncés les résultats de la géométrie expérimentale sur les cas d'égalité. Seulement, ce qui est nouveau, c'est de dégager que, de ces trois hypothèses indépendantes et posées simultanément, on déduit une infinité de conclusions, tout élément ayant un homologue et lui étant égal. Quelques essais de réciproques montreront l'importance du nombre trois des hypothèses à choisir parmi les anciennes conclusions et fourniront les premières applications des trois cas classiques (noter que le cas douteux est accessible, puisque l'usage du compas est normal).

Triangles isocèles. Le mot éveille un contenu intuitif très riche. N'avons pas l'air de l'ignorer. Nous voulons montrer l'équivalence de deux hypothèses qui pourraient bien sembler indépendantes : égalité de deux côtés, égalité de deux angles. La question est donc de faire comprendre qu'il y a là quelque chose à démontrer, car la première réaction de la classe est de s'écrier : « Bien sûr, puisque le triangle est isocèle ! ». Mais laissons le

mot (que le maître s'est bien gardé de prononcer, car il n'a pas eu la maladresse de commencer par une définition). Il s'agit de savoir si le triangle a bien toutes les propriétés que nous exigeons pour dire, en conclusion : Nous appellerons ce triangle « isocèle ». Il est nécessaire, et l'expérience le prouve, très facile, de faire douter l'enfant (au moins quelques instants) de tout énoncé général par un appel à l'honnêteté, car il doit bien avouer que ses connaissances proviennent d'expériences faites sur des triangles de dimensions moyennes, de formes assez analogues, et aussi de phrases qu'il a entendues : avouons-lui que tout cela est certain sur le plan pratique, « sommairement fidèle », suivant l'expression de M. Gonseth. Nous ambitionnons maintenant davantage. Bien peu nous suivront la première fois dans notre exigence. C'est en raisonnant que l'on devient logicien !

Ayant obtenu de nombreuses conclusions de notre hypothèse unique, nous essayons les réciproques à une seule hypothèse. La simplicité du schéma logique, nous permet de faire le tableau des quatre propositions associées : directe, réciproque, contraire, réciproque du contraire. A la grande surprise de l'enfant, mis en goût par ce jeu, le mécanisme s'arrête après le quatrième énoncé. Nous faisons pour la première fois des raisonnements par l'absurde, dans des cas bien acceptés. Ceci amène sur les lèvres un sourire spécial, un peu ironique et méprisant... Méprisant envers qui ? Envers ceux qui doutent du tiers exclu ! Ce sourire est un des meilleurs tests que je connaisse pour diagnostiquer la possession des exigences de la logique classique.

Le tableau des quatre énoncés est prolongé, dans l'étude de la médiatrice, par des énoncés complémentaires caractérisant les deux régions (nous utilisons l'inégalité triangulaire). Tout est ainsi prêt pour le premier aspect des lieux géométriques : la droite, ensemble de points, et frontière. Mais ne prononçons pas encore ce mot, du reste si mal choisi : un seul exemple ne peut donner une notion générale.

Dans cette étude nous faisons des chaînes de raisonnement. On s'aperçoit que l'élève, livré à lui-même pour faire des exercices comprenant plusieurs questions, n'a pas la même confiance dans les conclusions qu'il a obtenues par la première question, que dans les hypothèses de l'énoncé qu'il a utilisé pour construire la figure. Ceci est tout à fait compréhensible de la part d'enfants qui n'ont pas encore de fortes raisons de croire à la certitude logique : c'est le passage dont nous avons parlé, des vérités conditionnées par les conditions d'application, aux vérités inconditionnelles. Combien d'élèves penseront encore au fond d'eux-mêmes : « Quand même, on ne peut pas savoir... » C'est l'expression même de ceux qui refusent les conclusions de la logique. Si nous obtenons la confiance et acceptons les réactions sincères, là encore nous jugeons le stade logique atteint par l'auditoire.

Troisième chapitre : *Les parallèles*. Je crois qu'il est essentiel d'obtenir par voie déductive au moins un résultat qui, de façon évidente, dépasse l'expérience. C'est pourquoi je démontre en Quatrième l'existence des parallèles à partir des cas d'égalité des triangles et de remarques topologiques. Il suffit d'avoir bien étudié la figure formée en prolongeant une médiane

d'une longueur égale à elle-même (ce qui a été le sujet d'exercices d'application du deuxième cas d'égalité des triangles, et ce que nous avons aussi utilisé pour l'étude de l'hypothèse : médiane-bissectrice confondues). Avec quelques remarques topologiques sur les régions traversées par la médiane on prouve que tout angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des angles intérieurs non adjacents. Tout va bien et c'est facile. On a de longue date préparé son effet en soulignant, chaque fois que les élèves prononcent le mot de parallèles (ce qui est inévitable en plusieurs semaines quand on laisse les enfants avouer ce qu'ils pensent), que cette notion est d'ordre pratique, car personne n'a prolongé bien loin des segments de droites. Lorsqu'on examine alors la figure dessinée au tableau constituée par deux angles égaux dans la position que nous appellerons plus tard alternes-internes, et que nous cherchons le triangle, c'est un vrai coup de théâtre ! Mais il ne faut pas croire que la conclusion est dégagée immédiatement et le dialogue se fait plus pressant. Après tout, peut-on savoir ? On n'a pas été voir à quelques kilomètres ! Le raisonnement est compris, mais il faut le peser pas à pas. Est-ce bien *toujours vrai* ? Et si l'on prend un tout petit angle ? ou un très obtus ? La grandeur du résultat inquiète et écrase. Ce jour-là aussi, nous jugeons les enfants d'après leur émotion : un triangle n'est pas libre d'avoir un angle, etc... Nous sommes bien loin de la géométrie expérimentale !

Et, au cours suivant, c'est la grande leçon d'honnêteté : le postulat d'Euclide ! Non, lorsqu'une quarantaine d'élèves construisent des parallèles issues d'un point au moyen de plusieurs sécantes, sur leur papier et au tableau, il n'est pas si évident que ces parallèles sont confondues ! Et, précisément, nous venons de prendre confiance dans le pouvoir de la logique ! Quelle déception ! Un petit historique s'impose et nous tirons la grande leçon : Oui, il faut parfois admettre, mais à condition de le savoir et de l'avouer.

Il me semble que l'essentiel est fait alors et la suite ne présente plus de vraies difficultés. Dans l'étude des parallélogrammes, on fait comprendre la différence entre une définition suffisante et non surabondante, et la simple dénomination d'une figure globalement connue avec de nombreuses propriétés. Les figures sont naturellement classées d'après le nombre de paramètres dont elles dépendent.

Dans un dernier chapitre, cette même année, on étudie avec plaisir la circonférence, continuellement employée grâce au compas, mais bien sacrifiée. Il n'y a de vraies démonstrations que pour les angles inscrits.

Ainsi le cours comprend quelques énoncés essentiels et de nombreuses conséquences. Celles-ci : applications, exercices, apparaissent au hasard des inquiétudes et de l'imagination des élèves. Il faut les énoncer, chercher la solution avec les enfants en essayant de bon cœur les voies qu'ils proposent. L'expérience seule permet de pressentir laquelle sera la meilleure. On choisit la ou les solutions qui méritent d'être rédigées, ainsi que les énoncés qui méritent d'être appris par cœur pour servir ultérieurement. Naturellement, certains énoncés, en petit nombre, sont jugés par le maître indispensables dès cette première année, et il les propose au bon moment.

Tout à fait différents sont les problèmes de construction. Suivant l'expression de M. FRÉCHET (Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 1938) : « L'étude du monde réel a engendré la mathématique ; la mathématique, après lui avoir dû sa naissance, doit sans cesse justifier sa propre existence en confirmant son adéquation aux faits réels par la vérification expérimentale des prédictions auxquelles elle parvient. » Bien souvent, c'est à la fin d'un tel travail d'application concrète qu'un élève s'écrie : « Ah ! j'ai compris ! » Cela prouve que cet élève est, au moins à cet instant, au stade prégéométrique et qu'il n'a pas compris ce que nous désirons. Mais les bons élèves sentent cela aussi bien que nous, et s'offrent avec véhémence pour redonner, en particulier ou collectivement, la démonstration et les remarques utiles sur de nouvelles figures. Le but est atteint lorsque l'on peut faire la démonstration, soit avec des mots sur la figure conçue par dessin mental, soit au contraire sans mots, avec de simples gestes, sur la figure dessinée au tableau. Mais ceci ne retire rien au plaisir de voir le résultat sur une belle figure dessinée avec soin et précision.

Plus tard (classe de Troisième), on montrera la possibilité de calculer les longueurs constructibles (nous avons abandonné depuis longtemps les ficelles tendues). C'est tout un aspect nouveau de la géométrie qu'il faut étroitement associer à l'algèbre. Il serait bien plus indiqué de faire la résolution de systèmes simples du premier et deuxième degrés que tenter, avec un succès douteux, des exercices gratuits sur des fractions rationnelles plus ou moins bizarres ! Il faut noter que le théorème de Thalès et la similitude sont bien plus accessibles que la géométrie sur la droite et, à mon avis, doivent précéder celle-ci.

Je voudrais dire encore quelques mots sur l'étude des si mal nommés « lieux géométriques ». (Voir dans Littré les 24 sens du mot lieu, dont aucun n'est le nôtre). (Voir aussi comment dans son livre déjà cité, M. FAVARD est obligé de passer d'un sens à l'autre à la page 72). Ne pourrait-on pas, par pitié pour les débutants, donner un nom nouveau à une notion si nouvelle ? Dire un *locus*, par exemple ?

L'enfant, même lorsqu'il a déjà fait un peu de géométrie, a la conception de figures globales. Un segment de droite, un triangle, une circonférence, ce sont des figures ; on peut en extraire des éléments tels que, points, angles, etc..., éléments auxquels on peut parfois attacher des nombres. Dans un problème où l'un des nombres qui sert à la définition de la figure est susceptible de varier, ou bien, reste arbitraire, la figure dépend d'un paramètre, ou bien, a un degré de liberté. Que peut-on dire des points de cette figure ? Certains sont déterminés ; d'autres non, mais ceux-ci ne peuvent en général pas être pris au hasard. Si l'on a parlé de *paramètre variable*, un point, qui dépend de ce paramètre, décrit une *trajectoire*. Si l'on a parlé de *degré de liberté*, le point qui n'est pas déterminé entièrement est arbitraire dans un ensemble. Si l'on considère la condition à laquelle doit satisfaire le point comme complémentaire des conditions opposées (égalité complémentaire des inégalités contraires), l'ensemble apparaît comme *fron-*

tière des deux régions. Le fait qu'une même courbe peut être définie de ces trois manières n'a rien d'évident pour l'enfant, et il nous faut mettre en évidence ces points de vue, qui donnent lieu à des études d'esprits différents. Mais les points de vue se complètent, et je suis persuadée que l'enfant n'est rassuré que lorsqu'il a vu la concordance des résultats obtenus par les différentes voies. C'est grâce à cette concordance que la question est élémentaire et que l'étude ne nécessite pas les précisions axiomatiques sur la définition des courbes qui permettent de dissocier les divers points de vue que nous avons énumérés.

C'est peut-être comme ensemble que se présente le premier lieu que l'on rencontre (médiatrice), mais la notion de frontière est, je crois, plus primitive, de sorte que c'est le théorème contraire, plutôt que la réciproque qui s'impose. En tout cas, nous obtenons l'adhésion entière en ne concluant qu'après avoir écrit le tableau complet des quatre propositions dont nous avons parlé. La phrase de conclusion contenant le mot « lieu » est un résumé de ce tableau. La phrase globale a un sens bien net, sans qu'il soit utile (au contraire) de donner une définition verbale du mot lieu. Ce mot doit être employé lorsque le tableau complet est démontré, pas avant.

Mais, dans la plupart des exercices, il s'agit de figures dépendant d'un paramètre, longueur ou angle. On fera donc varier ce paramètre dans un sens arbitraire, mais choisi, dans tout l'intervalle permis et l'on étudiera la trajectoire du point mobile. Je ne crois pas que l'introduction de la notion de temps, non mesuré, mais qui s'écoule, soit mauvaise. Comment donner la notion d'un paramètre variable autrement ? (C'est bien plus tard que nous donnerons un sens relatif à la notion de croissance d'une fonction, en étudiant les fonctions de fonctions). Au lieu de construire quelques points convenables pour la réalisation concrète, on construira les polygones articulés. Il n'est pas alors logique d'exiger des réciproques ; il suffit de s'assurer de la façon continue dont le point décrit son lieu et du sens du mouvement. La conclusion doit indiquer, non seulement l'arc décrit, mais s'il y a des allers et retours, de sorte que deux valeurs du paramètre donnent le même point ; puis on étudiera les dispositions particulières (droites devenues tangentes, points qui se confondent). Un peu de couleur pour distinguer les parties fixes des parties mobiles, quelques flèches rappelant le sens des mouvements et facilitant la rédaction, et l'étude devient accessible. Ce point de vue paraît de beaucoup le plus aisé (même à un niveau bien supérieur, l'introduction d'un paramètre variable, de préférence angulaire, est presque toujours favorable dans la recherche d'un lieu ou d'une enveloppe) ; en somme, cette méthode revient à n'introduire que des ensembles ordonnés, ce qui paraît prudent pour des débutants qui ont à peine la notion de l'infini actuel. (Naturellement, les lieux envisagés à ce point de vue seront associés, dans les problèmes, à l'étude de la variation des nombres — longueurs ou angles — qui varient, et à leur représentation graphique en accord avec le cours d'algèbre).

Nous arrêtons ici ces remarques. Au stade suivant, l'enseignement doit proposer une étude systématique des principaux faits mathématiques à par-

tir, sinon encore d'axiomes, du moins d'une base intuitive plus restreinte et mieux délimitée. Il faut peut-être attendre les résultats de la géométrie dans l'espace pour faire comprendre la grande distinction des propriétés métriques, affines, projectives. Peut-être, cependant, ces préoccupations pourraient-elles avoir déjà quelque influence sur l'enseignement au deuxième stade (classe de Seconde et Première).

En conclusion, je pense que l'enseignement au premier stade doit être orienté de façon à être une initiation à la logique. Autour de quelques points essentiels, c'est une exploration en tous sens de quelques domaines fondamentaux de la géométrie.

Remarques d'élèves et simples notes :

1. Paroles étranges de fillettes, bonnes en « lettres », mais pas en géométrie !

a) La deuxième droite est plus douce et plus régulière que la première.

b) On ne peut pas élever de A la perpendiculaire sur AM à cause du cercle qui est devant.

2. Quantitatif et qualitatif. La règle de signes est à l'étude pour un produit de plus que deux facteurs : le produit sera positif s'il y a une majorité de facteurs positifs... Protestation générale du reste.

3. En faisant seul le premier long problème de géométrie : Les hypothèses de la deuxième question, ce sont bien les conclusions de la première ?

4. Un brusque scrupule chez une bonne élève de Troisième : « Dans la résolution d'un système, a-t-on encore le droit de remplacer $\frac{3}{6}$ par $\frac{1}{2}$? »

5. Un cas remarquable (12 ans $\frac{1}{2}$, classe de Quatrième : Ne sait rien de plus que les autres élèves de cette classe) : On a découvert (méthode de M. Lebesgue), qu'après un nombre premier il y en a au moins un autre, puis un autre encore, etc... et je propose de conclure : « Il y a une infinité de nombres premiers. » Acceptation. Mais après la classe il me demande : « Les deux conclusions que l'on a écrites, est-ce exactement la même chose ? »

On a défini, pour que la construction soit immédiate, le trapèze isocèle comme ayant deux angles formés par la même base, égaux, ou, pour mieux expliquer, le nom, comme formant, par prolongement, un triangle isocèle. Cet élève remarque immédiatement : « Ce n'est pas la même chose ! Dans la première définition, on accepte le rectangle, et pas dans la deuxième. » On vient de finir l'étude des angles d'un parallélogramme ; pour obtenir l'énoncé, je dois fournir le mot qui leur manque : consécutif. On décide alors d'écrire la conclusion. Ce même élève objecte : « On ne peut pas encore ! On n'a pas écrit la définition du mot " consécutif " ! »

6. Une autre bonne élève du même âge : On a utilisé, dans l'étude des nombres premiers le produit des nombres colorés (c'est-à-dire premiers et étudiés). P. D... a, la première, l'idée d'ajouter *un* (chaque année cette idée s'impose). Mais, ensuite, P. D... remarque : « On aurait aussi bien pu retrancher un pour avoir ce qu'on cherche. »

7. Quelques phrases extraites du premier devoir où, au lieu d'étudier seulement une figure imposée, l'énoncé demande : Comment choisir l'angle

pour que l'on ait $BD = CD$? (La réponse est 100°). L'élève (5), dont on a vu les réponses logiques, mais qui manque un peu d'intuition des formes et qui ne soigne pas les figures : « Au point de vue du dessin, j'ai pu voir que la valeur convenable était peut-être 80° , mais je reconnais que je ne trouve pas, au point de vue raisonnement, un théorème capable de le prouver. »

F. D... : « J'admets, pour la suite, que l'angle vaut 100° , mais je ne peux pas le démontrer. »

F. A... (qui admet une valeur fausse et étudie correctement la figure correspondante) : « Mais je n'ai nullement obtenu $BD = CD$, loin de là ! »

Une des plus faibles élèves de cette classe de 45 élèves : « Ce qui me gêne un peu, c'est la manière convenable de tracer les bissectrices. »

8. Première étude des côtés d'un parallélogramme. M. A... s'écrie immédiatement : « Les côtés opposés sont égaux. » Silence. Je demande : « Etes-vous satisfaites ? »... Enfin, est-ce bien ou mal ? Je ne suis pas mécontente, moi... « Est-ce bien ? » (Hésitant) : « Oui. » « Est-ce mal ? » (Convaincu) : « Oui. » « Enfin, qu'en pensez-vous ? » Cri presque général : « Il faut le démontrer. » L'élève qui a parlé baisse la tête et rougit. Mais, après la classe, une des élèves qui n'a encore jamais réagi, vient demander : « Mais, vraiment, est-ce bien vrai pour tous les parallélogrammes ? » Elle ne croit pas encore aux vérités inconditionnelles de la logique.

Mlle L. FÉLIX,
professeur au Lycée La Fontaine.