

IV. Document officiel

Rapport sur la composition de Mathématiques (classe de Première) au Concours général de 1949

[Le jury était composé de : M. DESFORGE, inspecteur général, président ; Mlle BARBIER, professeur de mathématiques au Lycée Victor-Duruy ; Mlle LECONTE, professeur de mathématiques supérieures au Lycée Fénelon ; MM. FLAVIEN, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; M. ITARD, professeur de mathématiques supérieures au Lycée Henri-IV ; M. MIRABEL, professeur de mathématiques supérieures au Lycée Saint-Louis].

Le problème comportait, cette année, l'étude de quelques propriétés des triangles AMN, ayant un sommet fixe A, et dont la projection orthogonale sur un plan donné P passant par A est un triangle donné ABC ; les points M et N étaient repérés par leurs abscisses y et z , comptées à partir des points B et C, sur les normales $y'By$ et $z'Cz$ ou plan P, orientées dans le même sens.

Une première partie donnait aux candidats l'occasion, en répondant à quelques questions simples, de se familiariser avec les principaux éléments de la figure. D'abord le calcul, en fonction des côtés a, b, c du triangle ABC et des abscisses y et z , des longueurs des côtés du triangle AMN et des mesures algébriques des segments orientés IB et IC ayant pour origine le point de rencontre I du côté BC avec le plan du triangle AMN ne constituait qu'une application très élémentaire des propriétés classiques des mesures algébriques de vecteurs et des triangles homothétiques ; on pouvait espérer que la grande majorité des solutions serait tout à fait correcte, puisqu'il s'agissait d'élèves choisis ; or, les fautes et les erreurs, faciles à imaginer, ont été fort nombreuses, tant dans le maniement des opérations algébriques que dans leur interprétation géométrique.

La simplicité élémentaire de la question relative aux centres de gravité des triangles AMN devait, semble-t-il, permettre à tous les candidats d'en présenter la solution avec précision et clarté, voire avec élégance ; or, si le résultat formel a été indiqué très généralement, bien des rédactions se sont révélées maladroites et insuffisantes.

L'énoncé attirait ensuite l'attention sur les liaisons qui existent entre les points D et H, pieds des hauteurs issues de A dans les triangles ABC et AMN ; il suffisait évidemment d'avoir constaté l'orthogonalité des droites AD et MN pour répondre facilement aux questions posées à ce sujet ; la discussion des résultats, l'étude du cas particulier des triangles AMN rectangles en M ou en N, ne demandaient qu'un peu de soin. Sur ce point, beaucoup de copies ont marqué de nettes insuffisances ; sans doute les faits essentiels sont en général entrevus, mais les raisonnements qui les présentent ou qui prétendent en tirer des conséquences sont souvent incorrects ou incomplets. Par exemple, lorsqu'il s'agit de construire, à partir du point D, le point H correspondant à un triangle AMN donné, l'identification de ce point H avec la projection orthogonale du point D sur la droite MN est la plupart du temps exposée « à sens unique », alors qu'elle doit être établie sous forme de condition nécessaire et suffisante (soit par l'étude d'une réciproque, soit par une remarque bien évidente d'unicité) ; de même la relation entre y et z , caractérisant les triangles AMN rectangles en M, est presque toujours formée en partant de l'hypothèse : « Si le triangle est rectangle en M,... », et la nécessité d'une réciproque ne paraît guère s'imposer logiquement à l'esprit des élèves. N'est-ce pas, pourtant, dans l'étude de questions de ce genre, lorsque l'ensemble des éléments peut être saisi sans difficulté, même par des novices, que devraient se révéler le souci de la rigueur logique et le sens du contrôle des faits réellement établis ?

Cette première partie se terminait par la recherche des cas de coïncidence des bissectrices des angles en A des deux triangles ABC et AMN ; les résultats établis au début permettaient d'élaborer une solution élémentaire qui n'était du reste pas la seule valable, et quelques candidats ont fait intervenir ici, non sans succès, les propriétés des divisions harmoniques et de la projection orthogonale d'un angle droit, ou bien les propriétés des plans bissecteurs d'un dièdre.

La deuxième partie concernait l'étude de ceux des triangles AMN dont les côtés AM et AN sont égaux, leur détermination était préparée par la démonstration d'une propriété très simple, liée à celle établie précédemment pour les pieds des hauteurs H et D, et caractérisant les médiatrices des segments MN, qui correspondent à ces triangles particuliers. La construction d'un tel triangle, lorsque l'on donne la trace de son plan sur le plan ABC, se ramenait alors, dans le cas général, à la recherche des points communs à une droite et à un cercle, et la discussion s'ordonnait sans difficulté. On déduisait de là, facilement, le lieu géométrique des projections orthogonales du point D sur les plans de ces triangles isocèles, et le raisonnement correspondant n'exigeait quelque précaution que dans la partie « réciproque ».

Beaucoup de candidats ont donné, sur ces différents points, des indications correctes, parfois ingénieuses ; mais, là encore, on ne trouve qu'une huitaine de copies vraiment satisfaisantes ; les défaillances ordinaires, j'allais dire classiques, sont fort nombreuses.

La fin de cette deuxième partie était une question d'algèbre : détermination des abscisses y et z pour lesquelles le triangle AMN est équilatéral. Il semblait que, placée à cet endroit de l'énoncé, les candidats pouvaient l'aborder avec des ressources intellectuelles encore intactes, les fatigues de recherches longues ou pénibles leur ayant été, jusque-là, épargnées. Mais « l'insuffisance algébrique » des élèves, déjà signalée l'an dernier, s'est ici révélée d'une façon nette, car, si beaucoup de compositions contiennent un commencement d'étude, on peut, en fait, réduire à cinq le nombre de celles où le problème est à peu près correctement posé et où des indications convenables sont données sur la solution ; aucun candidat n'a su mener jusqu'au bout la résolution et la discussion demandées. Même si l'on admet, ce qui est fort possible, que certains des meilleurs, ayant délaissé provisoirement cette question pour traiter la partie suivante, n'ont pas eu ensuite le temps d'y revenir, on est bien obligé pourtant de constater une disproportion marquée dans la qualité et la valeur des connaissances, en géométrie d'une part, en algèbre d'autre part.

Il s'agissait sans doute d'un problème qui exigeait, pour être entièrement traité, une certaine maîtrise ; mais le départ ne présentait aucune difficulté, et l'introduction, imposée par l'énoncé, de l'inconnue auxiliaire t représentant le carré de la longueur du côté du triangle cherché, devait éviter les tâtonnements, faciliter la mise en équation correcte et complète, et mener par une voie normale à la solution, qui se réduisait finalement à la

recherche des racines d'une équation du second degré en t supérieures ou égales aux deux nombres b^2 et c^2 , puis à la détermination du signe du produit yz . La conduite raisonnée des opérations et des calculs ne dépassait point les possibilités d'un bon élève de Première ; il suffisait d'avoir le souci, à chaque étape, de bien faire le point, et aussi de ne pas oublier la recommandation majeure, faite et répétée sans nul doute par tous les maîtres, de conserver toujours sous les yeux, ou présentes à l'esprit, les formes variées sous lesquelles se présentent, au cours des transformations successives, les expressions algébriques que l'on a été amené à faire intervenir.

Dans la dernière partie du problème, d'ailleurs indépendante de la deuxième, il s'agissait d'étudier les triangles AMN rectangles en A. Cette question aurait pu être rapprochée de celle qui avait été posée dans la première partie (triangles rectangles en M ou N), mais l'énoncé ne suggérait point d'établir une telle liaison et demandait de rattacher la détermination de ces triangles à une propriété de la sphère décrite sur le segment MN comme diamètre, puis à une propriété, équivalente à la précédente, du grand cercle section de cette sphère par le plan B γ C z . On mettait ainsi en évidence les rôles que jouent, d'une part, le cercle du plan ABC, passant par A et ayant pour centre le milieu de BC ; d'autre part, les points d'intersection, F et F', de ce cercle avec la droite BC.

La similitude du triangle FMN et du triangle EBC, E désignant la projection orthogonale de F sur la droite MN, pouvait être établie par des égalités angulaires résultant de la considération des quadrilatères inscriptibles MEFB, NEFC ; il était alors facile de définir le lieu géométrique des projections orthogonales E et E' des points F et F' sur les droites MN correspondant aux triangles rectangles étudiés, et d'en déduire la construction de ceux de ces triangles dont le plan passe par une droite donnée du plan ABC.

Ces dernières questions étaient plus difficiles que les précédentes ; cependant, une vingtaine de copies environ contiennent des essais valables sur la similitude des triangles FMN et EBC, et sur la détermination du lieu géométrique des points E et E' ; si l'on relève encore dans les raisonnements bien des négligences et des défaillances, elles sont, à ce moment du problème, beaucoup plus excusables que dans les débuts.

Enfin, l'énoncé demandait, comme application de la relation entre y et z qui caractérise les triangles AMN rectangles en A, de définir ceux de ces triangles dont l'hypoténuse, ou dont l'aire, est la plus petite possible. Pour éviter toute difficulté de principe, l'inégalité classique, permettant de déterminer le minimum de la somme de deux variables positives dont le produit est constant, était rappelée. On était ainsi ramené à la recherche du minimum de la somme $y^2 + z^2$ (pour l'hypoténuse), ou de la somme $b^2y^2 + c^2z^2$ (pour l'aire), sachant que le produit yz des deux paramètres algébriques y et z a une valeur constante, positive ou négative suivant la forme du triangle ABC (le cas particulier du triangle ABC rectangle en A étant évident). Si une quinzaine de candidats ont su poser la question, la plupart

n'ont pas tenu compte du fait que les abscisses y et z n'étaient pas nécessairement positives, et ont, naturellement, obtenu des résultats étranges dont quelques-uns auraient dû, par leur invraisemblance, attirer l'attention et suggérer l'idée d'un contrôle du raisonnement et des calculs.

Si l'on cherche à comparer cette épreuve et celle de 1948, on peut noter que les difficultés des deux problèmes étaient comparables au point de vue géométrique, tandis que la partie algébrique était sensiblement plus délicate cette année. Ce fait explique sans doute que les résultats ont paru un peu moins bons que ceux de l'an dernier, tant pour l'ensemble que pour les meilleurs des candidats.

Ainsi, au point de vue de l'algèbre, l'expérience de 1949 confirme celle du précédent concours, et montre que les remarques déjà présentées à ce sujet conservent toute leur valeur ; il semble que cette question mérite de retenir l'attention.

Bien entendu, il ne s'agit point, en cette affaire, de ne rechercher qu'un entraînement intensif, visant à l'acquisition de mécanismes et d'automatismes, mais bien de réaliser progressivement l'initiation à une certaine forme, importante, essentielle même, de la pensée logique, où la réflexion et l'imagination jouent leur rôle au même titre que dans d'autres disciplines.

L'étude de l'algèbre, comme celle de la géométrie, doit, à ce niveau de l'enseignement, prendre une place de choix dans la formation intellectuelle et dans la recherche des moyens d'expression. Puissent, à cet égard, nos élèves apporter autant de soin à la rédaction d'une question de mathématiques qu'à celle d'une dissertation française ou d'une version ! Ils y trouveront d'autant plus de joie, et de profit, que l'effort qu'ils feront ainsi, pour ordonner leurs idées, pour les présenter clairement, précisément, avec élégance, les mettra souvent sur la voie d'une amélioration, leur révélera peut-être quelque faute ou quelque insuffisance, leur évitera parfois des piétinements et des redites, leur permettra enfin de présenter un travail plus fini et plus parfait.

Cent quarante candidats, nombre sensiblement égal à celui de l'an dernier, ont pris part à l'épreuve. Après une première élimination, trente-trois compositions furent retenues par le jury pour une seconde lecture. Au classement final, les trois premières, manifestant d'ailleurs des qualités différentes, méritaient des notes très voisines : deux furent proposées pour un premier prix, *ex-æquo*, et la troisième pour un second prix ; les six suivantes furent jugées dignes d'un accessit.

Ce concours n'a pas révélé, comme en 1948, de candidat ayant dominé entièrement le problème ; cependant, si l'on excepte la partie algébrique, la moyenne des résultats est tout à fait analogue à celle de l'année passée.

Et je tiens à donner à ce rapport une conclusion optimiste, qui n'est pas en contradiction avec les observations et les critiques présentées en analysant point par point le problème ; car il ne faut pas oublier que l'on ne saurait attendre de jeunes gens, qui n'ont pas encore choisi leur voie définitive, et dont la spécialisation est, fort heureusement, à peine ébauchée,

la maîtrise que sous-entendent nos exigences. Que bon nombre de candidats, aux prises avec une épreuve difficile et, pour eux, nouvelle, se comportent fort honorablement, montre assez la qualité de l'enseignement qu'ils ont reçu, et la valeur et le dévouement des maîtres qui les ont formés.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

J. DESFORGE.
