

V. Documents officiels

Rapport sur la Composition de mathématiques (classe de Première) au concours général des lycées et collèges en 1948

[Le jury était composé de : M. Desforge, inspecteur général, président ; Mlle Barbier, professeur de mathématiques au lycée Victor-Duruy ; MM. Cagnac, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand ; Flavien, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand ; Itard, professeur de mathématiques supérieures au lycée Henri-IV ; Mirabel, professeur de mathématiques (Saint-Cloud) au lycée Saint-Louis].

Le problème proposé aux candidats concernait l'étude de quelques propriétés des figures formées à partir des trois sommets O , A , B d'un triangle fixe et des projections orthogonales A' et B' de deux d'entre eux, A et B , sur une droite quelconque OA , passant par le troisième, et distincte de la normale en O au plan OAB . La présentation des données, au début de l'énoncé, attirait l'attention sur un certain nombre d'éléments géométriques, liés à la figure initiale, et susceptibles d'intervenir dans la recherche de la solution : projection orthogonale OD de OA sur le plan R du triangle OAB , traces sur R des plans P et Q projetant orthogonalement A et B sur la droite OA , points de rencontre de ces plans avec les droites OD , OA , OB .

Dans la première partie, une relation de proportionnalité entre les mesures algébriques des vecteurs d'origine O , déterminés sur les droites OA , OD , CA , OB par les plans projetants P et Q , se déduisait immédiatement du

théorème de Thalès et servait de point de départ dans l'étude du lieu géométrique des droites OA pour lesquelles le rapport $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$ a une valeur donnée m , et des lieux géométriques des points A' et B' correspondant à ces droites ; quelques cas particuliers remarquables étaient signalés.

Une correspondance étant ainsi établie entre toute droite OD du plan R et la valeur que prend le rapport $m = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OB'}}$ sur les différentes droites OA

dont la droite OD est la projection orthogonale sur le plan R , on demandait de préciser cette correspondance en établissant la formule, d'ailleurs donnée dans l'énoncé, qui lie le nombre m au sinus et au cosinus de l'angle orienté λ formé par la bissectrice intérieure de l'angle AOB et par la droite OD : le rapport m apparaissait ainsi comme une fonction homographe de la variable $x = \operatorname{tg} \lambda$, susceptible de prendre toutes les valeurs possibles. L'étude des variations de cette fonction m de x terminait ce premier groupe de questions et permettait un certain nombre de contrôles faciles.

Cette partie, qui ne présentait aucune difficulté sérieuse, a été naturellement abordée par tous les candidats, et les deux tiers environ en ont donné, soit une solution complète, soit une solution partielle assez satisfaisante, malgré de fréquentes maladroitness. L'un des obstacles sérieux que les élèves ont à surmonter, même quand il s'agit de figures très simples, provient de la peine qu'ils éprouvent à voir avec une netteté suffisante la disposition des éléments géométriques en jeu ; beaucoup, par exemple, ne se rendent pas compte du fait que les droites A_1A' , B_1B' , joignant les projections orthogonales A_1 et B_1 des points A et B sur la droite OD aux projections orthogonales A' et B' des mêmes points sur la droite OA , sont des droites parallèles. On relève aussi de nombreuses incorrections dans l'emploi et le maniement des mesures algébriques de vecteurs, ainsi que dans l'utilisation des formules élémentaires de trigonométrie concernant la projection orthogonale d'un vecteur sur un axe.

Il convient également de signaler de fréquentes fautes de rédaction et de vocabulaire, révélant, soit une erreur de pensée, soit une imprécision fâcheuse dans la compréhension de certaines notions fondamentales, que l'on trouve notamment dans les raisonnements relatifs aux lieux géométriques : des phrases telles que : « le lieu géométrique du point A' est, d'une part, la sphère décrite sur le segment OA comme diamètre, d'autre part, le plan W », ne sont pas rares.

L'étude des cas particuliers où l'un des segments OA' ou OB' est nul a donné lieu, dans bien des copies, malgré les précautions prises dans l'énoncé, à des considérations regrettables, tenant pour la plupart à une extension abusive de la validité des relations de proportionnalité, démontrées seulement lorsque tous les segments envisagés sont différents de zéro.

La deuxième partie du problème concernait l'étude du volume du tétraè-

dre $ABA'B'$, lorsque les points $A'B'$ sont distincts et situés hors du plan OAB . Une première question permettait de ramener la détermination de ce volume à celle du volume d'une pyramide ayant pour base le triangle OAB et pour hauteur la projection orthogonale du segment $A'B'$ sur la normale OZ au plan OAB . La solution la plus communément adoptée par les candidats exigeait un examen des différents cas de figure, qui n'a été réellement fait que par un petit nombre.

Le calcul de ce volume en fonction du sinus et du cosinus de deux angles, indiqués par l'énoncé, permettant de repérer la position de la droite OA dans l'espace, a été en général correctement présenté par ceux, trop rares, qui ont traité la question. La recherche des positions des droites OA , pour lesquelles le volume du tétraèdre est maximum, se ramenait alors à la détermination du maximum du produit

$$\cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi.$$

φ étant la mesure arithmétique et θ la mesure algébrique de deux angles aigus ; la solution, presque évidente pourtant, n'a pas été sans donner quelque mal à beaucoup de ceux qui l'ont abordée : la transformation du produit $\sin \varphi \cos \varphi$ au moyen de l'angle double 2φ n'est pas encore très familière, au niveau de la Première, et sa méconnaissance complique sensiblement la question ; certains ont utilisé, avec plus ou moins de bonheur, le résultat relatif au maximum d'un produit de deux facteurs positifs, dont la somme est constante, en faisant intervenir les carrés du sinus et du cosinus ; l'idée était, bien entendu, acceptable, s'agissant d'élèves qui ne sont pas encore parfaitement entraînés au maniement des relations trigonométriques usuelles.

La représentation des projections cotées de l'un des deux tétraèdres, dont le volume est maximum, effectuées successivement sur trois plans simplement placés, et dans l'hypothèse où le triangle OAB est équilatéral, devait obliger les candidats à un effort de mise au point et de coordination des résultats obtenus, tant au point de vue géométrique qu'au point de vue algébrique. Une douzaine de copies seulement montrent sur ce sujet des connaissances suffisantes. Il n'est sans doute pas inutile, à ce propos, d'attirer l'attention sur le rôle que doivent avoir, dans l'enseignement de la géométrie en Première, les éléments de « géométrie cotée » qui figurent au programme : il ne s'agit pas tant d'initier les élèves à une technique nouvelle que de leur offrir un moyen de réalisation correcte et précise des figures à trois dimensions, et de les familiariser avec l'emploi de projections convenablement choisies pour l'étude des problèmes de l'espace ; bien des chapitres du cours donnent l'occasion d'utiliser ces notions de géométrie cotée, sous des formes variées, et de montrer la simplicité et l'efficacité de la méthode des projections.

L'étude des droites OA pour lesquelles les droites AA' et BB' sont orthogonales faisait l'objet de la dernière partie du problème, qui pouvait du reste, comme l'indiquait le texte, être traitée indépendamment de la précédente.

Une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité des droites AA' et

BB' pouvait être obtenue très simplement en faisant intervenir la projection orthogonale A'' du point A' sur le plan du triangle OAB : l'énoncé précisait cette condition et demandait d'établir le résultat, qui devait, tout naturellement, être complété par une remarque évidente déduite de la symétrie des rôles joués ici par les couples A, A' et B, B'. Sur la quarantaine de copies où cette partie a été abordée, une quinzaine seulement donnent des solutions correctes de la question, qui n'exigeait, pour être bien traitée, que la connaissance des théorèmes élémentaires sur l'orthogonalité de droites et de plans, et qu'un peu de soin pour mettre en évidence quelques particularités de la figure.

La recherche des lieux géométriques des points A' et B' et des droites OA, lorsque les droites AA' et BB' sont orthogonales, se déduisait facilement des résultats acquis ; la distinction des régions du plan OAB, contenant les projections orthogonales OD des droites OA ainsi définies, conduisait à l'examen de trois cas de figure, suivant que l'angle AOB est aigu, obtus, ou droit, et préparait les éléments de la réponse à la dernière question, où l'on demandait l'étude des variations du rapport m considéré comme fonction du paramètre $x = \operatorname{tg} \lambda$, dans les intervalles correspondant à l'existence des droites OA pour lesquelles l'orthogonalité de AA' et BB' est acquise ; il s'agissait là de reprendre les résultats de la fin de la première partie, en limitant convenablement l'intervalle de variation de x , et en faisant attention au cas singulier du triangle AOB rectangle en O.

Une vingtaine de compositions contiennent quelques indications correctes, sinon complètes, sur les lieux géométriques des points A' et B' et de la droite OA, mais bien peu ont abordé la fin du problème.

Comme on le voit par cette analyse, le sujet proposé était simple : l'énoncé guidait pas à pas vers une solution raisonnable, et l'on pouvait espérer que l'épreuve donnerait des résultats convenables pour un lot assez important de copies. En fait, et bien qu'il soit très difficile d'établir des comparaisons précises, l'impression d'ensemble est meilleure que celle des années précédentes, et le nombre des candidats ayant donné des solutions partielles acceptables est plus considérable que pour les concours antérieurs.

On peut, à cette occasion, se demander si une épreuve de Concours général doit être d'un niveau assez élevé, susceptible de mettre en évidence une petite élite, au risque de décourager dès les débuts de bons élèves, bien doués, et ayant correctement assimilé l'essentiel des questions du programme, mais n'ayant pas encore acquis la maturité d'esprit, ni une certaine maîtrise permettant de dominer assez rapidement un sujet neuf et complexe. En fait, à la fin de la Première, la formation mathématique est encore rudimentaire, et peu d'élèves, même parmi les meilleurs, sont capables, à ce niveau, d'entreprendre l'étude d'une question sans être sérieusement guidés. D'ailleurs, les indications données dans un énoncé, pour jalonner la route, ne peuvent guère constituer une gêne paralysante pour qui serait vraiment susceptible de prendre des initiatives et de présenter des solutions originales.

D'un autre point de vue, il est légitime de penser qu'un sujet dont l'abord

est relativement facile fournit des éléments assez sûrs pour apprécier le niveau et l'efficacité des études, et le comportement d'une génération d'élèves devant certaines formes de travail.

Ainsi il apparaît assez nettement que l'enseignement de l'algèbre, en y comprenant les éléments de trigonométrie, donne des résultats moins bons que celui de la géométrie. La raison en est-elle que les élèves considèrent trop souvent l'étude de l'algèbre comme se réduisant essentiellement, sinon exclusivement, à l'acquisition d'un certain nombre de mécanismes, dont la connaissance et l'emploi permettront d'obtenir, sans apport excessif d'initiative et de réflexion, la solution des questions posées ? Sans doute, c'est là un point de vue assez explicable pour des débutants qui ont à prendre contact et à se familiariser avec un jeu de symboles apparaissant d'abord sous un aspect assez froid et formel, et dont l'intérêt profond ne se révélera que progressivement par la variété et la richesse de ses applications dans tous les domaines : mais il est souhaitable que, dès les classes d'initiation, l'algèbre acquière normalement une place comparable à celle qu'occupe traditionnellement la géométrie, en vue de la formation du raisonnement, du sens logique et même de l'esprit de finesse.

Comme les années précédentes, il convient encore d'attirer l'attention des candidats, et, en général, de tous les élèves, sur l'importance de la rédaction et de la présentation matérielle ; que certaines compositions, contenant sans doute quelques idées intéressantes et quelques résultats exacts, aient dû être écartées, parce que les moyens d'expression, la phrase, l'orthographe, les figures, étaient insuffisants ou incorrects, — trahissant, parfois grossièrement, la pensée de l'auteur, la déformant au point de la rendre ridicule ou inacceptable —, marque trop les méfaits d'une certaine négligence qui n'affecte point seulement l'apparence extérieure. On aimerait voir plus répandus, surtout chez les meilleurs de nos élèves, un certain sens de la recherche du « fini », un goût marqué pour l'ouvrage bien fait.

Cent quarante-trois candidats ont pris effectivement part à l'épreuve. Un premier classement a permis de dégager un lot de vingt-quatre compositions qui ont été revues en détail par tous les membres du Jury.

Une excellente copie donnant, à quelques détails près, une solution correcte et complète de toutes les questions du problème se détacha immédiatement, avec une très forte avance sur les autres ; le fait est assez rare et le lauréat à qui fut ainsi décerné le premier prix, M. Pierre Cartier, élève au Collège de Sedan, a montré une supériorité incontestable sur l'ensemble de ses camarades.

Le candidat qui mérita le second prix a également retenu l'attention du Jury par la qualité des raisonnements et le soin apporté à la rédaction ; mais sa solution était très incomplète, la troisième partie du problème n'ayant pas été abordée.

Le palmarès de l'épreuve comprend ensuite quatre accessits qui récompensent des compositions honorables, mais nettement inférieures à celles des deux candidats classés en tête.

Si les remarques présentées à l'occasion de ce concours ont signalé surtout des défauts et des insuffisances, il ne faut pas en conclure que le mal l'emporte sur le bien et que la partie positive du bilan est totalement négligeable ; il n'en est rien, et nombre de candidats ont fait preuve, par endroits, de connaissances sérieuses et de qualités d'esprit certaines. Mais beaucoup de bons et même d'excellents élèves, qui ont sans nul doute tiré un réel profit de l'enseignement qu'ils ont reçu, sont surpris, et non sans raison, au moment de l'épreuve du concours, par le contact qu'ils prennent avec une forme de travail assez nouvelle, par la nécessité de fournir, en un temps imposé et limité, un effort intense de réflexion et de compréhension. Et le domaine de la géométrie dans l'espace où on les oblige à se mouvoir est, pour la plupart d'entre eux, une terre bien neuve sur laquelle ils viennent à peine de prendre pied.

L'Inspecteur général, président du Jury,
J. DESFORGE.
