

Sur une somme remarquable de fractions

THÉOREME. — m étant un entier quelconque et p, p' deux entiers premiers entre eux inférieurs ou égaux à m et tels que $p + p' > m$. On a :

$$\sum \frac{1}{p \cdot p'} = \frac{1}{2}$$

la somme étant étendue à tous les couples (p, p') satisfaisant aux conditions précédentes.

Dans tout ce qui suit p, p' désigneront toujours deux nombres premiers entre eux. Posons : $S_m = \sum \frac{1}{p \cdot p'}$, avec : $p \leq m, p' \leq m$ et $p + p' > m$.

On a alors : $S_{m+1} = \sum \frac{1}{p \cdot p'}$, avec : $p \leq m+1, p' \leq m+1$ et $p + p' > m+1$.

Cela étant, je vais démontrer que l'on a : $S_m = S_{m+1}$.

Remarquons que l'on passe de S_m à S_{m+1} de la façon suivante :

1° en retranchant de S_m la somme : $\sigma = \sum \frac{1}{pp'}$, avec $p + p' = m + 1$;

2° en ajoutant à S_m la somme : $\sigma' = \sum \frac{1}{p \cdot p'}$, avec $p' = m + 1, p$ étant alors l'un quelconque des φ_{m+1} nombres premiers à $m + 1$ et inférieurs à $m + 1$.

Je vais montrer que l'on a $\sigma = \sigma'$ et, par suite, que l'on a bien $S_{m+1} = S_m$.

Calcul de σ : La relation $p + p' = m + 1$ entraîne, p et p' étant premiers entre eux, que ces nombres sont tous deux premiers à $m + 1$. Réciproquement, si p est premier à $m + 1$ et inférieur à $m + 1$, son complément à $m + 1$ soit : $p' = m + 1 - p$ est lui-même premier à $m + 1$. Il en résulte que l'ensemble des nombres p, p' premiers entre eux et tels que $p + p' = m + 1$ est identique à l'ensemble des φ_{m+1} nombres premiers à $m + 1$ et inférieurs à $m + 1$, et que ces φ_{m+1} nombres peuvent être répartis en :

$\frac{1}{2} \varphi_{m+1}$ groupes de deux nombres, tels que la somme des nombres de chaque groupe soit égale à $m + 1$; soit $(p_0 p'_0) \dots (p_h p'_h)$ ces différents groupes. On a alors :

$$\sigma = \sum_{i=0}^{i=h} \frac{1}{p_i \cdot p'_i} = \sum_{i=0}^{i=h} \frac{1}{m+1} \cdot \frac{m+1}{p_i p'_i} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{i=h} \frac{p_i + p'_i}{p_i p'_i} = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{i=h} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} \right).$$

Calcul de σ' : D'après la définition même de σ' on a :

$$\sigma' = \frac{1}{m+1} \sum_p \frac{1}{p} \text{ la somme étant étendue à tous les nombres premiers à } m+1 \text{ et inférieurs à } m+1.$$

$$\text{On a donc : } \sigma' = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{i=h} \left(\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p'_i} \right).$$

Et, par suite, $\sigma = \sigma'$, donc : $S_{m+1} = S_m$.

Or, pour $m=3$ on a : $S_3 = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Donc, quel que soit m on a bien :

$$S_m = \sum \frac{1}{p p'} = \frac{1}{2} \quad p, p' \text{ premier entre eux avec : } \begin{cases} p \leq m \\ p' \leq m \end{cases} p + p' > m.$$

Remarque : La plus petite des fractions $\frac{1}{p p'}$ est évidemment $\frac{1}{m(m-1)}$ et la plus grande : $\frac{1}{m}$.

N. B. — Ce théorème, et une démonstration différente de la précédente, ont été donnés par M. Emile BOREL dans un compte rendu de l'Académie des Sciences en 1948.

A. COMBES,

Professeur au Lycée Pasteur.