

DEUXIÈME PARTIE

Autour de l'idée de distance

*Conférence faite par M. G. BOULIGAND, Professeur à la Sorbonne
aux journées de Sèvres, en février 1950*

VUES EXPÉRIMENTALES. — Le corps solide, qui livre l'idée vulgaire de distance, conduit aussi à d'autres notions, dont : le *chemin minimum* joignant deux points A, B de la surface (S) d'un galet convexe ; un tel chemin (L) est donné par un fil inextensible tendu entre A, B sur (S). Si (S) est une sphère où A, B sont diamétralement opposés, on a une même distance minima réalisée par tous les demi-cercles de diamètre AB. Cela permet, en géométrie de la sphère, d'introduire une fonction symétrique $d(A, B)$ assurant l'inégalité triangulaire

$$d(A, B) < d(A, C) + d(C, B),$$

laquelle devient égalité si C est sur (L), qui est ici un arc de grand cercle. Par rapport au couple A, B, on dit, en ce dernier cas, que C est un point intermédiaire ou *interpoint*. Ayant tracé l'arc de grand cercle joignant A, B, pris non-opposés, on peut associer à un interpoint I des points J tels que B soit intermédiaire relativement à I, J : cela donne deux arcs de grand cercle ayant une partie commune et suggère la notion de *prolongement* d'un chemin minimum (L) sur la sphère, notion qui permettrait de parfaire un grand cercle à partir d'un arc arbitrairement petit. Tout cela peut se transposer au cas de (S) convexe quelconque, en s'en tenant à y prendre des points A, B, C assez rapprochés. On constate alors l'unicité du chemin minimum entre deux d'entre eux. Tout arc partiel d'un chemin minimum est encore un chemin minimum et on peut reprendre l'idée de prolongement au sens précédent, ce qui ne donne pas, en général, une ligne fermée. Voilà une occasion d'élargir la *géométrie des distances*.

D'autres extensions sont suggérées par une expérience différente. Etant donné un bloc (B) de caoutchouc, on peut le déformer selon une loi continue et biunivoque, ou, ce qui revient au même : de manière que subsistent les *relations de contiguïté et voisinage* entre ses fragments nés d'une subdivision arbitraire. Entre deux configurations globales de (B), on a une rela-

tion remarquable, l'équivalence élastique (ou isotopie), contenant comme cas particulier l'équivalence rigide (ou égalité) qui s'exerce entre deux positions d'un solide. Chaque configuration fournit, à une équivalence élastique près, un modèle de (B). Pour expliciter à ce point de vue les relations de situation mutuelle des éléments de matière de (B) dans un état (E), on peut recourir à un autre état (E_1), équivalent élastique de (E), à cela près quelconque et noter les distances de ces grains deux à deux dans l'état (E_1). L'état (E) dans lequel s'est produit l'émission peut être reconstitué, parce que les distances prises en note en déterminent l'équivalent (E_1). Pour résumer, on dira : l'état (E) a été *distancié* d'après une convention, attribuant à chaque couple de points de (E) une distance estimée sur (E_1). On est loin du départ où les distances semblaient imposées, après choix d'un étalon. Le verbe actif *distancier* souligne ici l'option laissée à celui qui se préoccupe sans plus de repérer la situation mutuelle des grains, dans les conditions indiquées.

ELABORATION AXIOMATIQUE. — Partant de ces remarques, mais se libérant du concret (parfois gênant, quand on en vient, pour s'expliquer, à parler des grains d'un milieu continu...) on va maintenant prendre à *priori* un ensemble (E) d'éléments de même nature, qui seront appelés des *points* (convention de langage). A chaque couple M, N de ces éléments, on attache une valeur $D(M, N)$ positive pour M, N distincts, nulle pour M, N confondus. On suppose jusqu'à nouvel ordre $D(M, N) = D(N, M)$. Enfin, avec M. Maurice Fréchet, qui, dès 1905, utilisa ces prémisses, on suppose qu'en prenant sur (E) trois points M, N, P, deux à deux distincts, les trois valeurs $D(M, N)$, $D(N, P)$, $D(P, M)$ sont toujours les longueurs des côtés d'un triangle euclidien, parfois aplati.

Ces axiomes dépassent en généralité les cas visés ci-dessus. En effet, l'exemple du bloc de caoutchouc suggérerait de prendre un ensemble ponctuel (E), de le lier biunivoquement à un ensemble (E_1) de l'espace euclidien à trois dimensions, puis sur (E), d'attacher à tout couple M, N, la fonction $D(M, N)$ égalant la distance euclidienne entre les transformés M_1 , N_1 de M, N sur (E_1). Avec une telle $D(M, N)$, pour tout entier p , chaque système de p points de (E) donnant lieu à $0,5 p(p-1)$ valeurs de D se laisse représenter, dans l'espace ordinaire, par un autre système de p points dont les distances usuelles ont les valeurs précédentes. Or, en prenant sur (E) quatre points M, N, P, Q, le fait que les six valeurs de D attachent à chaque triplet un vrai triangle n'assure pas un tétraèdre ayant ces six valeurs pour longueurs de ses arêtes. Cela résulte d'un exemple intéressant à d'autres titres.

Prenons (E) formé de quatre éléments qui sont respectivement les fonctions d'une même variable u

$$M=0, \quad N=\cos u \quad P=\sin u, \quad Q=\frac{1}{2} \cos^2 u + a \cos u \quad (a>0 \text{ très petit}),$$

dont on tracera simultanément les quatre diagrammes. Ce choix révèle tout ce que pouvait couvrir, au début de cette section, la convention de langage relative

au mot *point*. Appelons *distance* de deux tels éléments le maximum de la différence en valeur absolue de deux fonctions correspondantes. On obtient :

$$\begin{aligned} D(M, N) &= 1, & D(M, P) &= 1, & D(N, P) &= \sqrt{2}, \\ D(P, Q) &= 1 + 0,375 (2a)^{\frac{4}{3}} (1 + \eta), & D(N, Q) &= 1,5 - a, & D(M, Q) &= 0,5 + a; \\ & & & (\text{avec } \lim_{a \rightarrow 0} \eta = 0). \end{aligned}$$

Sauf celui concernant $D(P, Q)$, ces résultats s'obtiennent au seul examen des quatre diagrammes. La recherche de $D(P, Q)$ amène à étudier, en passant par l'intermédiaire de leurs inverses (inversion d'une fonction localement monotone), deux fonctions $\delta(a)$, $\varepsilon(a)$, infiniment petites, avec a et telles que $P'_a - Q'_a$ s'annule pour les valeurs

$$x_1 = -\pi/2 + \delta \qquad x_2 = \pi/2 + \varepsilon.$$

Des deux extréma relatifs ainsi obtenus pour la différence $P - Q$, on montre alors que c'est celui fourni par x_1 qui la rend la plus grande en valeur absolue (car celui provenant de x_2 donne à la place du terme en $a^{4/3}$ un terme en a^2). Cela posé, pour $a=0$, on a pour rabattement du triplet MNQ sur le plan MNP autour de MN un alignement $MN'Q'$, le point Q' étant le contact de deux cercles centrés, l'un en M , avec le rayon 0,5, l'autre en N , avec le rayon 1,5 ; pour avoir les deux autres rabattements analogues Q'' autour de MP , Q''' autour de NP , il faut prendre les intersections des deux cercles précédents avec celui de centre P , rayon 1. La projection de Q sur le plan MNP est au centre radical de ces trois cercles, comme il leur est extérieur, aucun point Q réel ne convient. Dès que x cesse d'être nul, les deux premiers cercles cessent d'être tangents, le triplet MNQ cesse d'être aplati, et tant que a n'a pas atteint une valeur suffisante, la projection de Q , centre radical des trois nouveaux cercles, leur reste extérieure. Le résultat annoncé est donc établi. (Les calculs indiqués seront détaillés, avec fig., dans la *Rev. de Math. Spéc.*)

L'exemple ci-dessus fait pressentir des applications de l'idée de distance aux fonctions continues et demeurant bornées, en ne les prenant au besoin que sur un segment donné. On montre que si P, Q sont deux fonctions quelconques continues pour $u_1 \leq u \leq u_2$ (les bornes pouvant chacune être infinie), on peut prendre, pour leur distance, le maximum de la valeur absolue de $P - Q$, ce choix assurant, dans l'ensemble des fonctions prises en compte, l'inégalité du triangle, tout au moins au sens large.

Il peut advenir que, partant d'un ensemble de quatre points soumis à une loi donnée de leurs distances mutuelles, cette loi soit compatible avec l'alignement en chacun des quatre triplets, sans que les quatre points puissent se représenter dans le plan, avec conservation des distances, par quatre points en ligne droite.

Cela se produit, par exemple pour quatre points m, n, p, q , formant le cycle des sommets successifs d'un parallélogramme et dont on convient de mesurer les distances en tendant un fil le long du contour, ce qui donne, pour deux sommets consécutifs du cycle, la longueur du côté correspondant, et, pour deux sommets opposés, celle du demi-périmètre.

Des circonstances de ce genre rendent délicate la recherche de critères permettant d'affirmer qu'un ensemble, donné avec une loi des distances mutuelles de ses éléments, a une représentation euclidienne (1).

(1) Pour un exposé de ces recherches, cf. K. Menger : *La Géométrie des distances*, *Ens. Math.*, t. 35, 1936, p. 348-372 ; L. Blumenthal : *Distance Geometry*, *Publ. Univ., Missouri*, 1938.

Laissant ce point, il convient de souligner par contre la pluralité des manières de distancier un ensemble (E) en assurant pour chaque triplet la condition du triangle. D'un choix de D conforme à cette condition, on en déduit d'autres en remplaçant D par $\varphi(D)$ où φ a un diagramme partant de l'origine et cheminant dans l'angle des coordonnées positives avec sens permanent de concavité vers les ordonnées négatives. Mais cette solution n'est pas la plus générale.

1° Prenons en effet pour (E) la surface d'un cylindre de révolution, de rayon 1 et d'axe Oz. Pour deux points M, N de (E), soit θ la différence des angles polaires (entre O et π) et ζ celle des cotes. La distance de M, N exprimée comme longueur d'un fil tendu sur le cylindre entre ces points est $\sqrt{\theta^2 + \zeta^2}$: c'est une

fonction dont reste indépendante la longueur de la corde MN soit $\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \zeta^2}$, vu que dans le plan auxiliaire θ, ζ les lignes de niveau sont distinctes.

2° Soit la famille des fonctions (contenant les M, N, P, Q de notre premier exemple) :

$$(1) \quad \frac{a_0}{\sqrt{2}} + a_1 \cos u + b_1 \sin u + a_2 \cos 2u + b_2 \sin 2u,$$

où a_0, a_1, b_1, a_2, b_2 sont des coefficients constants, d'ailleurs quelconques. Soient y, z , deux d'entre elles. On peut prendre, comme tout à l'heure

$$D(y, z) = \max |y - z|,$$

et cette manière de définir D assure, comme on l'a signalé, la condition du triangle. Il n'en est plus de même pour ce qui concerne le tétraèdre. Mais on peut distancier aussi comme suit :

$$\Delta^2(y, z) = \int_0^{2\pi} (y - z)^2 du = \pi (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2),$$

ei. appelant $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ les coefficients de l'expression (1) donnant $y - z$. On est ramené de la sorte à la géométrie d'un espace euclidien à cinq dimensions, ce qui permet de réaliser dans cette voie la représentation euclidienne d'une partie quelconque de la famille précédente.

VERS DES PROBLÈMES DE MINIMUM. — On peut distancier sans s'astreindre à poser $D(M, N) = D(N, M)$. Dans le plan euclidien, adoptons une unité de longueur valable pour toutes les parallèles à une même direction T, mais qui soit fonction continue de T. D'où, pour chaque vecteur libre, un mode d'estimation de la longueur, qu'on peut étudier sans supposer que deux vecteurs opposés ont des longueurs égales. Laissant de côté cette hypothèse, on peut établir le théorème suivant (Minkowski) :

Pour que soit vérifiée, dans les conditions qui précèdent, la propriété du triangle, il faut et il suffit que la courbe décrite autour de O, par l'extrémité d'un vecteur unitaire variable issu de ce point, soit convexe.

Cette courbe sera dite l'indicatrice. Si un arc de celle-ci se réduit à un segment, et si les vecteurs AB, BC, sont équipollents à des vecteurs issus de O et rencontrant ce segment, on montre que l'inégalité désirée se change en égalité. Ainsi se dégage la raison profonde du théorème (2).

La condition rappelée est encore celle pour qu'un segment de droite AC,

décrit de A en C, donne le minimum absolu de la longueur, selon la métrique précédente, entre tous les arcs cheminant de A en C. La dite longueur est encore la limite de périmètres polygonaux inscrits dont chaque côté est mesuré comme on l'a dit. Le sens de description ne s'élimine que si l'indicatrice admet O pour centre. Dans le cas général, à un vecteur de composantes ξ, η correspond une mesure $f(\xi, \eta)$ où f est positive et telle que pour tout coefficient positif k , on ait

$$f(k\xi, k\eta) = kf(\xi, \eta),$$

ce qui caractérise une fonction positivement homogène et du premier degré. La longueur d'un arc $\widehat{AB}$ aura pour mesure

$$\int_{\widehat{AB}} f(dx, dy) = \int_{t_A}^{t_B} f\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt \quad (t_B > t_A).$$

C'est ce qu'on nomme, plus spécifiquement, la f -mesure de l'arc. Il s'agit ici d'une f -mesure invariante par translation (3).

Ainsi, pour a , suffisamment petit, en prenant

$$f(\xi, \eta) = -a\xi + \sqrt{(a^2 + 1)\xi^2 + \eta^2},$$

on définit une f -mesure, invariante par translation si a est une constante, et dont l'indicatrice est un cercle, non-centré au point choisi comme origine si l'on suppose a non nulle.

De là, on passe à une f -mesure quelconque, dont l'indicatrice $J(M)$, tout en restant convexe, peut varier d'un point à un autre, selon une loi continue.

Soit, en effet, une trajectoire $\widehat{AB}$ qu'un mobile décrit en prenant, pour chaque position M , une vitesse que figure un vecteur MV bien déterminé. Au moyen de l'indicatrice $J(M)$, on détermine la f -mesure de MV , soit v . La f -mesure de l'arc décrit entre t et $t + dt$ sera $v dt$. Soit $f(x, y; \xi, \eta) = 1$ l'équation de $J(M)$, qui conditionne ξ, η en laissant fixes les coordonnées

x, y de M . La f -longueur totale de $\widehat{AB}$ sera

$$\int_{t_A}^{t_B} v dt = \int_{t_A}^{t_B} f\left(x, y; \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) dt = \int_{\widehat{AB}} f(x, y; dx, dy).$$

On pourra développer une f -géométrie, ayant pour objet les propriétés qui ne sont pas altérées quand on passe des variables x, y à de nouvelles variables x_1, y_1 par des formules

$$x = \varphi(x_1, y_1) \quad y = \psi(x_1, y_1),$$

définissant, au moins localement, une transformation biunivoque et continue. On passe ainsi de l'étalonnage différentiel $ds = f(x, y; dx, dy)$ à un autre analogue.

On peut, en particulier, définir dans cette voie une expression invariante de l'aire, laquelle rejoint l'intégrale double, classique en théorie des surfaces

$$\iint \sqrt{EG - F^2} du dv$$

lorsqu'en chaque point d'un plan, qui sera dit le plan des u, v , on pose
 $f^2(u, v; du, dv) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$.

L'indicatrice $J(M)$ est alors une ellipse de centre M . Dans le cas général, l'expression invariante de l'aire possède la propriété de changer infiniment peu, si autour de chaque point M , on altère infiniment peu le contour $J(M)$. Bornons-nous à l'indiquer (4).

SUR LA MÉTRIQUE ANGULAIRE. — Revenons sur la f -géométrie dans le cas d'invariance par translation de $J(M)$. Prenons une courbe (C) , lieu d'un point M , douée en ce point d'une tangente MT . Appelons m un point de l'indicatrice $J(O)$ où la tangente mt à ce contour est parallèle à MT , et menons par M un vecteur MM_1 , tel que

$$\overrightarrow{MM_1} = \lambda \overrightarrow{Om};$$

puis laissons λ constant. Nous aurons

$$\frac{d\overrightarrow{M_1}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \lambda \frac{d\overrightarrow{m}}{dt}.$$

d'où il résulte que la tangente au lieu de M_1 est parallèle à la tangente au lieu de M . La f -longueur MM_1 est ici constante et égale à λ et ce qu'on obtient est une extension du théorème des courbes parallèles.

On peut donc dire encore que le segment MM_1 est normal en M à (C) . Mais cette extension s'écarte de la normalité au sens usuel, faute de réciprocité entre les deux directions appelées à former, à ce nouveau sens, des angles droits.

Pour récupérer ce caractère, on peut prendre pour indicatrice une conique de centre O . Mais il y a d'autres solutions. Traçons un parallélogramme $Oacb$, puis un arc convexe $\widehat{ab}$ tangent en a à ac , en b à bc . Soit Oa' le prolongement de Oa . Dans l'angle $\widehat{bOa'}$, associons à chaque point p une direction parallèle au rayon vecteur Oq , où q est le point de $\widehat{ab}$, où la tangente est parallèle à Op . On obtient ainsi dans $\widehat{bOa'}$ un champ directionnel conservé par toute homothétie de centre O . A partir de b , on peut alors tracer dans cet angle un arc et un seul tangent partout à la direction du champ. Réserveons maintenant la lettre a' pour désigner l'extrémité de cet arc sur le prolongement de Oa . De l'arc $\widehat{aba'}$, on déduit un contour convexe et un seul ayant aa' pour diamètre conjugué des cordes parallèles à Ob . Ce choix d'indicatrice restaure la notion d'angle droit avec permutabilité des côtés. On ferait d'ailleurs de O un centre en prenant l'arc initial $\widehat{ab}$ tel que les cordes de cet arc parallèles à ab aient leurs milieux sur Oc .

Voilà donc introduite la perpendicularité. Il faut pousser la perpendicularisation plus loin, si l'on veut accéder, en chaque point à une mesure des angles liée à un sous-groupe rotatif continu et à un paramètre du groupe

(4) *Ibidem*, n° 301-302.

linéaire. Cela conditionnera l'indicatrice, sans faire mieux que de la déterminer à une transformation linéaire près.

Soit r le sous-groupe rotatif cherché, astreint à conserver un point O et à laisser l'indicatrice $J(O)$ globalement invariante, groupe dont une opération quelconque ω change un rayon Ou en un rayon Ov , qui en est toujours distinct dans le champ réel. Entre Ou , Ov , on a donc une correspondance homographique avec rayons doubles imaginaires. Le groupe r contient d'abord toutes les puissances entières de ω , dont chacune détermine une homographie h_n ayant les mêmes rayons doubles que l'homographie initiale h_1 . On peut aussi noter dans r la présence d'une opération ρ telle que $\rho^2 = \omega$, et qui, composée avec une symétrie par rapport à O , redonne une seconde opération du même type ; elles sont les seules à remplir la condition $\rho^2 = \omega$. Retenons l'une d'elles. Retenons aussi une opération σ telle que $\sigma^2 = \rho$ et répétons indéfiniment ce processus. Dans la suite des $\rho, \sigma, \dots$ figurent des homographies dont les rayons doubles sont toujours les mêmes. On parvient, grâce à cette suite, à construire sur le groupe cherché, lequel est un ensemble continu à une dimension, un ensemble d'éléments partout dense.

Finalement, il existera une forme quadratique

$$F = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad \text{avec } \alpha\gamma - \beta^2 > 0,$$

dont l'annulation donne les rayons doubles communs à toutes les homographies précédentes. Par une quelconque des transformations linéaires, cette forme va se changer en

$$\lambda(\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2) \quad (\lambda \text{ constant}).$$

Puisque le groupe r conserve globalement l'indicatrice, il en respecte l'aire, donc il est formé, contenant la transformation identique, de transformations linéaires de déterminant égal à l'unité. Choissant un système de vecteurs fondamentaux tel que, dans ce système, l'équation $F = 0$ représente les isotropes, on obtient un modèle du groupe cherché dans lequel toutes les transformations, qui seront alors des similitudes, devront en outre conserver les aires en grandeur et en signe, c'est-à-dire se réduire aux rotations ordinaires. On voit ainsi que λ doit se réduire à l'unité, propriété indépendante du modèle.

D'où la conclusion cherchée : *il n'y a, pour le cas d'invariance par translation de $J(M)$, une métrique angulaire liée à un sous-groupe r , que si l'indicatrice en chaque point est une ellipse, centrée en ce point, et translatée d'une ellipse fixe.*

Ainsi se précise la notion d'angle. On voit que cette notion continue à s'étendre si, choissant pour $J(M)$ une ellipse de centre M , on renonce à l'invariance par translation : ce qui ramène à des considérations bien classiques en théorie des surfaces, lorsqu'on calcule par la formule

$$ds \delta s \cos \theta = E du \delta u + F du \delta v + G dv \delta v$$

l'angle sous lequel se coupent deux courbes issues d'un point M de la surface, et dont deux éléments d'arc dM , δM , de longueurs respectives ds , δs , proviennent des vecteurs élémentaires (du, dv) et $(\delta u, \delta v)$ du plan antécédent (u, v) .

Notons enfin qu'on peut songer à étendre la notion d'angle par voie d'étalement différentiel quand $J(M)$ ne se réduit pas à une ellipse de centre M . Il faudrait alors définir l'angle infiniment petit $d\alpha$ formé par deux rayons vecteurs MU , MU' infiniment voisins de $J(M)$ (MU étant supposé fixe). A cette fin, on pourrait remplacer $J(M)$ par l'ellipse de centre M osculatrice en U à cette courbe convexe. Mais l'introduction des dérivées secondes fait que la valeur ainsi conférée à $d\alpha$ sera susceptible de varier *ad libitum* pour une altération infiniment petite du champ des $J(M)$. Une telle extension heurte donc les principes métrologiques habituels (contrairement à ce qui s'est produit pour l'extension de la notion d'aire).

REMARQUES SUR LES COURBES PARALLÈLES. — Au début de la section précédente, s'est offerte une extension du *parallélisme des courbes*. Ce thème pourrait servir de transition et soulever, en géométrie plane, cette question importante :

plus courte distance (p.c.d.) d'un point à un ensemble ponctuel E.

On peut y rattacher un vaste champ d'expérimentation, accessible à de jeunes élèves, dans le cas où il s'agit d'une distance euclidienne et d'ensembles E choisis très simplement (5).

Parallélisme des courbes et p.c.d. d'un point de l'une à la seconde sont deux motifs à réflexion, venant illustrer la remarque suivante, d'application assez fréquente :

Deux notions mathématiques peuvent coïncider pour un large matériel de figures et se dissocier complètement lorsqu'on transgresse les hypothèses assurant la délimitation de ce matériel.

Vérité, certes, naturelle ! Toute infraction à des hypothèses risque de compromettre des conclusions qui en découlaient. Et, cependant, il y a des cas d'espèce où l'on éprouve le besoin de rappeler cette vérité. Tel le cas où une courbe C admet, en chaque point M , une droite privilégiée MT s'offrant comme limite, soit de MM' quand M' tend vers M sur C , soit de $M'M''$ quand, indépendamment l'une de l'autre, M' , M'' tendent vers M sur C . On sait que ces définitions de la tangente ne coïncident, pour une courbe C donnée par $y=f(x)$, que si f a une dérivée première continue. Commentaires analogues, quand, voulant définir l'aire d'un morceau de surface S , même représentable sous la forme $z=f(x,y)$, on compare, par exemple, les résultats provenant de l'approximation de S par des surfaces polyédrales $z=f_n(x,y)$ et ceux qu'on tire du volume de la région formée par les points dont la p.c.d. à l'ensemble S est $\leq \epsilon$ (ce ne sont là que choix timides entre possibilités fort larges).

Revenons à la question annoncée. C'est souvent un *nid d'idées préconçues*, consistant à croire, par exemple, qu'en portant sur la normale à un arc (A) , d'équation $y=f(x)$ où $f(x)$ possède une dérivée première continue, une longueur constante MM_1 à partir du pied M situé sur (A) , le lieu de M_1

(5) Etudier, par exemple, le cas d'un ensemble E formé par deux côtés opposés d'un carré de a ; le lieu des points à distance ρ de E se compose de deux contours pour $\rho < \frac{a}{2}$ et d'un seul pour $\rho > \frac{a}{2}$. Montrer que pour $\rho = \frac{a}{2}$, la longueur totale de ce lieu subit une discontinuité. Etudier le lieu des points équidistants de deux demi-droites Ox , Oy et montrer qu'il comprend, outre la bissectrice, les points compris dans un certain angle ou sur ses côtés.

est un arc (A_1) se prêtant à la propriété de parallélisme des tangentes en M et M_1 . Cela est faux au degré actuel de généralité ; et il en est de même pour l'énoncé prétendant que la p.c.d. d'un point de (A_1) à l'ensemble (A) demeure constante.

Autrement dit, relativement à l'arc (A), les deux notions (n_1) *lignes de niveau de la p.c.d. d'un point à (A)* d'une part, et (n_2) *lignes définies en portant sur la normale en (A) une longueur constante MM_1* d'autre part, sont des notions distinctes, cela dès qu'on choisit (A) en transgressant le champ des arcs à courbure bornée.

Dans le plan euclidien, la notion (n_2) conduit, en posant $\widehat{Ox, MT} = \varphi$, à représenter paramétriquement une courbe décrite par M_1 comme suit :

$$(1) \quad x_1 = x - l \sin \varphi \quad y_1 = y + l \cos \varphi.$$

Si le rapport incrémental $\Delta\varphi : \Delta s$ (où s est l'abscisse curviligne de M sur sa trajectoire) reste borné, on démontre aisément ce résultat : soit Σ une suite de valeurs de Δs tendant vers zéro en conférant une limite déterminée au rapport ci-dessus. En empruntant les valeurs de Δs à Σ , on aura aussi pour $\Delta x_1 : \Delta s$ et $\Delta y_1 : \Delta s$ des valeurs limites, à savoir respectivement

$$\cos \varphi \left(1 - l \lim. \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right), \quad \sin \varphi \left(1 - l \lim. \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right)$$

d'où, pour l moindre, en valeur absolue, que la plus petite des limites de $|\Delta \varphi : \Delta s|$, une propriété de tangentes parallèles indépendantes du choix de la suite univocisante Σ .

En s'écartant de ces conditions, et passant au cas où φ est, sans plus, fonction continue de s , les seconds membres des relations (1) sont aussi continues en s , mais non en général, à *variation bornée*. Le continu décrit par M_1 en vertu des équations (1) n'est donc pas rectifiable. En prenant des arcs $y = P_n(x)$ pour lesquels les P_n sont des polynômes tels que les dérivées P_n' tendent uniformément vers $f'(x)$ en même temps que les P_n le font vers $f(x)$, on pourrait montrer que la courbe (1), associée à un de ces arcs $y = P_n$, offre des rebroussements de plus en plus rapprochés les uns des autres.

Tout point M_1 de la courbe (1) est à une p.c.d. de l'arc (A) qui, d'après la génération de cette courbe, ne peut dépasser l . Mais elle peut être inférieure à l . Ainsi, traçons un arc de cercle A_1B_1 de rayon R , puis, un second A_2B_2 concentrique de rayon $R/2$, ces arcs se terminant en des points B_1, B_2 tels que le segment B_1B_2 de longueur $R/2$ leur soit une normale commune. Prolongeons l'arc $\widehat{A_1B_1}$ au delà de B_1 par un petit arc $\widehat{B_1C_1}$ d'une autre circonférence Γ centrée au milieu I du segment B_1B_2 . Le lieu des points déduits de l'arc à tangente continue $\widehat{A_1B_1C_1}$ d'après la notion (n_2) va se composer de l'arc $\widehat{A_2B_2}$ et d'un second arc $\widehat{B_2C_2}$ diamétralement opposé sur Γ à $\widehat{B_1C_1}$ (faire la figure). Or, les points de ce second arc sont à une distance de l'arc $\widehat{A_1B_1C_1}$ moindre que $R/2$. Cela peut s'étendre en considérant un arc convexe K , une de ses développantes D , et prenant, au sens

(n_2), la courbe Π parallèle à D , la longueur l de MM_1 étant telle que cette courbe ait un rebroussement sur K . Il se présente encore pour une des branches de Π , la propriété de se trouver à une distance de D moindre que l .

D'ailleurs, si la courbe (1), livrée par la notion (n_2) peut être de longueur infinie, il n'en sera jamais ainsi pour une ligne de niveau de la p.c.d. d'un point à un ensemble borné, tel l'arc (A) [ici, on applique la notion (n_1)]. Car pour approcher cette ligne de niveau, on peut remplacer (A) par les sommets d'une ligne polygonale inscrite : cette ligne apparaît ainsi comme limite d'un polygone bordé par des arcs de cercles, donnant lieu à un périmètre qu'on peut majorer facilement : ce qu'il suffit ici d'indiquer.

Je n'insiste pas sur ces détails, pas plus que sur la possibilité immédiate d'étendre ces remarques en remplaçant le parallélisme usuel par celui qu'introduirait une indicatrice supplantant le cercle. Par ces réflexions concernant les distances, les aires, les angles, c'est-à-dire les notions les plus fondamentales de la géométrie, j'espère avoir facilité la tâche à ceux qui s'efforcent d'orienter leurs jeunes élèves vers l'axiomatique.

G. BOULIGAND.