

Sur le Volume de la Pyramide

L'utilisation de la notion d'homothétie permet d'abrégier l'établissement de la formule $V = \frac{1}{3} BH$.

Faisons subir à une pyramide de volume V de base B et de hauteur H une homothétie de rapport $k < 1$. Nous détachons ainsi un tronc de pyramide de volume $V(1 - k^3)$, d'épaisseur $H(1 - k)$ et dont les bases mesurent B et Bk^2 .

L'inégalité

$$(1) \quad Bk^2 \times H(1 - k) < V(1 - k^3) < B \times H(1 - k)$$

résulte alors du fait que le tronc de pyramide est contenu dans un prisme oblique $[B, H(1 - k)]$ et contient le prisme $[Bk^2, H(1 - k)]$, les arêtes étant parallèles à une arête latérale quelconque de la pyramide donnée. (Certes, ce résultat de *géométrie de situation* n'est assuré que si la base de la pyramide est convexe, mais l'inégalité (1) est vraie dans tous les cas, comme le montre une décomposition de la base en parties convexes).

En supposant $k \neq 1$, on déduit de (1) :

$$\frac{Bk^2 \times H}{1 + k + k^2} < V < \frac{B \times H}{1 + k + k^2}$$

puis l'on passe à la limite, $V = \frac{1}{3} BH$.

Remarque : La courte démonstration précédente suppose connues les propriétés des volumes de solides homothétiques. Celles-ci s'établissent par approximation successives en « empilant » des cubes homothétiques, en nombre croissant, dans les deux figures.

G. GLAESER, *Lycée Michelet*.
