

Comparaison de a^b et de b^a

(a et b entiers)

On constate, sur des exemples numériques que l'ordre des puissances est celui des exposants et non celui des bases. Si $a < b$, $a^b > b^a$.

Exemples :

$$\begin{aligned} 2^5 &> 5^2, \\ 3^4 &> 4^3, \text{ etc...} \end{aligned}$$

Exceptions :

$$\begin{aligned} 2^3 &< 3^2, \\ 2^4 &= 4^2 \text{ (voir plus loin).} \end{aligned}$$

La démonstration de cette propriété se fera en deux temps :

1° a et b sont deux nombres consécutifs, $b = a + 1$,
comparaison de $a^{(a+1)}$ et de $(a + 1)^a$.

2° a et b sont deux nombres quelconques, $a < b$,
raisonnement par récurrence de b à $(b + 1)$.

I. *Comparaison de $a^{(a+1)}$ et de $(a + 1)^a$.* — Développons $(a + 1)^a$ suivant la formule du binôme :

$$(a+1)^a = a^a + C_a^1 \cdot a^{(a-1)} + C_a^2 \cdot a^{(a-2)} \dots + C_a^p \cdot a^{(a-p)} + \dots + C_a^{(a-1)} \cdot a + 1.$$

$$= a^a + a \cdot a^{(a-1)} + a \cdot \frac{a-1}{2} \cdot a^{(a-2)} \dots + a \cdot a + 1$$

(en remplaçant les nombres de combinaisons par leurs valeurs).

Les deux premiers termes de ce développement sont égaux, mais à partir du troisième les termes sont de plus en plus petits : en effet, on passe du deuxième au troisième terme en divisant par a ($a^{(a-2)}$ au lieu de $a^{(a-1)}$) et en multipliant par $\frac{a-1}{2}$ manifestement inférieur à a . Donc le troisième terme est inférieur au deuxième. De même, on passe du troisième terme au quatrième en divisant par a et en multipliant par $\frac{a-2}{3} < a$.

Plus généralement on passe du p^{me} terme au $(p + 1)^{\text{me}}$, terme en divisant par a et en multipliant par : $\frac{a-p+1}{p} < a$. Donc, à partir du deuxième terme, les termes sont de plus en plus petits et, par suite, chacun d'eux est inférieur à l'un des deux premiers (a^a).

Il y a $(a + 1)$ termes dont le dernier est 1.

Si on associe ce 1 à l'un des termes de la somme autre que les deux premiers, ce terme augmente de 1 en demeurant inférieur ou égal à a^a . La somme n'a pas changé, mais elle ne contient plus que « a » termes. Cette transformation exige qu'il ait au moins un troisième terme inférieur aux deux premiers et différent de 1. Donc $a \geq 3$ (on retrouve ainsi le cas d'exception $a = 2$ signalé au début).

En définitive le développement de $(a + 1)^a$ est une somme de « a » termes, dont deux sont égaux à a^a , et tous les autres inférieurs à a^a . Cette somme est inférieure à celle de « a » termes, égaux à a^a , c'est-à-dire à :
 $a^a \cdot a = a^{a+1}$ et : $(a + 1)^a < a^{a+1}$.

II. *Démonstration par récurrence du cas général.* — Supposons que $a < b$ entraîne $a^b > b^a$, et montrons que à fortiori $a^{(b+1)} > (b + 1)^a$.

Développons $(b + 1)^a$ suivant la formule du binôme :

$$(b+1)^a = b^a + a \cdot b^{(a-1)} + a \cdot \frac{a-1}{2} \cdot b^{(a-2)} \dots + C_a^p \cdot b^{(a-p)} \dots + a \cdot b + 1.$$

On passe du premier au deuxième terme en divisant par b et en multipliant par $a < b$. Donc le deuxième terme est inférieur au premier.

On passe du deuxième au troisième terme en divisant par b et en multipliant par $\frac{a-1}{2} < b$, donc le troisième terme est inférieur au deuxième.

En général on passe du p^{m^e} terme au $(p+1)^{m^e}$ terme en divisant par b et en multipliant par $\frac{a-p+1}{p} < b$.

Donc les termes vont tous en décroissant. Il y en a $(a+1)$ dont le dernier est 1. On peut associer ce 1 à l'un des termes de la somme autre que le premier. Ce terme, augmenté de 1, sera encore inférieur ou égal à b^a .

Remarque (cette transformation est possible pourvu que $a \geq 2$) : Le développement de $(b+1)^a$ est ainsi inférieur ou égal à la somme de a termes égaux à b^a .

$$(b+1)^a \leq a \cdot b^a.$$

Or, on a supposé $b^a < a^b$.

Donc

$$(b+1)^a < a \cdot b^a \\ a^{(b+1)} > (b+1)^a.$$

On a ainsi établi par récurrence, que si $a < b$, $a^b > b^a$.

Cette propriété des nombres entiers, généralisée aux nombres positifs quelconques, conduit à démontrer que $\frac{a^x}{x^n} \rightarrow \infty$ quand $x \rightarrow \infty$ (quels que soient $a > 1$ et $n > 0$).

P. JEANGIRARD,

*Professeur agrégé de Mathématiques
à l'E.N. d'Orléans.*