

Théorie du système décimal

Il est nécessaire d'avoir étudié précédemment les opérations sur les nombres entiers, y compris la division avec reste.

I. *Position du problème.* — Devant l'impossibilité d'attribuer à tous les nombres un nom et un signe distinctif, comment, avec quelques mots et quelques signes « désignant » certains nombres, pourra-t-on les représenter tous ?

Il semble logique de chercher à les obtenir comme résultats de plusieurs opérations portant sur les nombres primitivement « désignés ». Pour éviter toute ambiguïté ces opérations seront directes (addition, multiplication, puissance). On sait que, dans ces conditions, leur résultat est toujours supérieur aux données. Ainsi les nombres « désignés » permettront d'en fabriquer de plus grands. La « désignation » portera donc sur tous les nombres depuis 1 jusqu'à un nombre appelé base. Dans le système décimal cette base est le nombre dix que, momentanément, nous écrirons « dix ».

II. *Recherche systématique.* — Il est impossible de choisir *à priori* les combinaisons d'opérations directes à effectuer pour obtenir tous les entiers supérieurs à dix et chacun d'eux d'une façon unique.

On procédera en sens inverse : à partir d'un nombre N , quelles opérations effectuer pour arriver à des nombres « désignés » ?

1° La soustraction

$$N - \text{dix} = N_1,$$

si $N_1 < \text{dix}$, N_1 est un nombre « désigné » (à garder),

si $N_1 > \text{dix}$:

$$N_1 - \text{dix} = N_2,$$

si $N_2 < \text{dix}$, N_2 est un nombre « désigné » (à garder),

si $N_2 > \text{dix}$:

$$N_2 - \text{dix} = N_3, \text{ etc...}$$

Remarquer que ces soustractions successives équivalent à la division par dix avec reste, seule opération à retenir.

2° La division par dix

$$N = \text{dix} \times q_1 + r_1 \quad \text{avec } r_1 < \text{dix},$$

si $q_1 < \text{dix}$, q_1 et r_1 sont « désignés » (à garder),

si $q_1 > \text{dix}$: recommencer :

$$q_1 = \text{dix} \times q_2 + r_2 \quad r_2 < \text{dix},$$

si $q_2 < \text{dix}$, q_2 et r_2 sont « désignés » (à garder),

si $q_2 > \text{dix}$: recommencer, etc... jusqu'à la dernière division :

$$q_{n-1} = \text{dix} \times q_n + r_n \quad r_n < \text{dix},$$

avec $q_n < \text{dix}$, q_n et r_n sont « désignés » (à garder).

Les nombres ainsi obtenus : $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, q_n$ sont tous « désignés ».

La suite : $N, q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ est décroissante. Il y aura donc toujours un nombre fini d'opérations.

Parmi les nombres « désignés » obtenus, figure q_n . Pour la régularité de l'ensemble, posons :

$$q_n = \text{dix} \times 0 + r_{n+1},$$

alors $q_n = r_{n+1}$.

3° Réciproque

Valeur de N en fonction des nombres « désignés » obtenus ci-dessus. Reprenons les égalités de division dans l'ordre inverse :

$$q_{n-1} = \text{dix} \times r_{n+1} + r_n,$$

$$q_{n-2} = (\text{dix})^2 \times r_{n+1} + \text{dix} \times r_n + r_{n-1},$$

etc...

jusqu'à :

$$N = (\text{dix})^n \cdot r_{n+1} + (\text{dix})^{n-1} \cdot r_n + \dots + (\text{dix})^2 \cdot r_3 + \text{dix} \cdot r_2 + r_1.$$

En définitive les opérations directes obtenues sont :

- puissances de dix ;
- multiplications d'une puissance de dix par un nombre $< \text{dix}$;
- somme des termes.

III. *Conclusion* : Reste à préciser une convention d'écriture permettant de représenter N : juxtaposer les restes (nombres « désignés ») dans l'ordre :

$$r_{n+1} \ r_n \ \dots \ r_3 \ r_2 \ r_1,$$

et écrire

$$N = \overline{r_{n+1} \ r_n \ \dots \ r_3 \ r_2 \ r_1}.$$

Remarquer que, puisque : $\begin{cases} \text{dix} = \text{dix} \times 1 + 0, \\ 1 = \text{dix} \times 0 + 1, \end{cases}$
dix s'écrira : 10.

Préciser aussi les conventions de langage et leurs irrégularités.

(L'exposé précédent est applicable à un système de numération de base quelconque).

P. JEANGIRARD,

Professeur agrégé à l'E.N. d'Orléans.