

Note sur deux questions de géométrie analytique plane

I. DISTANCE DU POINT $M_0(x_0, y_0)$ A LA DROITE (D) : $ax + by + c = 0$.

Le vecteur unitaire $\vec{u}$ d'une perpendiculaire à (D) a pour composantes $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, il définit un axe. Soit H la projection orthogonale de M_0 sur D et $\rho = \overline{M_0H}$ la mesure algébrique de $\overline{M_0H}$ par rapport à l'axe $\vec{u}$: $\overline{M_0H} = \rho \vec{u}$.

Les coordonnées de H sont :

$$x = x_0 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rho, \quad y = y_0 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rho.$$

On détermine ρ en exprimant que H est sur (D) :

$$ax_0 + by_0 + c + \rho \sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

$$\rho = - \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{ou ;} \quad HM_0 = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Distance d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à un plan $ax + by + cz + d = 0$.
Même théorie.

II. BISSECTRICES DES ANGLES DES DROITES : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 0$
(axes rectangulaires).

Pour que $M(x, y)$ appartienne à une des bissectrices, il faut et il suffit que la perpendiculaire à OM coupe les deux droites en deux points symétriques par rapport à M.

Les paramètres directeurs de la direction perpendiculaire à OM sont y et $-x$. Une représentation paramétrique de la perpendiculaire en M à OM est :

$$X = x + y\rho, \quad Y = y - x\rho.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que deux points de cette droite soient symétriques par rapport à M est qu'ils soient associés à des ρ opposés. Les ρ des points de rencontre avec les droites du faisceau sont les racines de :

$$A(x + y\rho)^2 + 2B(x + y\rho)(y - x\rho) + C(y - x\rho)^2 = 0.$$

Le développement complet de cette équation est inutile ; il suffit d'égaliser à 0 le coefficient de ρ :

$$A \cdot xy + B(y^2 - x^2) - Cxy = 0,$$

$$\text{ou :} \quad By^2 + (A - C)xy - Bx^2 = 0.$$

R. GERBAUD,
professeur de Mathématiques supérieures
au Lycée Montaigne (Bordeaux).