

DEUXIÈME PARTIE ⁽¹⁾

Les coniques

Huit de nos collègues nous ont envoyé des notes sur les coniques ; nous les publions ci-dessous, en nous excusant d'avoir dû les résumer un peu : la place nous manque, les ressources de l'A.P.M. sont limitées.

Nous prions nos lecteurs de bien vouloir faire les figures:

I. Note de R. Bléas (Nantes). — Soit un faisceau de cercles à points limites F et G ; tout cercle du faisceau est bien déterminé par le rapport e des distances d'un quelconque de ses points à F et G. A tout point M du plan, dont H est la projection sur l'axe radical (D) du faisceau, associons le cercle (M) de centre M passant par F. Il existe dans le faisceau un cercle (Ce), autre que le cercle-point F, qui soit tangent au cercle (M). Ce cercle (Ce) n'est pas dégénéré si l'on suppose :

$$MF \neq 0, \quad MH \neq 0, \quad MF \neq MH.$$

Pour construire son point de contact T avec le cercle (M), il suffit de prendre l'intersection I de la tangente en F à (M) avec (D) et de tracer le cercle de diamètre MI, c'est-à-dire le cercle MFH. On voit que HM est une bissectrice de l'angle FHT, l'autre bissectrice étant (D). Par suite, TH passe par G, les triangles MFH et TFG sont semblables, d'où :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{TF}{TG} = e.$$

La démonstration n'est pas valable si M est pris sur la ligne des centres FG, mais dans ce cas particulier, la formule établie est évidente. D'après cette formule, pour que le rapport MF/MH reste constant quand M varie dans le plan, il faut et il suffit que le cercle (Ce) reste fixe, ce qui établit complètement l'équivalence des deux définitions d'une conique à centre.

II. Note de G. Chatelle (Aurillac). — Soit : un triangle FMF', la bissectrice intérieure MD ; les cercles tangents en M à MD, passant l'un par F, l'autre par F' ; H et H' les points autres que M où ces cercles coupent respectivement la parallèle à FF' passant par M ; Δ la perpendiculaire à FF' menée par H ; K le point où Δ coupe la droite FF' ; O le milieu de FF'.

On a : $\widehat{FHH'} = \frac{1}{2} \widehat{FMF'} = \widehat{F'H'H}$, d'où FF'H'H trapèze isocèle et $HH' = 2OK$. Les triangles MFD et HMF sont semblables, de même que MF'D et H'MF', et :

$$(1) \quad \frac{MH}{MF} = \frac{OF}{MF} = \frac{OF'}{MF'} = \frac{MF'}{MH'} = \frac{2 OF}{MF + MF'} = \frac{MF + MF'}{2 OK} = \sqrt{\frac{OF}{OK}} < 1.$$

(1) Adresser soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4^e), toute communication destinée à la Deuxième Partie du Bulletin.

Autre construction : soit une droite Δ , un point F hors de Δ ; un point M tel que $MF/MH < 1$, H étant la projection de M sur Δ ; MD tangente au cercle MFH , MF' symétrique de la demi-droite MF par rapport à MD . $MF < MH$ entraîne $\widehat{HMF} + 2\widehat{MHF} < 2d$, d'où il résulte que MD est bissectrice intérieure du triangle FMF' , D et F' étant sur la perpendiculaire FK à Δ .

1) Si F et F' sont fixes ($FF' = 2c$) et si $MF + MF' = 2a = Cte$, on a, d'après (1°) :

$$\frac{OF}{OK} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = C^2, \text{ K et } \Delta \text{ sont fixes, et : } \frac{MF}{MH} = \frac{c}{a} = C < 1.$$

2) Si F et Δ sont fixes et si $MF/MH = e = Cte$ (valeur de c/a de 1°), $OF/OK = (MF/MH)^2 = e^2$, donc O est fixe et coïncide avec le O de 1° ; il en est de même de F' , et $MF + MF' = 2c/e = 2a = Cte$.

En considérant MD comme bissectrice extérieure, on a un développement et des conclusions analogues, avec $|MF - MF'|$ et $MF'/MH > 1$.

III. Note de G. Delpla (Foix). — Soit une conique (C) définie par son foyer F , sa directrice (D), son excentricité e . M étant un point de cette conique, H sa projection sur (D), (I) un cercle de centre F et de rayon quelconque r , (m) la polaire de M par rapport à (I), d le pôle de (D).

Appliquons le théorème de Salmon : $MF/dF = MH/dK$, dK étant la distance de d à (m) ; ou encore $dK = dF/e = Cte$. La droite (m) reste donc tangente à un cercle fixe (Γ) de centre d et de rayon dF/e ; inversement, une tangente quelconque à ce cercle a pour pôle un point de (C).

Transformons la figure par l'inversion (I) de pôle F et de puissance r^2 . L'inverse de (m) est le cercle de diamètre FM , l'inverse de (Γ) est un cercle (Γ'). Le cercle de diamètre FM est donc tangent au cercle fixe (Γ') et inversement tout cercle passant par F et tangent à (Γ') a pour inverse une tangente au cercle (Γ).

L'inverse du centre d de (Γ) est le pied K de (D) sur Fd ; d'autre part, on sait que c'est le pied de la polaire du pôle d'inversion par rapport à (Γ') inverse de (Γ). (D) est donc la polaire de F par rapport à (Γ').

La démonstration est valable pourvu que le point F ne soit pas sur (D), et, dans l'autre sens, pourvu que (Γ') ne passe pas par F .

Notre collègue fait ensuite une étude (que nous ne pouvons malheureusement reproduire) des coniques à partir de la définition (foyer, directrice), dans le genre de celle exposée par MM. LEBESGUE et LECOMTE dans « L'Enseignement Scientifique », et montre comment elle peut se transformer en la définition (foyer, cercle directeur). Il expose le passage inverse de la manière suivante :

Soit un cercle variable (M) de centre M passant par un point fixe F et tangent en P à un cercle fixe (Γ') de centre F' . Les tangentes en P et F' à (M) se coupent en T , le lieu géométrique de T est l'axe radical (D) de (Γ') et du cercle-point F .

La projection I de F sur MT est homothétique de P (centre F , rapport

1/2). Le lieu de I est donc le cercle homothétique (O), de centre O, milieu de FF'. La droite (D) est la polaire de F par rapport à (O). (O) divise donc harmoniquement FK, si K est le pied de (D) sur FF'. IF/IK est une constante e , et l'on montre que $e = OF/a$, $2a$ étant le rayon de (F').

Le point M est donc un point de la conique de foyer F, de directrice (D) et d'excentricité e ; la tangente en M est la médiatrice MT de FP.

IV. Note de J. Fribourg (Saint-Cloud). — A) Soit une conique de foyers F, F', le cercle directeur de centre F', A un sommet, (A) le cercle de centre A et tangent à (F'), α son point de contact avec (F'). Appelons directrice associée à F l'axe radical (D) de (F') et du cercle point F. Soit H la projection de F sur (D). Nous avons : $2\overline{F'F} \cdot \overline{OH} = 4a^2$, $\overline{OF} \cdot \overline{OH} = \overline{OA}^2$ (O centre de la conique). Puis :

$$\frac{AF}{AH} = \frac{|c-a|}{\left| \frac{a^2}{c} - a \right|} = \frac{c}{a}.$$

B) Soit M un point quelconque de la conique, φ le point de contact avec (F') du cercle (M) de centre M et passant par F, K la projection de M sur (D). φd n'est pas parallèle à (D) et coupe cette droite en P tel que : $\overline{PF}^2 = \overline{P\varphi} \cdot \overline{P\alpha}$. L'inversion de pôle P, de puissance $\overline{PF}^2$, appliquée au cercle (A), donne un cercle passant par F et tangent en φ à (F'), donc le cercle (M). P est un centre d'homothétie pour (A) et (M); il se trouve sur AM et :

$$\begin{aligned} PM/PA &= MF/AF; PM/PA = MK/AH, \\ \text{d'où : } MF/AF &= MK/AH, MF/MK = AF/AH = c/a. \end{aligned}$$

Cette propriété est commune à tous les points de la conique.

C) Les données étant celles du paragraphe A), soit M un point tel que : $MF/MK = c/a$ (K projection de M sur (D)). Par suite :

$$MF/MK = AF/AH, MF/AF = MK/AH.$$

Dans ces conditions, AM n'est pas parallèle à (D). Sinon $MK = AH$ et $MF = AF$, ce qui donne une contradiction. AM coupe donc (D) en P et :

$$PM/PA = MK/AH = MF/AF,$$

P est donc un centre d'homothétie pour le cercle (A) et le cercle de centre M passant par F. L'inversion de pôle P et de puissance $\overline{PF}^2$ échange ces deux cercles. Or, elle conserve le cercle (F'). Le cercle de centre M passant par F est donc, comme (A), tangent à (F') : M est un point de la conique.

D) Donnons-nous maintenant un point F, une droite (D), un nombre $e \neq 1$. Cherchons le lieu géométrique des points M tels que $MF/MK = e$. Sur la perpendiculaire FH à (D) se trouvent deux points du lieu A et A' :

$$\frac{AF}{AH} = \frac{A'F}{A'H} = e.$$

La division AA'FH est harmonique; si O est le milieu de AA' : $\overline{OF} \cdot \overline{OH} = \overline{OA}^2$. La conique de sommets A et A', de foyer F, admet donc (D) comme directrice associée au foyer F; elle est, d'après l'étude précédente, le lieu cherché.

V. Note de A. Monjallon. — Soient F le foyer, D la directrice associée, e l'excentricité ($\neq 1$) de la courbe considérée. Sur la perpendiculaire FIx menée à (D), axe de symétrie de la courbe, il existe deux points A et A' tels que $AF/AI = A'F/A'I = e$. Traçons les cercles (A) et (A') de centres A et A' et passant par F. Soient α et α' les points diamétralement opposés à F sur (A) et (A'), (Γ) le cercle de diamètre $\alpha\alpha'$. Les cercles (A) et (A') sont homothétiques par rapport à F. Nous avons: $IA/IA' = AF/A'F$ (I pied de la perpendiculaire menée de F à D). I est le deuxième centre d'homothétie de (A) et (A'). Par suite (A') est l'inverse de (A) dans l'inversion de centre I et dont la puissance est $\overline{IF}^2 = \overline{I\alpha} \cdot \overline{I\alpha'}$.

Remarquons que $\overline{I\alpha} \cdot \overline{I\alpha'}$ est la puissance de I par rapport à (Γ) et $\overline{IF}^2$ celle de I par rapport au cercle-point F. La droite D est donc l'axe radical du cercle (Γ) et du cercle-point F.

Soit M un point tel que le rapport de ses distances MF et MH à F et D soit égal à e ; considérons le cercle (γ) de centre M et de rayon MF. Joignons MA, soit S l'intersection de MA avec D. Nous avons :

$$SM/SA = MH/AI = e. \quad MH/e \cdot AI = MF/AF.$$

S est un centre d'homothétie des cercles (A) et (γ). Le cercle (γ) est donc l'inverse de (A) dans l'inversion de centre S et de puissance $\overline{SF}^2$. D étant l'axe radical de (Γ) et du cercle-point F, cette puissance est aussi celle de S par rapport à (Γ); donc (Γ) est invariant dans l'inversion (S, $\overline{SF}^2$). Le cercle (A) étant tangent à (Γ), il en résulte que (γ) est tangent à (Γ) au point ϕ inverse de α .

Tout point M, tel que $MF/MH = e$, est donc centre d'un cercle passant par F et tangent à (Γ). Le lieu d'un tel point est donc identique au lieu des centres des cercles passant par F et tangents à (Γ).

L'étude montre que la conique peut être ainsi construite par points : A étant le sommet voisin de F et α le point du cercle directeur (Γ) situé sur l'axe focal entre A et (D), joignons un point quelconque S de (D) à A et α , puis O au second point de rencontre ϕ de S avec (Γ); M est l'intersection de SA avec $O\phi$.

VI. Note de M. Sagot (Saint-Etienne). — La méthode a été utilisée avec les ouvriers de la Manufacture de Saint-Etienne, élèves de l'Ecole technique d'armement; le niveau de leurs connaissances est celui de la classe de Seconde.

La condition, pour que deux cercles de centres O et O', de rayons R et R' soient tangents, est :

$$d = |R \pm eR'|$$

en posant $d = OO'$ et $e = 1$ si les cercles sont tangents extérieurement, — 1 s'ils sont tangents intérieurement.

En élevant au carré la relation (I), on a la condition équivalente :

$$(d^2 - R^2) - R'^2 = 2eRR'$$

ou encore :

$$P_{O'}(O) - R'^2 = 2eRR'.$$

En résumé, pour que les deux cercles (O) et (O') se touchent, il faut et

il suffit que : $|P_0'(O) - R'^2| = 2RR'$, le contact est extérieur si la différence du premier membre est positive, intérieur dans le cas contraire.

Appelons conique à centre le lieu des centres des cercles (M) tangents à un cercle fixe (F'), passant par un point fixe F, non sur (F'). Posons $FF' = 2c$ et désignons par $2a$ le rayon de (F').

La condition de contact de (M) et (F') est :

$$|P_m(F') - MF^2| = 4aMF. \quad (3)$$

Le premier membre de (3) invite à faire la différence des puissances de M par rapport au cercle (F') et au cercle-point F. Soient alors (D) l'axe radical de F et (F'), H la projection de M sur (D). La relation (3) peut s'écrire : $2FF' \cdot MH = 4a MF$ ou : $MF/MH = c/a$.

Réciproquement, soit (Γ) le lieu des points du plan dont le rapport des distances à un point fixe F et à une droite (D) ne passant pas par F, reste constant, et égal à $e \neq 1$: $MF/MH = e$. (4).

A et A' seront les points du lieu situés sur son axe de symétrie FK (K projection de F sur D) ; α et α' seront les transformés de A et A' par l'homothétie (F, 2). Dans cette homothétie, le cercle (O) de diamètre AA' devient le cercle (F') de diamètre αα' = 2AA'. (D) est par construction la polaire de F par rapport à (O), elle est aussi axe radical du cercle-point F et du cercle (F') (propriété classique).

Nous devons évaluer le rapport

$$\overline{FF'}/\overline{AA'} = \overline{OF}/\overline{OA}, \text{ puisque } \overline{FF'} = 2\overline{FO},$$

or : $\overline{OF}/\overline{OA} = \overline{OA}/\overline{OK}$ vu que $(AA'FK) = -1$,

puis : $\overline{OF}/\overline{OA} = \overline{OA}/\overline{OK} = (\overline{OF} - \overline{OA})/(\overline{OA} - \overline{OK}) = -\overline{AF}/\overline{AK} = \pm e$.

L'égalité (4) peut s'écrire : $MF/MH = FF'/AA'$,

ou encore : $|P_m(F') - MF^2| = 2MF \cdot AA'$.

Cette relation exprime que le cercle (M) de centre M, passant par F, est tangent au cercle (F'). Il en résulte que tout point de (Γ) est aussi un point de la conique à centre qui admet F pour foyer et (F') pour cercle directeur relatif à l'autre foyer. L'équivalence des deux définitions est établie.

VII. Note de A. Sem (Libourne). — Si l'on considère la figure formée par une droite (Δ) et un cercle (γ) dont le centre M se projette en H sur (Δ), toute inversion, dont le pôle F est sur (γ), la transforme en une figure analogue formée d'un cercle (L) et d'une droite (δ) ; cette correspondance possède un invariant : $MF/MH = F'_0 F/F'_0 K$, F'_0 étant le centre de (Γ) projeté en K sur (δ).

Envisageons l'ensemble des cercles (γ) passant par le foyer F d'une conique à centre (C) dont (Δ) est la directrice, e l'excentricité. Soit (I) une inversion de pôle F envisagée ci-dessus.

Pour que (γ) soit un cercle générateur de (C), il faut et il suffit que son centre M vérifie : $MF/MH = e$, c'est-à-dire : $F'_0 F/F'_0 K = e$. Donc, il faut et il suffit que : $F'_0 K = \text{constante}$, ou que (δ) soit tangente à un cercle (C₀) centré en F'_0, ou encore que (γ) soit tangent à un cercle (C) inverse de (C₀). Donc (C) est aussi le lieu des centres des cercles (γ) passant par F et tangents à un cercle fixe (C).

Remarques. — 1) (C_0) et (Γ) ayant même centre F'_0 , (C) appartient au faisceau transformé par (I) , c'est-à-dire défini par (Δ) et le cercle-point F .

2) Si l'on s'arrange pour que (I) conserve (C_0) , le centre F' de (C) est en F'_0 et l'on a : $F'K = 2a$, $F'F = 2c$, d'où $e = c/a$.

3) Les mêmes principes sont applicables à partir d'une conique $(\mathcal{C})$ définie par F et le cercle directeur (C) . On pourra choisir l'inversion (I) conservant (C) ; le cercle (γ) passant par F sera un cercle générateur à la condition nécessaire et suffisante que (δ) soit tangente à (C) ; (Γ) étant le cercle concentrique à (C) passant par F , on reviendra à la figure $(\gamma) (\Delta)$, l'invariant $FF'/F'K = MF/MH$ permettant encore de conclure :

$$MF/MH = c/a.$$
