

**Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général en 1949**

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général, président ; de Mme AYRAULT, professeur de Mathématiques (Fontenay) au Lycée Jules-Ferry ; de MM. DURIX, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Jacques-Decour ; KÉROMEN, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Louis-le-Grand ; PICARDAT (René), professeur de Mathématiques Spéciales au Collège Chaptal ; POUGNAND, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au Lycée Buffon.

ANALYSE DU SUJET

1^{re} PARTIE. — Dans un demi-plan vertical (P) limité à une horizontale (H) et situé en dessous de cette droite on considère deux points A et B. On imagine un mobile M animé sur la droite AB d'un mouvement descendant uniformément accéléré, défini par l'énoncé du sujet de façon purement cinématique, pour rester dans les limites du programme. Il s'identifie néanmoins avec celui d'une particule pesante assujettie à rester sur la droite AB et glissant sur elle sans frottement, la vitesse initiale étant nulle au début du mouvement, quand M est en S, point commun à la droite AB et à (H).

1^{er} Calculer le temps mis par M pour descendre de A en B, ou de B en A, selon que A est plus, ou moins, élevé que B.

Ce temps T (A, B) est la différence des temps que met M à glisser de S en A, et en B, différence prise toujours en valeur absolue. On trouve pour

$$\text{sa valeur } \gamma = \sqrt{\frac{2}{g \sin \theta}} \left| \sqrt{SB} - \sqrt{SA} \right| \quad (1)$$

g étant l'accélération de la pesanteur en chute libre, θ l'angle aigu de AB avec (H).

En introduisant les distances de A et B à (H), soient a et b, SB se remplace par $\frac{b}{\sin \theta}$, SA par $\frac{a}{\sin \theta}$:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{|\sqrt{b} - \sqrt{a}|}{\sin \theta} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{|b - a|}{\sin \theta} \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

$$\text{Or } \frac{|b - a|}{\sin \theta} = AB \text{ et } \gamma \text{ prend l'expression } \gamma = T(A, B) = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{AB}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (2).$$

T (A, B), non défini quand on suppose $a = b$ (S étant rejeté à l'infini) peut l'être par extension en utilisant (2), ce qui revient à considérer la limite de γ quand AB tend vers un segment horizontal.

2^e Soient λ et λ' les deux points de la droite AB, symétriques par rapport à S et conjugués harmoniques par rapport à A et B, λ étant supposé intérieur à (P). Evaluer, à l'aide de g et de γ , la longueur du segment découpé sur une verticale du plan par les perpendiculaires à AB passant par ω , milieu de AB, et par λ .

Comme

$$S_{\omega} = \frac{SA + SB}{2}, S_{\lambda} = \sqrt{SA \cdot SB}, \omega\lambda = S_{\omega} - S_{\lambda} = \frac{(\sqrt{SB} - \sqrt{SA})^2}{2}$$

$$\text{D'après (1)} \cdot (\sqrt{SB} - \sqrt{SA})^2 = \frac{g \sin \theta \cdot \gamma^2}{2}$$

Le segment dont il s'agit a pour valeur $\frac{\omega\lambda}{\sin \theta}$ soit

$$\frac{(\sqrt{SB} - \sqrt{SA})^2}{2 \sin \theta} = \frac{1}{4} g \gamma^2.$$

3° Soit (O) un cercle du plan de (P), de centre O et de rayon R. Le point O n'est pas nécessairement intérieur à (P), on suppose seulement que le cercle (O) a des points situés dans (P). La verticale de O coupant (H) au point désigné par K, on pose $d = \overline{KO}$ (sens positif descendant), ou, si l'on préfère : $d = \overline{OK}$ (sens positif ascendant).

Cas de figure. — Si (O) est totalement intérieur à (P), d est positif et supérieur à R ; ce premier cas est donc caractérisé par l'inégalité $\frac{d}{R} > 1$.

Si (O) est sécant à (H), d est positif, négatif ou nul et inférieur en valeur absolue à R. L'inégalité caractéristique de ce second cas est $\left| \frac{d}{R} \right| < 1$ ou

$$-1 < \frac{d}{R} < 1.$$

Il y a un cas séparatif où (O) est tangent à (H), en dessous de (H) pour $\frac{d}{R} = 1$.

On suppose que les points A et B varient sur (O) de façon que $\gamma = C''$. Montrer que le cercle de diamètre $\lambda\lambda'$ varie dans un faisceau fixe ; en déduire le lieu de λ , qui est aussi l'enveloppe de AB.

En général, θ peut être supposé non nul, la verticale de O est coupée par la médiatrice ωO de AB en O, et par la perpendiculaire à AB au point λ en un certain point E. D'après 2°, le segment $OE = \frac{1}{4} g \gamma^2$, ω étant toujours

plus bas que λ , $\overline{OE}$ est ascendant. En résumé

$\overline{OE} = h$ (sens positif des verticales supposé ascendant), en posant

$$h = \frac{1}{4} g \gamma^2.$$

E est donc un point fixe.

Le cercle (S) décrit sur $\lambda\lambda'$ comme diamètre est orthogonal au cercle (O) ; son centre S reste situé sur (H). (S) appartient constamment au faisceau fixe de cercles ayant pour ligne des centres (H), pour axe radical la verticale de (O), la puissance du point O par rapport à tous ces cercles étant R^2 .

La puissance de tout point de l'axe radical par rapport à ces cercles est la même : en prenant pour ce point E, qu'on vient de définir, la puissance de E par rapport à (S) est $E\lambda^2$ [λE tangente en λ à (S)]. Donc $E\lambda = C^e$ et le point λ reste sur un cercle fixe (E) de centre E.

Pour le mieux qualifier, il suffit d'observer que le point S a des puissances égales par rapport au cercle (O) [$\overline{SA \cdot SB} = S\lambda^2$] et par rapport au cercle (E) de centre E et de rayon $E\lambda$ [$S\lambda^2$ puisque $S\lambda$ est tangente à ce cercle en λ]. Il en résulte que la droite (H) est axe radical des cercles (O) et (E). Autrement dit le cercle (E) appartient à un (nouveau) faisceau (F_E) de cercles défini par le cercle particulier (O) donné et par la droite donnée (H) jouant le rôle d'axe radical de ce faisceau.

La situation de son centre a été précisée déjà par $\overline{OE} = h = \frac{1}{4}g\gamma^2$ (3). Son rayon $E\lambda$ se calcule en égalant les expressions de K par rapport à (E) et à (O), ce qui donne :

$$KE^2 - E\lambda^2 = KO^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

formule où, avec le sens ascendant comme sens positif pour les verticales

$$\begin{aligned} \overline{KE} &= \overline{OE} - \overline{OK} = h - d \\ (h - d)^2 - E\lambda^2 &= d^2 - R^2 \quad \text{d'où} \\ E\lambda^2 &= (d - h)^2 - d^2 + R^2 \quad (4) \end{aligned}$$

λ est entre A et B, donc intérieur à (O).

Réciproquement, supposons qu'un point λ soit sur (E) [en admettant que ce cercle existe] et soit de plus intérieur à (O) : la tangente à (E) au point λ coupe nécessairement le cercle (O) en deux points A et B, définis à l'ordre près et proposons-nous d'établir que T (A, B) (voir I, 1^{re}) a bien la valeur γ .

Si, comme c'est le cas normal, la droite $B\lambda A$, coupe (H) en un point S, la puissance de ce point par rapport à (E) est $S\lambda^2$. Sa puissance par rapport à (O) est $\overline{SA \cdot SB}$. (H) étant axe radical de (E) et de (O), il y a égalité entre ces puissances

$$S\lambda^2 = \overline{SA \cdot SB}.$$

Ceci prouve que λ , et son symétrique λ' par rapport à S, sont conjugués harmoniques par rapport à A et B. Le temps T (A, B) est tel que

$$\overline{OE} = \frac{1}{4}g T(A, B)^2.$$

Comme par hypothèse $\overline{OE} = \frac{1}{4}g\gamma^2$ et que $T(A, B) > 0$, il en résulte que $T(A, B) = \gamma$.

Si la tangente à (E) en λ est horizontale, on ne peut définir S : mais on a vu que pour de telles positions λ_1, A_1, B_1 de λ, A, B , $T(A_1, B_1)$ a encore un sens fixé par $\sqrt{\frac{2}{g} \frac{A_1 B_1}{2\sqrt{a_1}}}$, $a_1 = b_1 =$ distance de λ_1 à (H). Quand on fait tendre λ , point quelconque de (E) intérieur à (O), vers λ_1 le second membre

de l'expression (2) tend, d'après les résultats élémentaires de la théorie des limites vers $\sqrt{\frac{2}{g} \frac{A_1 B_1}{2\sqrt{a_1}}}$ puisque $AB \rightarrow A_1 B_1$, $a \rightarrow a_1$, $b \rightarrow a_1$. Le pre-

mier membre de (2) en fait est la constante γ , donc $T(A_1, B_1)$ ne saurait différer de γ , et l'on peut conclure que :

Le lieu de λ est la portion du cercle (E) intérieure au cercle (O) si tant est qu'elle existe ; et c'est aussi l'enveloppe de la corde AB.

Discussion : 1^{er} cas de figure $\frac{d}{R} > 1$; le cercle (O) ne coupe pas (H). Le faisceau (F_E) a deux points limites E₁, E₂ sur OK, dont les cotes $\overline{OE_1} = h_1$, $\overline{OE_2} = h_2$ au-dessus de O sont les racines de l'équation en h

$$(d - h)^2 - d^2 + R^2 = 0.$$

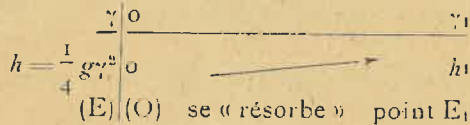
En supposant $h_1 < h_2$: $h_1 = d - \sqrt{d^2 - R^2}$ $h_2 = d + \sqrt{d^2 - R^2}$.

E₁ est entre O et K, E₂ son symétrique par rapport à (K) est en dehors du demi-plan (P). Le cercle du faisceau (F_E) centré en un point E pris sur la droite OK n'existe que si E est extérieur au segment E₁E₂ : il est de rayon nul pour E confondu avec E₁ ou E₂.

Mais visiblement ce cercle (E) n'a de point intérieur au cercle (O) que lorsque E appartient au segment OE₁ (point O exclu), et (E) est alors totalement intérieur à (O).

La relation $\frac{1}{4} g \gamma_1^2 = h_1$ donne une valeur de γ , soit $\gamma_1 = 2\sqrt{\frac{h_1}{g}}$.

En faisant croître le paramètre γ de 0 à γ_1 , le domaine intérieur à (E) va sans cesse en diminuant depuis l'intérieur de (O) jusqu'au point limite E₁.



(E) (O) se « résorbe » point E₁

On résume en observant qu'il n'y a de couples (A, B) sur (O) tels que $T(A, B) = \gamma$ que si γ ne dépasse pas un certain maximum qui est γ_1 .

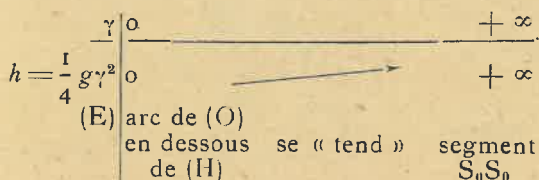
L'enveloppe de AB, quand $\gamma = \gamma_1$, est réduite à un point.

2^e cas de figure : — $1 < \frac{d}{R} < 1$, le cercle (O) coupe (H) en deux points

S₀, S'₀. Le faisceau (F_E) est la famille des cercles passant par ces points. Tous existent quel que soit h et ont un arc contenu dans (P).

Si E est au-dessus de O, et c'est le cas d'après (3) $\overline{OE} = \frac{1}{4} g \gamma^2$, il est visible, aussi bien pour $0 < d < R$, que pour $R < d < 0$, que l'arc de (E) contenu dans (P) est intérieur en entier à (O).

Il n'y a plus de condition imposée à γ (que d'être positif) pour l'existence des couples (A, B) tels que $T(A, B) = \gamma$.



II^e PARTIE. — Dans I, les deux points d'un couple (A, B) intervenaient symétriquement. Ici on les distingue, A jouant le rôle d'origine, B celui d'extrémité du déplacement $\vec{AB}$ et l'on introduit le vecteur ayant même direction et sens que $\vec{AB}$, mais dont la longueur a pour mesure le nombre $\gamma = T(A, B)$. Ce vecteur libre étant désigné par $\vec{V}_{AB}$, ce qui précède se condense en la formule vectorielle

$$\vec{V}_{AB} = \frac{\gamma}{AB} \vec{AB},$$

et d'après (2), elle s'explicite par

$$\vec{V}_{AB} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\vec{AB}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

Il est clair, au sujet des rôles distincts de A et B, que $\vec{V}_{BA} = -\vec{V}_{AB}$.

Un troisième point C étant considéré, toujours dans (P), il s'agissait d'étudier la somme vectorielle :

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{BC} + \vec{V}_{CA}.$$

L'énoncé restreignait, provisoirement, cette étude en supposant que la distance c de C à (H) se classe par rapport à a et b dans l'ordre :

$$a \leq c \leq b.$$

1^o Lorsque A, C, B sont alignés, ce sont des positions successives de M (voir T 1^o), les vecteurs $\vec{V}_{AC}$, $\vec{V}_{CB}$ ont même sens, ainsi que $\vec{V}_{AB}$, le temps employé par M pour descendre de A en B est la somme des durées de descente de A en C et de C en B. Il en résulte $\vec{V}_{AB} = \vec{V}_{AC} + \vec{V}_{CB}$, d'où aussi $\vec{V} = 0$.

2^o Lorsque A, B, C ne sont pas alignés, A et B étant de part et d'autre de l'horizontale de C, la droite AB coupe nécessairement l'horizontale de C en un point C_1 du segment AB.

Etudions séparément $\vec{V}_1 = \vec{V}_{CA} + \vec{V}_{AC_1}$ et $\vec{V}_2 = \vec{V}_{C_1B} + \vec{V}_{BC}$, car il résulte de l'étude (1^o) que $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_{CA} + (\vec{V}_{AC_1} + \vec{V}_{C_1B}) + \vec{V}_{BC}$ où A, C_1 , B étant alignés, on sait que $\vec{V}_{AC_1} + \vec{V}_{C_1B} = \vec{V}_{AB}$. En définitive $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}$.

Par exemple, prenons $V_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\vec{CA}}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} + \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\vec{AC_1}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$; comme

$$\vec{CA} + \vec{AC}_1 = \vec{CC}_1, \quad \vec{V}_1 = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\vec{CC}_1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}$$

$$\text{On trouve de même } \vec{V}_2 = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\vec{C}_1\vec{C}}{\sqrt{c} + \sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\vec{CC}_1}{\sqrt{c} + \sqrt{b}}$$

En définitive $\vec{V} = \sqrt{\frac{2}{g}} \left[\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} - \frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} \right] \vec{CC}_1$ formule de la forme $\varphi \cdot \vec{CC}_1$, où φ est le nombre

$$\varphi = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})} = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{b - a}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

Le vecteur $\vec{V}$ est de *direction horizontale* ; comme $a < b$, $\varphi > 0$, c'est-à-dire que $\vec{V}$ est du sens de $\vec{CC}_1$. Enfin la longueur δ de $\vec{V}$ est

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{(b - a) CC_1}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}$$

On voit que l'aire Σ du triangle ABC, somme des aires des triangles ACC₁ et BCC₁, est le demi-produit de leur côté commun CC₁ par la somme de leurs hauteurs, qui est $(b - a)$. Ainsi $(b - a) CC_1 = 2 \Sigma$,

$$\text{et} \quad \delta = 2 \sqrt{\frac{2}{g}} \frac{\Sigma}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a})}. \quad (5)$$

3° On trace les demi-droites d'origine C, $\vec{Cx}$ verticale descendante, $\vec{Cy}$ horizontale du sens $\vec{V}$, (c'est-à-dire de $\vec{CC}_1$) et l'on prend, comme il est coutumier, le sens positif des angles dans le plan, ainsi orienté tel que

$$(\vec{Cx}, \vec{Cy}) = +\frac{\pi}{2}.$$

$\vec{CX}$ désigne une troisième demi-droite d'origine C, bien déterminée par l'hypothèse

$$(\vec{AB}, \vec{CX}) = +\frac{\pi}{2}.$$

On demandait, pour situer géométriquement $\vec{CX}$, de *montrer que la demi-droite $\vec{CX}$ traverse la droite AB*, autrement dit que la hauteur C φ du triangle ABC issue de C est un segment appartenant à $\vec{CX}$.

Il suffisait à cet effet de *ne pas oublier l'hypothèse $a < b$* qui s'interprète en observant que le vecteur $\vec{AB}$ fait avec la verticale descendante de A un angle *aigu*. Transformons cet angle par la translation de vecteur $\vec{AC}$, puis par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de C, on obtient, d'après les hypothèses indiquées, l'angle de $\vec{CX}$ avec $\vec{Cy}$ (angle saillant ordinaire) qui est encore *aigu*.

$C\varphi$ et CC_1 formant toujours un angle aigu, et $\vec{CX}$ étant sur la droite $C\varphi$, $\vec{CX}$ a toujours le sens de $\vec{C\varphi}$, ce que l'on se proposait d'établir.

Démontrer, pour la suite, la relation

$$(6) \quad (\vec{Cx}, \vec{CX}) = (\vec{V}, \vec{AB}) + \pi \text{ à } 2k\pi \text{ près.}$$

$$(\vec{Cx}, \vec{CX}) = (\vec{Cx}, \vec{Cy}) + (\vec{Cy}, \vec{AB}) + (\vec{AB}, \vec{CX}) \text{ à } 2k\pi \text{ près,}$$

et comme $(\vec{Cx}, \vec{Cy}) = +\frac{\pi}{2}$, $(\vec{AB}, \vec{CX}) = +\frac{\pi}{2}$ à $2k\pi$ près,

il vient $(\vec{Cx}, \vec{CX}) = (\vec{Cy}, \vec{AB}) + \pi \text{ à } 2k\pi \text{ près.}$

ce qui est la relation démontrée. $\vec{Cy}$ ayant l'orientation de $\vec{V}$.

4° Les longueurs respectives de $\vec{V}_{BC}$, $\vec{V}_{CA}$, $\vec{V}_{AB}$ étant désignées par α , β , γ ; celle de $\vec{V}$, rappelons-le, par δ , on suppose que les points A, B, C, appartiennent au cercle (O) considéré dans (I. 3°). Etablir la relation

$$R = \frac{g}{4} \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta} \quad (6)$$

Ceci résulte de la relation, classique, relative au triangle ABC dont R est le rayon du cercle circonscrit

$$4R\Sigma = AB \cdot AC \cdot BC.$$

Elle permet, dans (5), d'introduire R au lieu de Σ . En remplaçant ensuite les quotients $\frac{AB}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ par $\sqrt{\frac{g}{2}} \gamma$, d'après (2), de même $\frac{BC}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$ par

$\sqrt{\frac{g}{2}} \alpha$ et $\frac{AC}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}$ par $\sqrt{\frac{g}{2}} \gamma$, on passe sans peine de (5) à (6).

5° Appelons LIJL' le contour de composition des vecteurs successifs $\vec{V}_{AB}$, $\vec{V}_{BC}$, $\vec{V}_{CA}$, c'est-à-dire que

$$\vec{LI} = \vec{V}_{AB}, \vec{IJ} = \vec{V}_{BC}, \vec{JL'} = \vec{V}_{CA}, \vec{L'L} = \vec{V}.$$

A l'aide de ce contour, démontrer la relation :

$$(7) \quad 2[\alpha\beta \cos \hat{C} - \gamma\delta \cos(\vec{V}, \vec{AB})] = \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2,$$

où $\hat{C}$ désigne l'angle BCA du triangle ABC.

Il suffit d'égaliser les deux expressions trigonométriques de IL'^2 , dans les triangles

$$IJL' \quad IJ^2 + JL'^2 - 2IJ \cdot JL' \cos(\vec{JI}, \vec{JL'}).$$

$$ILI' \quad IL^2 + LL'^2 - 2LI \cdot LL' \cos(\vec{LI}, \vec{LL'}).$$

Comme $(\vec{JI}, \vec{JL'}) = \pi + \vec{V}_{BC}$, $\vec{V}_{CA} = \pi + (\vec{BC}, \vec{CA}) = (\vec{CB}, \vec{CA})$

d'où $\cos(\vec{JI}, \vec{JL'}) = \cos \hat{C}$, $\cos(\vec{LI}, \vec{LL'}) = \cos(\vec{V}, \vec{AB})$,

$$(\vec{LI}, \vec{LL'}) = (\vec{V}_{AB}, \vec{V}) = (\vec{AB}, \vec{V}),$$

$IJ = \alpha$, $JL' = \beta$, $LI = \gamma$, $LL' = \delta$, il vient

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \hat{C} = \gamma^2 + \delta^2 - 2\gamma\delta \cos(\vec{V} + \vec{AB}),$$

ce qui est la relation (7).

6° Calculer la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{E\lambda}$ (voir I, 3°) quand on prend comme sens positif sur les perpendiculaires à AB le sens de $\overrightarrow{CX}$ (voir II, 3°), en projetant sur cet axe CX le contour EO ω λ.

$\overrightarrow{CX}$ a, comme on l'a vu, le sens du vecteur hauteur C φ . Soit $\overrightarrow{OX_1}$ l'axe, de même orientation que $\overrightarrow{CX}$, d'origine O. La demi-droite positive $\overrightarrow{OX_1}$ perce le cercle (O) en un point μ . $\overrightarrow{\mu\omega}$ a le sens contraire de $\overrightarrow{OX_1}$, donc de $\overrightarrow{C\varphi}$, ce qui implique que C et μ sont de part et d'autre de la corde AB. Le point μ est donc le milieu de l'arc AB intercepté par l'angle inscrit $\widehat{BCA}$ de mesure $\widehat{C}$, sur le cercle (O). Les demi-angles au centre $\widehat{\mu OB} = \widehat{\mu OC}$ (non orientés) sont égaux à $\widehat{C}$. Par définition même du cosinus d'un angle.

$\overrightarrow{O\omega} = R \cos \widehat{\mu OB} = R \cos C$, le sens positif étant celui de $\overrightarrow{CX}$, sur la droite O ω .

Tel est le seul point délicat de cette partie. Le théorème des projections donne

$$\overrightarrow{E\lambda} = \text{proj. } \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{O\omega} + \text{proj. } \omega\lambda \text{ (proj. prises sur } \overrightarrow{CX}).$$

Comme $\text{proj. } \omega\lambda = 0$ et que le vecteur $\overrightarrow{EO} = -\overrightarrow{OE}$ est porté sur la verticale descendante de O et a pour mesure correspondante (toujours positive)

$$h = \frac{1}{4} g \gamma^2, \text{ on obtient :}$$

$$\overrightarrow{E\lambda} = \frac{1}{4} g \gamma^2 \cos(\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{Cx}) + R \cos C.$$

Ici intervient la relation (6), d'après laquelle

$$\cos(\overrightarrow{CX}, \overrightarrow{Cx}) = \cos(\overrightarrow{Cx}, \overrightarrow{CX}) = \cos[(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{AB}) + \pi] = -\cos(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{AB}), \text{ et}$$

$$\overrightarrow{E\lambda} = -\frac{1}{4} g \gamma^2 \cos(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{AB}) + R \cos C.$$

g s'élimine de ces formules désormais géométriques par usage de la relation (6) qui donne $\frac{g}{4} \gamma^2 = R \frac{\gamma \delta}{\alpha \beta}$ (7) (nouvelle expression de OE) et l'on

$$\text{obtient} \quad \overrightarrow{E\lambda} = \frac{R}{\alpha \beta} [-\gamma \delta \cos(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{AB}) + \alpha \beta \cos C].$$

Ici joue une simplification, assez imprévisible en vertu de (7), dont l'utilisation donne

$$\overrightarrow{E\lambda} = \frac{R}{2\alpha\beta} (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2).$$

On est amené à confronter ce résultat avec l'expression calculée dans (I, 3°) de $\overrightarrow{E\lambda}^2$ [voir formule (4)] : h y peut être remplacé par $R \frac{\gamma \delta}{\alpha \beta}$, comme on l'a vu, et il vient :

$$\begin{aligned} \frac{R^2}{4\alpha^2\beta^2} [\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2]^2 &= h^2 - 2dh + R^2 \\ &= \frac{R^2}{\alpha^2\beta^2} [\gamma^2\delta^2 + \alpha^2\beta^2 - 2\frac{d}{R} \alpha\beta\gamma\delta]. \end{aligned}$$

Cette relation permet d'évaluer $\frac{d}{R}$ en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On trouve aisément

$$(8) \quad \frac{d}{R} = \frac{\mathcal{P}}{8\alpha\beta\gamma\delta},$$

$\mathcal{P}$ désignant, en abrégé le polynôme

$$4(\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2) - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)^2,$$

dont la forme réduite est

$$(9) \quad \mathcal{P} = 2(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) + 2\delta^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4),$$

Ce polynôme est symétrique par rapport aux quatre lettres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Des transformations faciles de calcul algébrique permettent de vérifier les relations de l'énoncé

$$(8') \quad \frac{d}{R} - 1 = \frac{(\beta + \gamma - \alpha - \delta)(\gamma + \alpha - \beta - \delta)(\alpha + \beta - \gamma - \delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}{8\alpha\beta\gamma\delta}$$

$$(8'') \quad \frac{d}{R} + 1 = \frac{(\beta + \gamma - \alpha + \delta)(\gamma + \alpha - \beta + \delta)(\alpha + \beta - \gamma + \delta)(\alpha + \beta + \gamma - \delta)}{8\alpha\beta\gamma\delta}$$

Cette dernière (8'') comporte le contrôle que $d > -R$, soit $\frac{d}{R} + \gamma > 0$, comme conséquence du fait que dans le quadrilatère LIJL', chaque côté est inférieur à la somme des trois autres, soit que tous les facteurs, au numérateur du second membre, sont positifs.

Les formules (6) et (8) sont vraies quelles que soient les situations de A, B, C sur la partie de (O) intérieure à (P), bien qu'elles aient été établies en supposant $a \leq c \leq b$. En effet, en modifiant s'il y a lieu les choix des sommets désignés par A, B, C, on peut toujours revenir, pour un triangle ABC donné, au cas où ces inégalités ont lieu. La permutation effectuée ainsi sur ces trois sommets ne peut que remplacer $\vec{V}$ par lui-même ou par son opposé, ce qui n'altère pas δ . Dans leur ensemble α, β, γ conservent leurs valeurs et comme les relations (6) et (8) sont symétriques en α, β, γ , elles ne cessent pas de subsister par le changement de notations envisagé.

III^e PARTIE. — 1^o Montrer que les relations (6) et (8) font correspondre à la donnée de α, β deux systèmes de valeurs positives de γ et δ , sous réserve que α et β ne dépassent pas le maximum γ_1 trouvé dans (I, 3^o), pour le cas où $d > R$.

On a à résoudre le système des deux équations (6) et (8) où, seuls, γ et δ sont considérés comme inconnues. La première donne, en posant

$$\frac{4R}{g\alpha\beta} = m, \quad m \text{ rapport positif connu}$$

$$\gamma = m\delta \quad (6')$$

En remplaçant γ par $m\delta$ dans (8), on obtient l'équation suivante, qui est, en δ^2 , du second degré, pour $m \neq 1$

$$\delta^4 (m^2 - 1)^2 + 2\delta^3 [4\alpha\beta m \frac{d}{R} - (m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2)] + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0 \quad (9).$$

Son discriminant Δ' est

$$[4\alpha\beta m \frac{d}{R} - (m^2 + 1)(\alpha^2 + \beta^2)]^2 - (m^2 - 1)^2(\alpha^2 - \beta^2)^2,$$

différence de deux carrés que l'on transforme, ce qui donne $\Delta' = 4 \mathcal{A}\mathcal{B}$ en posant

$$\mathcal{A} = m^2\alpha^2 - 2\alpha\beta m \frac{d}{R} + \beta^2,$$

$$\mathcal{B} = m^2\beta^2 - 2\alpha\beta m \frac{d}{R} + \alpha^2.$$

Le coefficient de $2\delta^2$ dans (9) est $-(\mathcal{A} + \mathcal{B})$, et on voit que

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} = (m^2 - 1)(\alpha^2 - \beta^2)$$

La décomposition en carrés de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, regardés comme trinômes en m donne

$$\mathcal{A} = (m\alpha - \beta \frac{d}{R})^2 + \beta^2(1 - \frac{d^2}{R^2}), \quad \mathcal{B} = (m\beta - \alpha \frac{d}{R})^2 + \alpha^2(1 - \frac{d^2}{R^2}).$$

Dans le second cas $|\frac{d}{R}| < 1$ $1 - \frac{d^2}{R^2}$ est positif et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ apparaissent comme positifs.

Dans le premier cas $\frac{d}{R} > 1$, nous supposons que $\alpha \leq \gamma_1$, $\beta \leq \gamma_1$, conditions impliquées par l'existence d'un triangle ABC tel que $T(B, C) = \alpha$, $T(C, A) = \beta$. C'est donc admettre que

$$g \frac{\alpha^2}{4} \leq d - \sqrt{d^2 - R^2} \quad g \frac{\beta^2}{4} \leq d - \sqrt{d^2 - R^2}.$$

Remplaçons dans ces hypothèses g par $\frac{4R}{m\alpha\beta}$, on obtient aisément

$$m\beta R \geq (d + \sqrt{d^2 - R^2})\alpha$$

$$m\alpha R \geq (d + \sqrt{d^2 - R^2})\beta$$

d'où des bornes de $(m\beta - \alpha \frac{d}{R})^2$, $(m\alpha - \beta \frac{d}{R})^2$, qui conduisent à $\mathcal{B} \geq 0$ et $\mathcal{A} \geq 0$.

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ne sont nuls à la fois que si $\alpha = \beta = \gamma_1$, mais alors (E) étant le point E_1 , on n'a pas affaire à un véritable triangle ABC ; on peut exclure ce cas.

On observe encore que d'après les hypothèses

$$g \frac{\alpha\beta}{4} \leq d - \sqrt{d^2 - R^2} < R$$

ce qui établit, pour ce premier cas de figure, que m est > 1 .

Pour $m \neq 1$, la résolution de (9) donne

$$\delta^2 = \left(\frac{\sqrt{\mathcal{A}} + \sqrt{\mathcal{B}}}{(m^2 - 1)^2} \right)^2, \quad \text{soit} \quad \delta = \left| \frac{\sqrt{\mathcal{A}} \pm \sqrt{\mathcal{B}}}{m^2 - 1} \right|$$

D'où deux systèmes de valeurs positives de γ et δ , que l'on peut en rem-

plaçant $\sqrt{\mathcal{A}} \pm \sqrt{\mathcal{B}}$ par $\frac{\mathcal{A}-\mathcal{B}}{\sqrt{\mathcal{A}} \mp \sqrt{\mathcal{B}}}$ mettre sous les formes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma' = m\delta' \\ \delta' = \frac{|x^2 - \beta^2|}{\sqrt{\mathcal{A}} + \sqrt{\mathcal{B}}} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma'' = m\delta'' \\ \delta'' = \left| \frac{x^2 - \beta^2}{\sqrt{\mathcal{A}} - \sqrt{\mathcal{B}}} \right| \end{array} \right.$$

Pour $m=1$ (cas où $\left| \frac{d}{R} \right| < 1$), on ne trouve qu'une valeur de δ et une seule solution, l'autre, fort particulière, correspondant à un triangle dont un côté est sur (H).

Quand on suppose $\alpha = \beta$ on a la solution triviale $\gamma = 0$ qui ne correspond pas à un vrai triangle.

2° Conséquence géométrique de cette étude.

Se donner α et β , c'est se donner les cercles (E_α) , (E_β) , dont, éventuellement une partie $(\mathcal{E}_\alpha)$, ou $(\mathcal{E}_\beta)$ est enveloppe des cordes de (O) correspondantes.

Supposons que par un point C convenablement choisi de (O), on puisse mener une tangente CA à $(\mathcal{E}_\beta)$ et une tangente CB à $(\mathcal{E}_\alpha)$. A et B étant les seconds points de rencontre de ces tangentes avec (O). On définit alors un triangle ABC tel que la durée T(B, C) ait nécessairement, d'après l'étude précédente, soit la valeur γ' , soit la valeur γ'' . BC est donc tangente soit à $(\mathcal{E}_{\gamma'})$ soit à $(\mathcal{E}_{\gamma''})$ (parties de cercles). En faisant varier C par continuité sur (O) tant que la construction précédente reste possible, on fait varier le triangle ABC dont les côtés restent tangents aux mêmes cercles du faisceau $(\mathcal{F}_E)$ que ceux du triangle primitif.

D'où l'existence d'une infinité de triangles inscrits, comme ABC, dans (O) dont les côtés restent tangents à trois cercles (E_α) , (E_β) , (E_γ) , convenablement associés, du faisceau $(\mathcal{F}_E)$.

Lorsque $d > R$ (premier cas) les enveloppes $(\mathcal{E})$ ne diffèrent pas des cercles (E), C peut être pris arbitrairement sur (O) et on a le choix entre deux positions pour chacun des côtés CA ou CB.

Lorsque $|d| < R$ (second cas), l'étude détaillée de la construction est plus délicate en raison de la restriction des cercles (E) aux arcs d'enveloppes $(\mathcal{E})$, mais l'on voit que si C n'est pas trop éloigné des points S_0 , S_0' , on peut mener par ce point *au moins une* tangente à chacun des arcs $(\mathcal{E}_\beta)$, $(\mathcal{E}_{\gamma'})$. Cette étude n'était pas exigée.

D'ailleurs toute cette partie III, qui donnait au problème sa signification géométrique et qu'on ne comptait voir qu'ébaucher, a été appréciée hors barème.

On entrevoit maintenant le but du sujet : retrouver, par des procédés élémentaires, l'un des théorèmes les plus généraux obtenus par Poncelet dans ses études des polygones inscrits à une conique d'un faisceau de coniques $(\mathcal{F})$ et dont les côtés sont tangents à des coniques du même ponctuel faisceau [Voir DARBOUX : *Principes de Géométrie analytique*, livre III, chapitre III] (1), en prenant pour $(\mathcal{F})$ un faisceau de cercles.

(1) Mme AYRAULT, correcteur de l'épreuve, a soumis le problème à une étude

RÉSULTATS ET OBSERVATIONS

Ce sujet était apparu comme propre à renouveler le caractère de l'épreuve pour qu'elle ne joue pas toujours sur la géométrie pure, soit sur un seul des éléments du programme de la classe de Mathématiques.

En particulier, comme presque tous les maîtres qui ont la charge de prolonger la formation mathématique des élèves après le baccalauréat signalent que ceux-ci ne savent pas bien calculer, il se devait que le Concours Général, de temps à autre, puisse servir de sondage pour établir le bien-fondé de cette assertion.

Comme on pouvait s'y attendre, l'expérience de cette année semble bien s'être traduite par un désarroi marqué des candidats. Non pas seulement que le thème de manœuvre, qui peut paraître inhabituel, les ait déconcertés : mais le compartimentage des questions de détail étant très nettement défini par l'énoncé du sujet, on espérait que la maîtrise des calculs à concevoir et ordonner pour une tâche donnée, qu'on ne peut guère acquérir qu'au seuil des Mathématiques Spéciales n'interviendrait pas tant qu'une technique courante des mécanismes mettant en œuvre les ressources qu'offre le programme de la classe. En quelque sorte, la question (partie III exclue) ne devait porter que sur l'« école du soldat », dont un des premiers actes, en mathématiques, est la *simplification*, toujours désirable, des expressions que le calcul introduit successivement.

Il apparaît que ce sens de la simplification n'est pas communément développé chez nos élèves. A côté d'étourderies graves, telles que les transformations $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \sqrt{b-a}$, $\sqrt{a} + \sqrt{a} = \sqrt{2a}$, qui sont le fait de quelques concurrents en lesquels leurs maîtres ont eu une confiance vraiment exagérée, l'inélégance la plus complète règne dans les calculs et on ne se soucie guère de répondre explicitement aux questions posées de la façon la plus expressive possible.

C'est ainsi qu'on se contente de trouver, dans (I, 2°) :

$$\omega\lambda = \frac{SB - SA}{2} \frac{1 - \sqrt{\frac{SA}{SB}}}{1 + \sqrt{\frac{SA}{SB}}} \quad \text{ou encore} \quad \omega\lambda = (SB - SA) \frac{\left(\sqrt{\frac{SA}{SB}} - 1\right)^2}{2\left(1 - \frac{SA}{SB}\right)}$$

Les concurrents ont-ils été plus à leur aise dans les questions du problème où l'esprit géométrique peut et doit s'affirmer, de préférence au calcul ? C'est précisément le contraire qui s'est manifesté cette année, notamment pour la question (I, 3°), qui a été cruciale dans l'épreuve. Aussi les correc-

purement géométrique, en faisant preuve d'une remarquable perspicacité. D'une part, certaines restrictions du texte peuvent être levées, d'autre part, ce travail a fait découvrir une propriété supplémentaire fort probablement inédite : *le triangle qui a pour sommet les points de contact (tels que λ) des côtés du triangle ABC avec leurs enveloppes reste conjugué à un cercle fixe (réel ou imaginaire pur) qui fait encore partie du faisceau ($\mathcal{G}_F$).*

teurs ont-ils trouvé le niveau du concours plus faible, en général, que les années précédentes. Passons en revue les principales de leurs observations :

(I, 1^{re}) : Les fautes les plus répandues sont l'absence du signe de valeur absolue, l'oubli de $\frac{1}{2}$ dans la loi $SM = \frac{1}{2}gt^2 \sin \theta$, la répugnance à l'emploi des radicaux arithmétiques. Certains trouvant $\gamma = t - t'$, t et t' s'exprimant par de tels radicaux, croient habile d'élever au carré γ et les retrouvent dans t' . Beaucoup conservent sans simplification le rapport $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ (comme

on préfère $\frac{\sqrt{2}}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ parce que le dénominateur est rationnel) ; peut-être donne-t-on trop volontiers l'idée que certaines transformations jouent à sens unique. Cependant dans l'intégration, il sera souvent commode de remplacer $\sqrt{u}$ par $\frac{u}{\sqrt{u}}$ et pour établir la dérivée d'une racine carrée il faut

lien, à la forme près, remplacer $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ par $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

En très grand nombre les candidats attribuent à γ la valeur limite infinie quand AB tend à devenir horizontal ; on ne peut trouver quelque excuse (là encore) qu'à ceux qui ont cru devoir faire tourner AB autour du point S censé fixe.

(I, 2^{re}) : Le calcul de $\omega\lambda$ et $\omega\lambda'$ a été compliqué à plaisir, alors que ces longueurs s'obtenaient séparément : 17 copies sur 38 considèrent une équation du second degré, pas toujours exacte, pour calculer des mesures algébriques (inutiles ici), connaissant leur produit et leur différence. Le résultat, pour $\omega\lambda$, contient l'expression $u + v - 2\sqrt{uv}$, qu'on ne remplace pas par $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2$ plus commode, dans maintes copies.

(I, 3^{re}) : La connaissance de la question des faisceaux de cercles est assez générale, mais le genre du faisceau apparaît trop comme essentiel. On manie aisément, à cela près, les faisceaux orthogonaux, mais dès qu'apparaît le calcul, les maladresses s'accumulent.

La recherche du lieu de λ formait le premier barrage sérieux : on estime souvent trop tôt que ce lieu est trouvé. La discussion est faible presque partout, surtout dans le cas où $\left| \frac{d}{R} \right| < 1$: la plupart des concurrents, qui lisent trop rapidement les énoncés, oublient que d est algébrique, et caractérisent ce cas par $\frac{d}{R} < 1$, au lieu de $-1 < \frac{d}{R} < 1$.

II. On introduit des mesures algébriques inutiles et on les néglige lorsqu'elles sont nécessaires. La multiplication d'un vecteur par un scalaire est connue, mais mal utilisée : le passage des égalités vectorielles aux égalités algébriques et surtout arithmétiques ne se fait pas sans heurt.

L'énoncé, là encore mal lu, ne fait pas songer les élèves à utiliser l'hypothèse $a \leq c \leq b$ de l'énoncé, qui simplifiait notablement les questions de sens.

Il n'a été donné aucune démonstration rigoureuse de l'intersection de la demi-droite CX avec la droite AB ; ceux qui ont essayé d'y parvenir font une étude, incomplète, des différents cas de figure, au lieu d'étudier l'angle saillant de CX avec Cy.

Les laborieux ont franchi sans grand dommage le cap de la question 4 et même de la question 5. On n'a guère vu cependant l'intervention, à $2k\pi$ près, de l'angle $(\vec{V}, \vec{AB})$. Un candidat écrit $(\vec{V}, \vec{AB}) = (\vec{AB}, \vec{V}) + \pi$!

Très peu de candidats ont obtenu l'expression de $\mathcal{P}$.

III. Un seul candidat est arrivé à cette partie et s'est borné à étudier les signes de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$. Un autre, faible par ailleurs, a semblé prouver qu'il avait lu l'énoncé jusqu'au bout, et compris que la question avait quelque rapport avec un problème de géométrie.

PALMARÈS

Le Jury a retenu pour une seconde lecture vingt-trois copies, après le premier examen de toutes les compositions. Il a proposé douze lauréats (deux prix, dix accessits) dont les notes définitives s'échelonnaient de 18 à 10,82.

Le second prix de cette année avait obtenu, en 1948, le second prix au Concours général de la classe de Première. Le second accessit de ce même concours a eu pour 1949 un premier accessit (*ex-aquo*).

Sur 188 candidats, ont composé 19 jeunes filles. Une seule a eu sa copie retenue pour la seconde lecture, mais n'a été classée que quinzième. Sa composition est solide et correcte, mais ne dépasse pas le milieu de II.

La meilleure copie décèle de la facilité, une netteté sobre dans la présentation et un ensemble de qualités franchement réconfortantes à reconnaître ; il en est de même pour la copie classée deuxième. Les récompenses accordées attestent qu'il existe un lot d'élèves sérieux et bien exercés dont les efforts méritent d'être encouragés.

Le travail minutieux et pénétrant des correcteurs ne saurait être trop loué, et, à constater que les compositions primées ont été dignes de tant de vigilance et de peine, il est permis de clore ce rapport sur une note optimiste.

Nous ne pouvons douter en effet qu'à l'époque proche ou tous les élèves auront accompli leurs cycles de scolarité dans des conditions redevenues normales, la valeur originale des professeurs, la perfection accrue de l'enseignement, auront des résultats féconds portant sur un nombre toujours plus grand de bons éléments. Le problème essentiel reste de fixer à chacun sa voie, quelle que soit la précocité dont il témoigne, car le fruit de notre enseignement du Second Degré ne se développe pas toujours d'une manière immédiate.

L'Inspecteur général, Président du Jury,
P. ROBERT.