

## **L'enseignement de l'arithmétique théorique en « Mathématiques élémentaires » et en « Sciences expérimentales »**

Le but de ce cours est de donner aux élèves des idées claires et précises sur l'Arithmétique. Ils la pratiquent comme un automatisme depuis l'école primaire, mais ils ont besoin, à ce niveau, d'en repenser les principes. Pour ceux qui continueront des études mathématiques le cours d'Arithmétique servira de base aux cours d'Algèbre de Mathématiques supérieures et spéciales. Il importe que ce cours soit solidement bâti, donc logiquement conçu. Or il semble que la plupart des cours et des livres d'Arithmétique ne répondent qu'imparfaitement à ce but.

Le début du cours comprend l'étude des nombres entiers, de la numération décimale et des opérations. On ne distingue pas toujours assez bien ce qui est général et ce qui est particulier au système décimal. Les définitions des opérations et du système de numération sont rarement assez nettes et assez abstraites. Voici une autre manière de concevoir cette première partie :

— Etudier d'abord les nombres entiers — abstraction faite de leur écriture — puis les sept opérations avec leurs définitions et leurs propriétés.

— Introduire ensuite le système décimal comme moyen de représenter les nombres par un résultat d'opérations.

Voici le plan détaillé de ce début de cours :

I. NOMBRES ENTIERS. — C'est évidemment une notion première qu'il n'y a pas lieu de définir. Nous précisons seulement quelques idées :

Les nombres entiers se présentent sous forme d'une suite  $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  qui commence à 1 et qui ne finit pas. Nous figurons ici les nombres par les signes  $1, 2, 3$  ou  $a, b, c$ , laissant pour plus tard leur représentation.

Si dans la suite-type des entiers on rencontre un nombre  $a$  avant un nombre  $b$ ,  $a$  est dit inférieur à  $b$ .

Les nombres entiers servent à caractériser des collections d'objets. « Compter » une collection consiste à ranger les objets dans un certain ordre et, à faire correspondre à chaque objet, dans l'ordre choisi, un nom-

bre de la suite-type des entiers. Le dernier nombre obtenu est le nombre d'objets de la collection.

*Axiome* : Le nombre d'objets est indépendant de l'ordre dans lequel la collection est rangée.

II. OPÉRATIONS. — 1° *Addition* : Pour utiliser les nombres il faut définir les opérations, c'est-à-dire des procédés permettant d'obtenir un nouveau nombre à partir de plusieurs autres. La plus simple est appelée addition :

Ecrivons la suite-type des entiers de 1 jusqu'à  $a$ . Au lieu de poursuivre, recommençons à écrire 1, 2, ... après le nombre  $a$  jusqu'à  $b$ , et faisons correspondre la suite-type à cette suite transformée. On obtient ceci :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1, 2, \dots, a, 1, 2, 3, \dots, b \text{ (suite transformée),} \\ 1, 2, 3, \dots, a, \dots, n \text{ (suite-type).} \end{array} \right.$$

ce qui revient à « compter » le nombre de signes de la suite transformée.

A tout nombre  $b$  de la suite transformée situé dans la partie écrite après  $a$ , correspond un nombre  $n$  de la suite-type, appelé somme de  $a$  et de  $b$ .

Puisque  $n$  est aussi le nombre des signes écrits dans :

$$1, 2, \dots, a, 1, \dots, b$$

on peut changer l'ordre de ces signes sans changer le nombre  $n$  (voir axiome) et les écrire :

$$1, 2, \dots, b, 1, 2, \dots, a,$$

ce qui prouve que  $n$  est aussi la somme de  $b$  et de  $a$ . Donc l'addition est commutative.

*Addition de plusieurs nombres*, méthode usuelle. La somme totale est le nombre de signes de la suite :

$$1, 2, \dots, a, 1, 2, \dots, b, 1, 2, \dots, c, 1, 2, \dots, k,$$

ce qui montre directement qu'elle est totalement commutative.

2° *Soustraction* : La définir comme opération inverse de l'addition telle qu'elle a été présentée plus haut.

Cas de possibilité.

Addition et soustraction d'inégalités.

Permutations possibles dans une suite d'additions et de soustractions.

3° *Multiplication* : Définition usuelle.

Propriétés.

4° *Division* : Faire remarquer qu'elle n'est pas toujours possible.

Réserver pour une étude ultérieure la question des multiples et diviseurs qui conduira à la division avec reste, au p.g.c.d. et au p.p.c.m.

5° *Élévation à une puissance* :  $a^n = A$ . Préciser que :

$a$  est la base,

$n$  l'exposant,

$A$  la puissance.

Insister sur le fait que l'opération n'est pas commutative,  $a^n \neq n^a$ . Le faire constater sur quelques exemples numériques. Réserver pour une étude ultérieure la comparaison générale de ces deux nombres qui nécessitera l'emploi de la formule du binôme. Montrer la distributivité par rapport à

la multiplication et les inégalités. Etudier les deux opérations inverses  
    { extraction de racine.  
    } extraction de logarithme.

6° *Extraction de racine* : C'est la recherche de la base connaissant la puissance et l'exposant,  $a = \sqrt[n]{A}$ .

$A$  s'appelle radicaude,  $n$  indice et  $a$  racine.

7° *Extraction de logarithme* : C'est la recherche de l'exposant connaissant la puissance et la base.

$A$  est la puissance,  $a$  la base et  $n$  le logarithme,

$$n = \log_a A.$$

Ces deux opérations (6° et 7°) ne sont possibles entre nombres entiers que de façon exceptionnelle. Il est bon d'indiquer dès ce début, la septième opération que beaucoup d'élèves ignorent, opération qui, convenablement généralisée, introduira les logarithmes pratiques.

Paul JEANGIRARD,

ancien élève de l'E.N.S., rue d'Ulm,  
professeur agrégé à l'E.N. d'Orléans.

(A suivre).