

Sur le vocabulaire et les définitions

Les propositions de G. THOVERT (Lyon) et de sa section (N° 128) sont intéressantes. J'ai utilisé, pour ma part, le vocabulaire suivant :

A) Les transformations ponctuelles qui conservent les longueurs (et qui, par suite, changent droite en droite, plan en plan) se classent en deux catégories :

1° les *déplacements* : en géométrie rectiligne, étant donnés deux points A et B et leurs homologues A' et B', les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ ont le même sens : en géométrie plane, étant donnés trois points A, B, C formant triangle et leurs homologues, l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ de ce triangle a le même sens que l'angle homologue : en géométrie spatiale, étant donnés quatre points A, B, C, D formant tétraèdre et leurs homologues, le dièdre $(\overrightarrow{AB}, C, D)$ de ce tétraèdre a le même sens que le dièdre homologue ;

2° les *antidéplacements* : dans chacune des trois géométries, l'élément mesurable fondamental a un sens contraire à celui de son homologue.

Deux figures qui se correspondent par déplacement sont dites *égales* ; deux figures qui se correspondent par antidéplacement sont dites *contraires* (Exemple : une main droite et une main gauche).

[La suppression du mot déplacement ne semble pas opportune parce que si ce mot est lié à une difficulté, ce n'est pas en supprimant le mot qu'on supprimera la difficulté (celle-ci subsiste d'ailleurs dans l'emploi des mots : translation, rotation, vissage). Conserver le mot, c'est s'obliger à ne pas éluder la difficulté, à montrer une certaine équivalence du sens ancien du mot à son sens nouveau. Dans les applications, l'élève aimera toujours se

représenter que deux figures égales (au sens nouveau) sont deux figures superposables par déplacement-mouvement].

Le produit de deux déplacements est un déplacement, etc... Notation : déplacement (D) ; antidéplacement (— D).

Tout antidéplacement rectiligne a un point invariant et échange les deux demi-droites de ce point ; tout antidéplacement plan a une droite invariante, trace sur celle-ci un déplacement et échange ses deux demi-plans ; tout antidéplacement spatial a un plan invariant, trace sur celui-ci un déplacement et échange ses deux demi-espaces.

Les trois symétries, pour lesquelles aucun néologisme ne paraît indispensable et que l'on peut appeler tout bonnement : *symétrie-point*, *symétrie-droite*, *symétrie-plan* (notation : S_A , S_D , S_P) sont, suivant le nombre n des dimensions de l'espace euclidien étudié, soit des déplacements, soit des antidéplacements. Elles s'introduisent naturellement en cherchant dans chacune des géométries n^{es} 1, 2, 3, les déplacements et antidéplacements qui sont réciproques ; cette qualité les caractérise, en sorte qu'une définition générale du mot symétrie peut être la suivante : tout déplacement ou antidéplacement réciproque.

B) Les transformations ponctuelles qui conservent le rapport des longueurs se classent en deux catégories :

1° Les *similitudes* : produit d'une homothétie positive par un déplacement.

2° Les *antisimilitudes* : produit d'une homothétie positive par un antidéplacement.

L'homothétie négative, produit d'une homothétie positive par une symétrie-point est une antisimilitude dans les espaces impairs (où la symétrie-point est un antidéplacement).

Toute antisimilitude rectiligne a un point invariant et échange les deux demi-droites de ce point ; toute antisimilitude plane a une droite invariante, trace sur elle une similitude et échange ses deux demi-plans ; toute antisimilitude spatiale a un plan invariant, trace sur lui une similitude et échange ses deux demi-espaces.

L'avantage d'étudier successivement les trois géométries : rectiligne, plane, spatiale, est de faire apparaître certaines généralisations et aussi de montrer que chacune d'elles a sa dualité propre (figures de sens contraires), la contradiction ainsi posée se trouvant résolue par inclusion dans un espace supérieur (deux figures contraires y deviennent égales). Plutôt que de distinguer les trois géométries, on peut se placer d'emblée dans l'espace (1) $n = 3$. Les antisimilitudes rectilignes et planes y deviennent alors des similitudes particulières. On les qualifie parfois d'indirectes (ou d'inverses), ce qui redonne à la droite et au plan considérés une certaine autonomie. Mais

(1) Celui-ci étant orienté (par le choix d'un trièdre $orxyz$), sur chaque plan on peut distinguer deux faces, qui correspondent à ses deux sens d'orientation propres.

l'expression « *déplacement indirect* » dans un plan, par exemple. n'en est pas moins un peu ambiguë, car, ou bien le plan a une réelle autonomie et alors le « *déplacement indirect* » n'y est pas un déplacement au sens vulgaire du mot ; ou bien le plan n'est considéré que comme partie de l'espace et alors le déplacement spatial particulier envisagé n'a guère de raison d'être qualifié d'indirect. Un néologisme paraît donc ici utile.

On a proposé, pour $n = 3$, les mots : *renversement* (DARBOUX) et *retournement*. Celui-ci, qui évoque le retournement d'un gant, pourrait sans doute être appliqué aux géométries $n = 2$ et $n = 1$, de préférence à « *déplacement indirect* », mais il faudrait encore trouver un mot pour les antisimilitudes. Certes, le préfixe *anti* peut paraître d'autant plus désagréable qu'on en fait un abus dans le langage courant ; sa liaison avec déplacement et similitude peut être critiquée par les linguistes ; mais il nous devient pourtant familier en géométrie plane par le mot : *antiparallèle* (lequel est lié à un antidéplacement plan) ; et il aurait l'avantage de suggérer, dans tous les cas où il serait employé, l'idée d'un changement de sens dans l'élément métrique fondamental de l'espace étudié ; il contribuerait donc à une certaine unification du langage mathématique.

C) *Équivalence*. On peut désirer, avec G. THOVERT, la réhabilitation de cette notion, en conservant le mot et en lui donnant des applications variées : deux expressions, transformations, équations, conditions..., dans un certain domaine et pour une certaine fin (par exemple : définition d'un ensemble de nombres ou de figures) sont équivalentes si on peut les remplacer l'une par l'autre. Cette notion (qui est celle de réciprocité, et aussi celle d'égalité, d'une façon générale) a une valeur éducative à tous les degrés de l'enseignement ; elle exerce l'esprit de justesse de l'élève et si, on ose dire, son esprit de justice.

Deux équations équivalentes en Élémentaires ne le sont plus en Spéciales : voici pour l'élève l'occasion de mesurer ses progrès, de réviser certaines « vérités », de comprendre que les mots ont, en mathématiques comme ailleurs, un sens relatif et conventionnel, que les notions s'enrichissent et se perfectionnent. Comment comprendre l'intérêt des nombres complexes si on n'a pas commencé par croire à l'équivalence des équations $x^3 + 1 = 0$, $x + 1 = 0$? On peut proposer le principe suivant : l'enseignement (2) d'ordre n ($n > 1$) ne doit pas chercher à imposer ses commodités et scrupules à l'enseignement d'ordre $n - 1$.

En géométrie, on pourrait, à côté de *théorèmes d'existence*, chercher à énoncer, après double démonstration, des *théorèmes d'équivalence*. Exemples :

Pour un triangle, les conditions : avoir deux côtés égaux, avoir deux angles égaux, sont équivalentes.

Pour un angle ayant un côté parallèle à un plan de projection, les conditions : être droit, avoir une projection droite, sont équivalentes.

(2) Qui se défend souvent fort bien contre les intrusions de l'ordre $n + 1$.

Pour deux transformations ponctuelles les conditions : avoir un produit commutatif, être invariantes l'une dans l'autre, sont équivalentes. (Dire qu'un produit est commutatif, c'est dire que les expressions ab et ba sont équivalentes).

Ainsi seraient supprimées les difficultés dont se plaignent plusieurs d'entre nous relatives à l'emploi conjugué des adjectifs : *nécessaire* et *suffisant*. Ces mots ne sont d'ailleurs pas à proscrire : on pourrait chercher d'abord à ne les utiliser que dans le cas d'une condition nécessaire, mais non suffisante, ou suffisante, mais non nécessaire : ainsi les élèves seraient amenés à en distinguer le sens. Notons que la rédaction : « A et B sont équivalents », supprime dans certains cas l'embarras du choix entre deux rédactions : « Pour que A soit, il faut et il suffit que B soit » ; « pour que B soit, il faut et il suffit que A soit ».

D) *Puissance d'un point A par rapport à un cercle (C)*. Les élèves de Spéciales seront très satisfaits de la notation $C(A)$, bienvenue en géométrie analytique, mais ceux d'Elémentaires, habitués à donner au point une priorité sur le cercle, s'accorderont mieux de la notation $A(C)$, ou de la notation $P_A(C)$ ($= \overline{AM} \cdot \overline{AN}$).

Lignes trigonométriques. En Troisième, on peut parler de *rapports trigonométriques* d'un angle aigu. En Première, on peut parler de *lignes trigonométriques* d'un arc : étymologiquement, ligne signifie droite (exemple : fonction linéaire) ou segment, et rappelle l'idée essentielle que l'identification d'un arc est d'abord ramenée à la mesure de segments liés au cercle unité. En Elémentaires seulement on peut parler de *fonctions circulaires*.

A. CHAUVIN.
(Lycée Lakanal).