

Sur l'équivalence de deux lieux géométriques

Voici encore une démonstration de l'équivalence établie par MM. POCHARD, DONTOT et Mme AYRAULT (*Bulletins* n^{os} 119, 120, 121) :

1^o Soient un point F et une droite (D) ; H la projection de F sur (D). Soit M un point, ni en F, ni sur (D) tel que :

$$\frac{MF}{MK} = e \quad e \neq 1$$

K étant la projection de M sur (D).

Le cercle circonscrit au triangle MKF recoupe (D) en T et a pour diamètre MT. Soit I la projection de F sur MT et E sa projection sur MK. D'après le théorème de Simson les points I, E, H sont alignés. Le point double de la similitude qui transforme M en I et K en H se trouve sur le cercle circonscrit au triangle MIE, c'est-à-dire sur le cercle (C) de diamètre MF, dont le centre est le milieu C de MF, et sur le cercle circonscrit au triangle EKH, lequel passe par F car EKFH est un rectangle. Ce point double est donc F ; par suite on a :

$$\frac{MF}{IF} = \frac{MK}{IH} \quad \text{ou} \quad \frac{IF}{IH} = \frac{MF}{MK} = e.$$

I est donc sur le cercle (O) de centre O dont les extrémités de diamètre AA' divisent FH dans le rapport e (son centre O est défini par : $\frac{OF}{OH} = e^2$).

De plus on a :

$$OI^2 = OA^2 = OF \cdot OH$$

$MF^2 = MI \cdot MT$, car le triangle MFT est rectangle en F, ce qui prouve que les droites OI et MF sont tangentes en I et M respectivement au cercle de diamètre FT. Leur point d'intersection est donc sur la médiatrice de IF : c'est le point C milieu de MP ; il en résulte que le cercle de diamètre MF est tangent en I au cercle (O).

2^o Réciproquement, soit (O) un cercle de centre O de rayon a et F un point non situé sur (O), ni en O, tel que $OF = c$; AA' le diamètre de (O) passant par F. Soit M un point tel que le cercle (C) de diamètre MF, de centre c, milieu de MF, soit tangent en I à (O).

Désignons par K et H les projections respectives de M et F sur la polaire (D) de F par rapport à (O) ; T étant le point d'intersection de MI avec (D), le cercle de diamètre FT passe par H et I. Comme on a :

$$OI^2 = OA^2 = OF \cdot OH$$

OI est tangente en I au cercle de diamètre FT. Or c, milieu de MF, est sur OI et sur la médiatrice de IF, par suite CF, c'est-à-dire MF, est tangente en F au cercle de diamètre FT. Il en résulte que le cercle de diamètre MT, qui passe par K, passe également par F. La projection E de F sur MK est donc, d'après le théorème de Simson, alignée avec I et H. Comme on l'a démontré dans 1^o, on a :

$$\frac{MF}{MK} \equiv \frac{IF}{IH} = \sqrt{\frac{\overline{OF}}{\overline{OH}}}$$

Or

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{OF}^2}{\overline{OF} \cdot \overline{OH}} = \frac{\overline{OF}^2}{\overline{OA}^2} = \frac{c^2}{a^2}$$

$$\frac{MF}{MK} = \frac{c}{a}$$

Il y a donc équivalence entre les deux lieux suivants :

« Lieu des points dont le rapport des distances à un point et à une droite est constant » et

« Lieu des points tels que les cercles ayant pour extrémités de diamètre un de ces points et un point fixe soient tangents à un cercle fixe », ce qui permet de passer pour les coniques à centre de la définition : (foyer, directrice) à la définition : (foyer, cercle principal).

J. LEGRAND
(Lycée de Biarritz).