

Unification des définitions de mots et notations mathématiques

Définitions et vocabulaire

par G. THOVERT (Lyon-Ampère)

Les suggestions relatives à l'égalité et la similitude sont personnelles ; les autres ont été discutées et généralement adoptées par la section de Lyon.

Egalité. — Je propose les définitions suivantes :

Egalité (absolue). — Correspondance ponctuelle dans laquelle tout élément simple (angle, segment) est égal à son correspondant.

L'égalité absolue des éléments simples est une notion axiomatique.

Egalité directe. — Lorsque, en plus, deux éléments orientés correspondants sont « de même sens » (angle pour la géométrie plane, trièdre pour la géométrie spatiale).

Antiégalité. — Lorsque, en plus, deux éléments orientés correspondants sont « de sens contraires ».

Ainsi, le mot « égalité » coifferait à la fois l'égalité directe et l'antiégalité. Seule l'égalité directe, qui est transitive, conduirait à la notion de mouvement (l'antiégalité est alternative).

Je demande l'exclusion du mot *déplacement* comme synonyme d'égalité directe ; ce mot évoque d'une façon trop impérieuse l'idée de mouvement dans l'esprit des élèves.

Je demande qu'on accepte l'expression de *figures égales* en géométrie spatiale, dans le sens absolu, même si elles sont antiégales. La condition qui oppose l'égalité directe à l'antiégalité (disposition des trièdres) étant « extérieure » à l'idée d'égalité absolue.

Symétries. — Il résulte de ce qui précède que l'expression *figures symétriques* doit être abandonnée pour désigner des figures spatiales antiégales.

Des propositions ont été faites (section de Lyon) pour donner un nom particulier à chaque symétrie : par exemple *opposition* pour la symétrie autour d'un point ; *retournement* ou *transposition* pour la symétrie autour d'une droite ; *réflexion* (idée du miroir) pour la symétrie autour d'un plan.

Mais cela n'empêche pas qu'une symétrie est tantôt une égalité directe, tantôt une antiégalité, suivant le cadre dimensionnel. En géométrie rectiligne, l'opposition est une antiégalité ; elle devient une égalité directe en géométrie plane, et de nouveau est une antiégalité en géométrie spatiale. Alternatives analogues pour les autres symétries.

Similitude. — Vocabulaire correspondant logiquement à celui des égalités.

Similitude (absolue). — Correspondance ponctuelle dans laquelle un angle ou un trièdre est égal (sens absolu) à son correspondant, et où un segment est un multiple déterminé de son correspondant.

Similitude directe. — Lorsque, en plus, deux angles ou deux trièdres orientés correspondants sont de « même sens ».

Antisimilitude. — Lorsque deux angles ou deux trièdres correspondants sont « de sens contraires ».

La similitude directe reste dans tous les cas le produit d'une égalité directe par une homothétie positive. Les autres combinaisons (avec l'homothétie négative) dépendent du cadre dimensionnel.

Transformations d'équations (ou d'inéquations). — Tous les membres de la section de Lyon sont d'accord pour demander le rétablissement de la *notion d'équivalence*. Un certain nombre sont d'accord avec moi pour appeler cette notion *équisolvence*.

Ce changement de vocabulaire est destiné à éviter l'attraction du mot *équivalent*, qui ne doit s'appliquer qu'aux expressions. Les élèves disent trop souvent qu'une équation est *égale* à une autre.

Il est entendu que la notion d'équisolvence est *relative* à un *cadre numérique*. Les équations $x - 1 = 0$ et $x^2 - 1 = 0$ sont équisolventes dans le cadre des nombres absolus ; elles ne le sont plus dans le cadre des nombres relatifs. Dans ce dernier, $x - 1 = 0$ et $x^3 - 1 = 0$ sont équisolventes ; elles ne le sont plus dans le cadre des nombres complexes.

Une membre de la section, LESPINARD (Lyon-Parc), propose d'appeler *transformation régulière* celle qui transforme une équation en une autre équisolvente, et *irrégulières* les autres transformations. Naturellement, une transformation irrégulière conserve peut-être toutes les solutions, mais pas forcément ; elle doit donc s'accompagner soit d'un contrôle, soit d'une analyse théorique.

Propositions diverses. — Appeler *angle de direction* le nombre relatif module π désigné actuellement sous le nom d'*angle de droite*. La direction est en effet la qualité commune à toutes les droites d'une famille de parallèles.

Pour les angles module 2π , l'expression *angles de vecteurs* semble trop particulière, car elle exclut les angles de semi-droites. Un membre de la section a proposé *angle de flèche*, expression intéressante, surtout que certains ont l'habitude de placer une flèche au-dessus, ou même au-dessous, de la notation d'une semi-droite.

Remplacer l'expression *angles correspondants* par *angles transplacés*, afin de libérer le mot correspondant dans son sens grammatical (le mot homologue devrait être localisé pour la correspondance par homologie).

L'A.P.M. a déjà conseillé l'emploi du mot *facette* pour les solides : le mot *face* reste encore ambigu. Je demande de le réserver pour les angles polyèdres, et de dire les *volets* d'un dièdre.

Distinguer expressément le *nombre dérivé* (d'une fonction pour une *valeur particulière* de la variable) et la fonction dérivée.

Les élèves mélangent souvent (par négligence), les mots *développer* et *décomposer*. On pourrait appuyer sur l'idée de produit de facteurs en employant le mot *factoriser* (proposition GLAESER, Lyon-Saint-Rambert). L'expérience, faite cette année à Ampère et à Saint-Rambert, est très encourageante.

Enfin, je demande que l'on revienne sur le mot « algébrique » pour le localiser dans le sens familier d'emploi des lettres (expression algébrique opposée à expression numérique, etc...). Je redemande l'adoption de *nombre relatif* à la place de « nombre algébrique » (terme utilisé par TANNERY dans ses leçons d'Algèbre et d'Analyse).

Note du Rapporteur

Voici venir l'Assemblée générale de 1949. Cette perspective me rappellerait, si je l'avais oublié, que je dois fournir un rapport sur les modifications à apporter à notre vocabulaire mathématique. Bien maigre est le nombre de ceux qui m'ont écrit depuis Pâques 1948. Cependant, je vais vous faire part des suggestions qui me sont parvenues, afin que nous puissions en discuter lors de notre prochaine réunion.

Tout d'abord, une question que l'on désire voir résolue est celle des notations des *arcs orientés*. Dans mon précédent rapport, j'avais fait des propositions, que je rappelle, car un accident typographique les a déformées (*Bulletin* n° 124) :

$\overrightarrow{AB}$, arc orienté, élément géométrique ;

$\widehat{AB}$, mesure algébrique de l'arc orienté sur un cercle orienté, une unité d'arc étant choisie ;

arc AB , module de l'arc orienté, nombre arithmétique.

La première notation est même peut-être superflue, puisque nous ne considérons habituellement que des arcs appartenant à un même cercle ou à des cercles égaux.

Liée à cette première question, nous trouvons celle concernant les notations à adopter pour les *angles orientés*. S'il est aisé de forger un symbole pour les êtres géométriques, par exemple (D, D') pour l'angle orienté de la droite D' avec la droite D , dans un plan orienté, il n'en va pas de même pour les mesures algébriques et j'ai montré la lourdeur d'un symbole tel

que $\overrightarrow{AB}, \widehat{A'B'}$ pour représenter la mesure algébrique de l'angle orienté du

vecteur $A'B'$ avec le vecteur AB . Ne pourrait-on pas convenir alors de prendre le symbole $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ pour désigner celle-ci, et de remplacer les parenthèses par des barres pour le module d'un tel angle ?

Il m'a été signalé de divers côtés qu'une uniformisation des notations en *géométrie vectorielle* apparaît nécessaire. En premier lieu, on propose de réserver le mot de *résultante* pour les systèmes de vecteurs équivalents à un vecteur unique et de donner le nom de *somme vectorielle* à la somme géométrique de ces vecteurs dans les autres cas. Ensuite, il paraît nécessaire de revenir sur la notation des divers produits de vecteurs. Voyez-vous un inconvénient à utiliser les symboles suivants :

$\vec{u} \cdot \vec{v}$: produit *scalaire* des vecteurs u et v ;

$\vec{u} \wedge \vec{v}$: produit *vectoriel* du vecteur u par le vecteur v ;

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = [(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}]$: produit *mixte* des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$?

Au sujet du vocabulaire des *transformations ponctuelles*, point délicat sur lequel notre Association s'est penchée depuis de nombreuses années, les propositions fermes sont assez rares. Pourtant, de l'avis de ceux qui m'ont écrit sur cette question, il y a urgence à adopter un langage uniforme, si l'on veut éviter à nos élèves des confusions. Suivant les auteurs de manuels scolaires, nous rencontrons en effet comme synonymes de *symétrie par rapport à une droite*, les expressions *demi-tour*, *transposition*, *retournement*, chacun présentant des avantages et des inconvénients. Comme il va falloir finalement choisir, lequel proposez-vous et quelles sont les raisons de votre choix ?

Mes collègues ont lu d'autre part les intéressantes propositions de M. THOVERT, sur lesquelles je serais heureux de connaître leurs réactions. Je vous demande donc de m'adresser, dès que possible, vos suggestions, vos critiques, vos propositions, que je m'efforcerai de classer pour les présenter à la discussion générale, lors de notre prochaine Assemblée du 10 avril.

Je remercie d'avance tous ceux qui voudront bien me faire l'honneur de m'écrire.

Le Rapporteur : A. MONJALLON.