

DEUXIÈME PARTIE (1)

Sur les nombres algébriques

Sous le titre « Présentation de l'Algèbre » notre collègue CHAUVINEAU a étudié la distinction entre les sens « opératoires » et « prédicatoires » des signes $+$ et $-$ de l'Algèbre. Voici quelques réflexions :

Notre remarque fondamentale est la suivante : toutes les règles et propriétés de l'addition et de la soustraction des nombres algébriques existent implicitement dans les théorèmes d'arithmétique relatifs à l'addition et à la soustraction.

Bornons-nous à signaler quelques exemples :

La règle de calcul, l'addition et la soustraction des polynômes arithmétiques.

Le théorème d'arithmétique suivant : un polynôme arithmétique possède la propriété de commutativité à condition de conserver à chaque terme son caractère additif ou soustractif.

Cet énoncé, comme les autres, est prêt à recevoir le langage de l'Algèbre, — nous insistons : l'Algèbre n'est nouvelle que par le langage —, il permet, de plus, des extensions (soustractions possibles toujours).

Mis en parallèle, un cours d'arithmétique et un cours d'Algèbre sont les traductions des mêmes propriétés en deux langages distincts.

Un cours d'Algèbre naturel est celui qui greffe au bon moment les symboles de l'Algèbre sur les propriétés de la soustraction arithmétique. Ainsi, le nombre négatif peut être présenté de la façon suivante, par exemple : L'écriture $10 + (3 - 8)$ n'a pas de sens, mais elle en acquiert un si l'on applique formellement le théorème :

$$\begin{aligned} a + (b - c) &= a - (c - b), \\ 10 + (3 - 8) &= 10 - (8 - 3). \end{aligned}$$

Admettre cette écriture équivaut à poser la définition :

$$\begin{aligned} 3 - 8 &= -(8 - 3), \\ 10 + (-5) &= 10 - 5. \end{aligned}$$

et alors :

(1) Adresser, soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4^e), toute communication destinée à la Deuxième Partie du *Bulletin*.

Par cette présentation, un nombre négatif est un nombre à « retrancher », de même un nombre positif est, et reste, un nombre à ajouter. On peut même dire, si ce n'est pas trop peu orthodoxe : un nombre négatif est l'indication d'une soustraction dont le premier terme est vacant.

Distinguer des sens, tantôt opératoires, tantôt prédicatoires, pour les symboles $+$ et $-$ semble alors artificiel. D'ailleurs, notre collègue a bien dit que cette distinction était momentanée (et tout le monde le sait). Si on peut l'éviter au début, elle peut disparaître.

Elle paraît tenir surtout à une commodité pédagogique vis-à-vis d'élèves qui ignorent l'enchaînement logique des propriétés de l'arithmétique ; il est plus facile de définir *à priori* le nombre algébrique que de le faire émerger de l'arithmétique où il se trouve pourtant déjà en gestation. Ajoutons que s'il est un cas où le sens purement prédicatif du signe $+$ ou $-$ est imposé, c'est dans le « nombre algébrique repérage » (température par exemple), mais ce dernier est impropre à subir les opérations d'addition et de soustraction.

SIROS (*Lakanal*).

Réponse de M. Chauvineau

Il est parfaitement loisible et théoriquement très satisfaisant de donner une définition formelle des nombres algébriques. Aux différences *à priori* sans signification qui se présentent en arithmétique, on conviendra d'attribuer un sens. Dans cette perspective, le nombre *positif* apparaîtra comme *nombre arithmétique ajouté au zéro* et le *nombre négatif* comme *nombre arithmétique retranché du zéro*, de sorte qu'en sous-entendant le zéro initial il sera naturel de les écrire d'emblée $+8$ et -8 . Ce seront là des symboles purement formels, des « nombres imaginaires », qui n'auront d'autre justification que d'autoriser une extension toute gratuite du champ opératoire de l'arithmétique. Il restera à montrer comment ces nombres sont applicables à la mesure adéquate des grandeurs orientées ; comment ils sont capables de schématiser des expressions telles que « 8 à droite, -8 à gauche », « 8 après, -8 avant » ; comment ils permettent de repérer un point sur une dimension d'espace ou un instant sur la dimension de temps. Autrement dit, il restera à manifester, dans le symbole *formel*, un contenu *réel*. Si donc une présentation de ce genre dispense de recourir à un signe *provisoire* propre, elle oblige à manipuler une notion *provisoirement* imaginaire. N'est-ce point là une voie trop abstraite pour s'y engager dans une classe de Seconde ?

J. CHAUVINEAU.

Remarques historiques. — Au point de vue historique, il ne paraît pas douteux que le nombre négatif a été créé pour rendre toujours possible la soustraction. Les calculateurs hindous du VII^e siècle ne s'embarassaient pas de difficultés logiques, et on connaît leur formule (Bhrama Gupta, par exemple : une dette retranchée de zéro devient un bien, un bien retranché de zéro devient une dette).

On retrouve là une tendance générale, que le mathématicien Hankel a traduite par sa loi de « permanence » (Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze). Et Dedekind écrivait : « C'est la limitation imposée à l'exécution des opérations indirectes qui a été, chaque fois, la cause d'un acte de création nouveau ; c'est de cette manière que les nombres négatifs et les nombres fractionnaires ont été créés. »

Mais cette généralisation intuitive ne va pas sans difficultés et arrive un moment où s'impose le besoin de rigueur. Les remarques de nos collègues nous rappellent les discussions sans fin auxquelles donnèrent lieu les nombres négatifs pendant tout le XVIII^e siècle. D'Alembert écrivait, dans *L'Encyclopédie* : « Quand on considère l'exactitude et la simplicité des opérations algébriques sur les quantités négatives, on est tenté de croire que l'idée précise qu'on doit attacher aux quantités négatives doit être une idée simple, et n'être point déduite d'une métaphysique alambiquée. On doit remarquer que les quantités négatives, qu'on regarde faussement comme au-dessous de zéro, sont très souvent représentées par des quantités réelles, comme dans la géométrie, où les lignes négatives ne diffèrent des positives que par leur situation à l'égard de quelque ligne. Les quantités négatives indiquent réellement, dans le calcul, des quantités positives, mais qu'on a supposées dans une fausse position. Le signe — devant une quantité sert à redresser et à corriger une erreur faite dans l'hypothèse. Il n'y a donc pas réellement et absolument de quantité négative isolée. »

On en arrivait alors à cette conclusion, qui nous surprend, que les nombres négatifs ne sont pas « classables », et en particulier qu'ils ne sont pas inférieurs à zéro. D'Alembert donnait le raisonnement suivant :

« On a évidemment $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$.

Si l'on admettait que -1 est inférieur à zéro, donc à *fortiori* à 1, il faudrait admettre que 1 est inférieur à -1 (d'après le premier membre de l'égalité). »

A. H.