

III. Documents officiels

Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques)

au Concours général des Lycées et Collèges en 1948

ANALYSE DU SUJET : 1° On considère le cercle inscrit (I) à un triangle ABC (centre I, rayon r) et les points de contact α , β , γ de (I) avec les côtés BC, CA, AB. Etablir qu'il existe une conique (E), de foyer I, tangente à $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ et qu'il y a une infinité de triangles inscrits dans (I) et circonscrits à (E).

Les points α , β , γ sont intérieurs aux segments respectifs BC, CA, AB (par exemple α est entre B et C, du fait que les angles IBC et ICA sont aigus). Les segments $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ ont comme médiatrices respectives IA, IB, IC. A noter que les angles intérieurs du triangle $\alpha\beta\gamma$ sont tous *aigus* : par exemple $\widehat{\beta\alpha\gamma} = \pi - \widehat{\beta\alpha C} - \widehat{\gamma\alpha B} = \frac{\pi}{2} - \widehat{\beta\alpha C} + \frac{\pi}{2} - \widehat{\gamma\alpha B} = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}$ (A, B, C, angles intérieurs du triangle ABC).

Le cercle principal de la conique dont il s'agit (si elle existe), devant contenir les projections de I sur les côtés du triangle $\alpha\beta\gamma$, soit les milieux α' de $\beta\gamma$, β' de $\gamma\alpha$, γ' de $\alpha\beta$, ne peut être que le cercle d'Euler du triangle $\alpha\beta\gamma$.

Le Jury était composé de M. ROBERT, inspecteur général, président ; de Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (Fontenay) au lycée Fénélon ; de MM. DURIX, professeur de Mathématiques Supérieures au lycée Jacques-Decour ; KÉROMEN, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au lycée Louis-le-Grand ; PICARDAT (René), professeur de Mathématiques Spéciales au Collège Chaptal ; POUGNAND, professeur de Mathématiques Spéciales (Centrale) au lycée Buffon.

En conséquence soit (E) la conique ayant comme cercle principal (ω) le cercle d'Euler en question (dont le rayon est moitié de celui du cercle $\alpha\beta\gamma$, soit $\frac{r}{2}$) et ayant I comme foyer. Son centre ω est celui de (ω) ; son second

foyer F est le symétrique de I par rapport à ω , c'est-à-dire, d'après une propriété de la droite d'Euler du triangle $\alpha\beta\gamma$, l'orthocentre du triangle $\alpha\beta\gamma$. Les angles de ce triangle étant aigus, cet orthocentre F est *intérieur* au triangle $\alpha\beta\gamma$, et, à *fortiori* au cercle (I).

Le cercle directeur de (E) ayant pour centre son foyer I a un rayon double du cercle (ω), soit r , c'est donc le cercle (I). F étant intérieur à ce cercle, (E) est une *ellipse*. Les projections de I sur les droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ étant les points α' , β' , γ' de (ω), ces droites sont tangentes à (E). (E) est par rapport à chacune de ces tangentes du même côté que son second foyer F, d'où la conclusion que (E) est *inscrite* au triangle $\alpha\beta\gamma$.

Les symétriques de F par rapport à $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, que nous désignons par L, M, N, sont des points du cercle directeur (I) de (E). Comme F est orthocentre de $\alpha\beta\gamma$, on retrouve ici une propriété classique de l'orthocentre : les hauteurs du triangle $\alpha\beta\gamma$ sont αFL , βFM , γFN .

Soit maintenant α_1 un point *arbitraire* sur (I) ; soit L_1 le point de rencontre, autre que α_1 de la droite $F\alpha_1$ avec (I) ; la médiatrice (Δ) de FL_1 coupe (I), car le pied de Δ sur FL_1 est le milieu de FL_1 point intérieur au cercle (I) : appelons β_1 et γ_1 les points, distincts, de rencontre de (Δ) avec (I). L'orthocentre du triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, d'après sa propriété rappelée plus haut, est nécessairement le symétrique de L_1 par rapport à (Δ), c'est donc F. Les symétriques M_1 et N_1 de F par rapport aux côtés $\alpha_1\gamma_1$ et $\alpha_1\beta_1$ sont situés sur (I). Donc les droites (Δ) (ou $\beta_1\gamma_1$), $\alpha_1\gamma_1$ et $\alpha_1\beta_1$ sont tangentes à l'ellipse (E). Il y a une infinité de triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ inscrits dans le cercle (I) et dont les côtés sont tangents à (E) : de manière précise, F étant intérieur à (I), il est intérieur à chaque hauteur de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, soit intérieur encore à ce triangle, et un tel triangle est, strictement, *circonscrit* à (E). Tous ces triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ayant en commun leur cercle circonscrit (I) et leur orthocentre F ont aussi en commun leur cercle d'Euler qui est (ω).

2° On passe du cercle principal (ω) de (E) au cercle (O) circonscrit au triangle ABC (centre O, rayon R) par une inversion de pôle I. *Indiquer son module : en déduire une relation entre $OI = d$ et les rayons R, r. Etablir qu'il existe une infinité de triangles inscrits dans (O) et circonscrits au cercle (I).*

α' est le pied sur AI de la polaire $\gamma\beta$ de A par rapport au cercle (I), d'où $\overline{I\alpha'} \cdot \overline{IA} = r^2$. L'inversion de pôle I, de module r^2 , transforme α' en A, et, de même, β' en B, γ' en C. Elle transforme le cercle (ω') passant par α' , β' , γ' en le cercle (O) passant par A, B, C.

La droite $I\alpha'$ coupe (O) en A (sur la demi-droite $I\alpha'$) et en un second point A' [sur la demi-droite opposée d'origine I, I étant *intérieur* à (O)]. Il existe une homothétie de centre I transformant (ω) en (O), son rapport

est $\frac{\overline{IA'}}{\overline{I\alpha'}}$, puisque α' a nécessairement comme homothétique A' . Il est *négatif*

et sa valeur absolue est $R : \frac{r}{2} = \frac{2R}{r}$. Ainsi

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{I\alpha'}} = -\frac{2R}{r}$$

D'autre part $\overline{IA} \cdot \overline{IA'} =$ puissance de I par rapport à (O) $= d^2 - R^2$.

$$\overline{IA} \cdot \overline{I\alpha'} = r^2$$

Il en résulte que $\frac{d^2 - R^2}{r^2} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IA'}}{\overline{IA} \cdot \overline{I\alpha'}} = \frac{\overline{IA'}}{\overline{I\alpha'}} = -\frac{2R}{r}$

ou

$$|R^2 - d^2 = 2Rr \text{ (I).}$$

A tout triangle $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ de (1°) correspondent comme milieux de ses côtés des points $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ du cercle d'Euler (ω) de $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ [si l'on préfère, ce sont les projections de I sur des tangentes à (E), donc des points de leur cercle principal (ω)]. L'inversion de pôle I et de module r^2 fait correspondre à $\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1$ des homologues A_1, B_1, C_1 situés sur (O). A_1 est aussi le pôle de $\beta_1\gamma_1$ par rapport au cercle (I), B_1 le pôle de $\gamma_1\alpha_1$ et la droite A_1B_1 est la polaire de γ_1 par rapport à ce cercle, soit la tangente à (I) en γ_1 : de même B_1C_1 et C_1A_1 sont tangents à (I) en α_1 et β_1 . Le triangle $A_1B_1C_1$ est inscrit dans (O) et ses côtés sont tangents à (I).

On peut choisir le point α_1 de (I) [qui détermine un triangle unique $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ayant les propriétés vues dans (1°)] de manière que le triangle $A_1B_1C_1$ correspondant formé par les tangentes à (I) en $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, ait comme sommet un point *arbitraire* de (O) : il suffit d'étudier à cet effet la correspondance entre A_1 et α_1 : on passe de A_1 à α'_1 par l'inversion (I, r^2) et on passe de α'_1 à α_1 par une homothétie de rapport -2 , celle qui transforme le cercle d'Euler (ω) d'un quelconque des triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ en le cercle circonscrit (I) à ce triangle : $\overline{F\alpha_1} = -2\overline{I\alpha'}$; le centre de cette homothétie est le centre de gravité G commun à tous les triangles $\alpha_1\beta_1\gamma_1$, défini par $\overrightarrow{GF} = -2\overrightarrow{GI}$.

Le cercle (I) étant évidemment intérieur au cercle (O), les points $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont intérieurs aux segments respectifs BrC_1, C_1A_1, A_1B_1 et (I) est le cercle *inscrit* (et non un cercle *ex-inscrit*) au triangle $A_1B_1C_1$. Autrement dit chaque triangle $A_1B_1C_1$ est strictement *circonscrit* au cercle (I).

3° Les cercles (O) et (I) étant fixes et liés par la relation (I) on fait varier le triangle ABC inscrit dans (O) et circonscrit à (I). A', B', C' étant les points de rencontre, autres que A, B, C des droites AI, BI, CI avec (O), quels sont les centres des cercles IBC, ICA, IAB ? Trouver l'enveloppe des cercles IB'C', IC'A', IA'B' ; celle des droites B'C', C'A', A'B'. Prouver que les droites A'A, B'B, C'C concourent en un point fixe Σ .

Par hypothèse (1) est vérifiée ; remarquons que $R^2 - d^2$ est positif, d'où $d < R$. Le point I est intérieur donc au cercle (O) : définissons le cercle (ω) transformé de (O) dans l'inversion (I, r^2) : I est aussi intérieur au cercle (ω) [sinon une tangente menée de I à (ω) devrait être aussi tangente à (O), ce qui est impossible]. (ω) est aussi homothétique de (O) par rapport au centre I, dans un rapport d'homothétie qui est :

$$\frac{\text{module de l'inversion}}{\text{puiss. de I p. rapp. à (O)}} = \frac{r^2}{d^2 - R^2}.$$

Ce rapport d'après (1) est aussi $\frac{r^3}{-2Rr} = \frac{r}{-2R}$.

Le rayon de (ω) est donc $R \times \left| \frac{-r}{2R} \right| = \frac{r}{2}$.

Soit (E) la conique de foyer I, de cercle principal (ω) : I étant intérieur à (ω) c'est une ellipse. Son cercle directeur de centre I a pour rayon r , c'est donc (I). Soit F le second foyer de l'ellipse, symétrique de I par rapport à (ω). Il est intérieur au cercle directeur (I).

Dans ces conditions, on voit comme plus haut qu'à un point quelconque de (I), appelé ici α au lieu de α_1 , correspond une médiatrice (Δ) de FL [L étant le second point de rencontre de F α avec (I)], qui est le côté $\beta\gamma$ d'un triangle $\alpha\beta\gamma$ inscrit dans (I), d'orthocentre F et circonscrit à (E). Il est inutile de reproduire (sinon de repenser) des raisonnements déjà faits dans (1°). Au triangle $\alpha\beta\gamma$ correspond, comme vu dans (2°) un triangle ABC formé par les tangentes en α , β , γ à (I) dont les sommets sont sur (O).

Remarque : Ici il y a lieu de justifier que le cercle (I) est complètement intérieur à (O) : on peut le vérifier, en utilisant la relation (1), mais ce fait résulte de ce que tout point de (O) est une position possible de A, comme vu dans (2°) : donc de tout point du cercle (O) on peut mener deux tangentes distinctes A β et A γ à (I) : ce ne pourrait être le cas si le cercle (O) était sécant à (I) ou intérieur à (I). Le cercle (O) et le cercle (I) n'ont pas non plus la position de cercles extérieurs, sans quoi le centre I de (I) serait extérieur à (O). Bref, toutes les positions de la figure variable ABC $\alpha\beta\gamma$ ont des propriétés semblables à celles de la figure donnée dans 1°.

AI étant bissectrice de BAC, le point A' est le milieu de l'arc du cercle (O) intercepté par cet angle. On a déjà noté que A' est homologue de α' dans l'homothétie de centre I et de rapport $-\frac{2R}{r}$, qui transforme (ω) en (O), et que α' est homothétique de α dans une homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, qui transforme (I) en (ω). A' est donc homothétique de α dans l'homothétie produit de la seconde homothétie par la première, qui transforme (I) en (O). Cela résultait du parallélisme évident de I α avec OA' (médiatrice de BC), mais il est précisé, par le raisonnement précédent, que le rapport d'homothétie de l'homothétie produit est algébriquement égal

à $\frac{R}{r}$ (soit positif). La droite $\alpha A'$ passe donc par le centre d'homothétie positive de (I) et (O), soit Σ . C'est un point fixe de la droite OI. De même $\beta B'$ et $\gamma C'$ passent par Σ (point fixe).

Le triangle $A'B'C'$ apparaît comme homothétique du triangle $\alpha\beta\gamma$ dans l'homothétie $(\Sigma, \frac{R}{r})$. De plus IA' et $F\alpha$ étant tous deux perpendiculaires à

$\beta\gamma$ sont parallèles, et ces vecteurs sont homologues dans cette homothétie ; la droite OIF Σ étant inchangée par elle, l'homothétique de F est donc I. Comme F est l'orthocentre de $\alpha\beta\gamma$, I est aussi l'orthocentre du triangle $A'B'C'$. (C'est d'ailleurs une propriété assez classique du triangle ABC et des points A', B', C' que l'on peut établir directement).

Le symétrique de I par rapport à $B'C'$ est le point de rencontre autre que A' de IA' avec (O) qui n'est autre que A. Ainsi $B'C'$ est médiatrice de IA , et de même $C'A'$ et $A'B'$ sont médiatrices respectives de IB et IC.

Le point A', commun aux médiatrices de deux des côtés IB, IC du triangle IBC, est le centre du cercle (IBC) (propriété connue dès la classe de Seconde). Les centres des cercles IBC, ICA, IAB sont ainsi A', B', C'.

L'enveloppe commune des droites $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ est maintenant immédiate : c'est la conique de foyer I et de cercle directeur (O) [toute entière, car le lieu de A est le cercle (O) tout entier, comme on l'a vu]. Cette conique est une ellipse, puisque I est intérieur à (O).

Pour obtenir l'enveloppe du cercle $(IC'B')$, on pourrait le considérer comme inverse de l'enveloppe de BC [soit le cercle (I)] dans l'inversion de pôle I et de puissance $\overline{IB} \cdot \overline{IB'} = \overline{IC} \cdot \overline{IC'} = d^2 - R^2$. Mais, pour situer plus simplement les éléments de ce cercle inverse, il est plus simple d'observer que le rayon du cercle $IB'C'$ est R, puisque ce cercle est symétrique par rapport à $B'C'$ du cercle $A'B'C'$, c'est-à-dire (O). Quand BC prend toutes les positions possibles tangentes à (I), le cercle de rayon invariable $IB'C'$ tourne, par rotation, autour de I. Son enveloppe complète est constituée par le point fixe I et par le cercle de centre O et de rayon $2R$.

4° Montrer que les symétriques de la droite FI par rapport aux droites $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ passent respectivement par L, M, N et reconcourent le cercle (I) en un même point φ .

Le premier point est évident puisque L, M, N sont les symétriques de F par rapport à $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$.

Les droites symétriques de FI par rapport à $\beta\gamma$ et $\gamma\alpha$ ne sont pas parallèles, sans quoi $\beta\gamma$ et $\gamma\alpha$ seraient confondues ou rectangulaires, éventualités impossibles (l'angle $\alpha\gamma\beta$ est aigu). Désignons par φ leur point de rencontre.

On passe du point L au point M, et de la droite φL à la droite φM par l'opération produit des deux symétries d'axes $\beta\gamma$ et $\gamma\alpha$, prises dans cet ordre. Cette opération est une certaine rotation ayant pour centre le point γ d'intersection de ces axes : son angle de rotation est, d'une part $(\gamma\vec{L}, \gamma\vec{M})$: d'autre part, c'est un angle des droites homologues φL , φM . L'égalité de

ces angles entraîne que le point φ est sur le cercle circonscrit au triangle γLM (triangle isocèle puisque $\gamma L = \gamma M$) : donc φ est le point de rencontre de φL (autre que L en général) avec le cercle (I). On verrait de même que la symétrique de FI par rapport à $\alpha\beta$ coupe φL en un point défini de la même manière, qui est donc φ .

5° La droite $\beta\gamma$ coupant la droite FI en U , montrer que U et la projection orthogonale a de A sur FI sont deux points conjugués par rapport au cercle (I).

Démontrer que les droites $a\varphi$ et $I\alpha$ sont parallèles.

La première proposition résulte de ce que A a pour polaire la droite $\beta\gamma$ par rapport à (I) ; $\beta\gamma$ passe par U , donc A et U sont conjugués par rapport à (I) et la polaire de U passe par A ; c'est donc la perpendiculaire abaissée de A sur UI (c'est-à-dire IF) ; le point a est le pied de la polaire de U sur cette droite.

La droite $L\varphi$ symétrique de IFU par rapport à $\beta\gamma$, passe par U . Considérons l'inversion de pôle U et de module $\overline{UL} \cdot \overline{U\varphi}$ égal à la puissance de U par rapport à (I). Elle change (I) en lui-même, et change son centre I , comme il est bien connu, en le pied de la polaire de U par rapport au cercle transformé, qui n'est autre que le point a .

L et φ d'une part, I et a d'autre part, sont deux couples de points inverses, donc ces quatre points sont concycliques.

En conséquence les bissectrices des droites IL et $a\varphi$ ont mêmes directions que les bissectrices des droites $L\varphi$ et Ia .

Or, une des bissectrices, pour $L\varphi$ et Ia , est (par construction de $L\varphi$) la droite $\beta\gamma$; l'autre est perpendiculaire à $\beta\gamma$ et parallèle à la droite αFL .

Donc les droites IL et $a\varphi$ sont symétriquement inclinées sur $L\alpha$; comme le triangle $L I \alpha$ est isocèle, IL et $I\alpha$ sont aussi symétriquement inclinées sur $L\alpha$. Il en résulte le parallélisme de $a\varphi$ et $I\alpha$.

Remarques : L'énoncé guidait les concurrents par une voie légèrement différente de celle de la solution précédente, voie qui n'a été suivie par personne, alors que la solution se rencontre dans certaines bonnes copies. Mais la relation donnant $\overline{IU} \cdot \overline{aU}$, utilisée ci-dessus, semble avoir été justifiée dans le seul cas où U est extérieur à (I), ce que nous nous sommes ici abstenus de supposer.

On peut objecter au raisonnement précédent qu'il suppose U à distance finie, et que la méthode semble tomber en défaut dans le cas où $\beta\gamma$ serait parallèle à IF . Mais les conclusions restent vraies et sont immédiates dans ce cas : $\overrightarrow{a\varphi}$ est alors symétrique de $\overrightarrow{I\alpha}$ par rapport à I , a étant en I (les droites $I\alpha$ et $a\varphi$ sont confondues).

Il semble aussi que la méthode tombe en défaut quand le point U est sur (I), ce qui a lieu si l'un des points β ou γ est sur la droite IF . Dans ce cas a et φ lui-même coïncident avec U , la direction $a\varphi$ est indéterminée : la propriété de parallélisme de $I\alpha$ et $a\varphi$ n'est pas en défaut.

6° Comparer les angles orientés de droites (IO, IA) et (αI , $\alpha\varphi$), I étant le

milieu de BC. Etablir, en faisant intervenir 5° , que les triangles AOI et $\phi l \alpha$ sont directement semblables.

Par symétrie relativement à $\beta \gamma$, les droites FIO et $L\phi$ s'échangent donc les angles orientés de droites (FIO, FL) et ($L\phi$, LF) sont opposés. Ou encore, AI étant parallèle à $LF\alpha$

$$(IO, IA) = (FIO, FL) = (LF, L\phi) = (L\alpha, L\phi) \text{ (égalités à } k\pi \text{ près)}.$$

$\vec{al}$ est sur BC, tangente en α à (I), donc $(al, \alpha\phi) = (L\alpha, L\phi)$, à $k\pi$ près, dans le cercle (I).

Il résulte de là $(IO, IA) = (al, \alpha\phi)$ à $k\pi$ près.

Il y a une similitude directe bien déterminée du plan, soit (σ) , qui fait correspondre au vecteur $\vec{IA}$ le vecteur $\vec{\alpha\phi}$ (ici supposé *non nul*). L'égalité précédente d'angles de droites exprime que (σ) transforme la droite IOa en la droite al , soit BC.

OI étant médiatrice de BC, O se projette sur BC en l ; I se projette en α . La droite ϕa étant parallèle à $I\alpha$, les points ϕ et a ont la même projection, soit a_1 , sur BC.

La similitude (σ) transformant A en ϕ et la droite IOA en la droite BC, elle transforme la perpendiculaire Aa à IOA en la perpendiculaire abaissée de ϕ sur BC, c'est-à-dire en ϕa_1 . a_1 est ainsi l'homologue de a par (σ) . La considération des projections l, α, a_1 des points alignés O, I, a nous donne

(théorème de Thalès) : $\frac{\overline{IO}}{la} = \frac{\overline{al}}{\alpha a_1}$, soit k ce rapport algébrique.

(σ) transformant le vecteur $\vec{Ia}$ en le vecteur $\vec{\alpha a_1}$, transforme le vecteur $k \cdot \vec{Ia}$ d'origine I en le vecteur $k \cdot \vec{\alpha a_1}$ d'origine α , donc $\vec{IO}$ en $\vec{al}$.

En résumé (σ) transforme A, O, I respectivement en ϕ, l, α , ce qui est le résultat visé.

En désignant par m et n les milieux de CA et AB, on peut énoncer de même les résultats suivants : les triangles BOI et $\phi m \beta$ sont directement semblables ; les triangles COI et $\phi n \gamma$ sont directement semblables.

7° Les droites $\phi l, \phi m, \phi n$ recoupent le cercle (I) en l', m', n' : évaluer en fonction de r et R les rapports $\frac{\overline{\phi l'}}{\overline{\phi l}}, \frac{\overline{\phi m'}}{\overline{\phi m}}, \frac{\overline{\phi n'}}{\overline{\phi n}}$. Qu'en résulte-t-il pour la position relative des cercles (I) et lmn ?

Considérons d'abord $\frac{\overline{ll'}}{\overline{l\phi}}$.

$$\text{Comme } l\alpha^2 = l\phi \cdot ll', \text{ on en tire } \frac{\overline{ll'}}{\overline{l\phi}} = \left(\frac{l\alpha}{l\phi} \right)^2.$$

$$\text{La similitude des triangles } \phi l \alpha \text{ et AOI donne : } \frac{l\alpha}{l\phi} = \frac{OI}{OA} = \frac{d}{R}.$$

$$\text{D'où } \frac{\overline{ll'}}{\overline{l\phi}} = \frac{d^2}{R^2}.$$

$$\text{Maintenant } \frac{\overline{\varphi l'}}{\overline{\varphi l}} = \frac{\overline{l l'} - \overline{l \varphi}}{-\overline{l \varphi}} = 1 - \frac{\overline{l l'}}{\overline{l \varphi}} = 1 - \frac{d^2}{R^2} = \frac{R^2 - d^2}{R^2}$$

et, en utilisant (1),

$$\frac{\overline{\varphi l'}}{\overline{\varphi l}} = \frac{2Rr}{R^2} = \frac{2r}{R}. \text{ On démontrerait de même que } \frac{\overline{\varphi m'}}{\overline{\varphi m}} = \frac{\overline{\varphi n'}}{\overline{\varphi n}} = \frac{2r}{R}.$$

En résumé, l, m, n sont homothétiques de l', m', n' dans l'homothétie de centre φ et de rapport $\frac{R}{2r}$. Le cercle lmn (cercle d'Euler du triangle ABC) est homothétique du cercle (I) passant par l', m', n' dans ce même rapport : φ étant sur I, les deux cercles sont tangents en φ . On retrouve le théorème de Feuerbach.

Comme $\frac{R}{2r} > 1$ (puisque d'après (1) $\frac{R^2}{2Rr} = \frac{d^2 + 2Rr}{2Rr} > 1$), le cercle lmn contient à son intérieur le cercle fixe (I). On retrouve évidemment, comme rapport d'homothétie des deux cercles, en valeur absolue le rapport de leurs rayons $\frac{R}{2}$ et r .

8° Quand le triangle ABC varie dans les conditions du paragraphe 3°, préciser sur quelles courbes fixes se déplacent : le centre du cercle lmn , le point de concours des médianes du triangle ABC, l'orthocentre du triangle ABC.

Le centre Ω du cercle lmn est aligné avec I et φ et est extérieur au segment $l\varphi$, du côté de I. $I\Omega = \Omega\varphi - l\varphi = \frac{R}{2} - r$. Donc Ω varie sur le cercle de centre I et de rayon $\frac{R}{2} - r$. Ω étant centre du cercle d'Euler du triangle ABC, le point Γ de concours de ses médianes et le point η son orthocentre se déduisent de Ω par les formules suivantes, relatives à la droite d'Euler du triangle ABC

$$3\overrightarrow{O\Gamma} = 2\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{O\eta}.$$

Les points Γ et η varient respectivement sur les cercles homothétiques du cercle de centre I, de rayon $\frac{R}{2} - r$, par rapport au point O, dans les rapports $\frac{2}{3}$ et 2.

Remarque : Il n'était pas demandé de donner les lieux géométriques de Ω, Γ, η . Avant de se laisser entraîner à dire que ces lieux sont les cercles énumérés précédemment, il y avait lieu de se poser la question : tout point pris sur le cercle (I) est-il une position possible de φ ? Or la détermination du triangle $\alpha\beta\gamma$ connaissant φ est un problème du troisième degré.

Il y a bien des solutions possibles parmi lesquelles on peut signaler la suivante : φ étant donné sur (I), cherchons un second lieu géométrique du

point L ; en considérant la figure de 5°, le triangle isocèle LUF donne $LU = FU$: en menant par φ une sécante quelconque à la droite IF, la coupant en u et portant, dans un sens quelconque sur la sécante, $uL = uF$, on a autant de points L que l'on veut du lieu envisagé : L. et aussi M et N. sont communs, s'ils existent, à ce lieu et au cercle (I). La courbe lieu de L est la strophoïde (oblique) de point double F, de foyer singulier φ , d'asymptote homothétique de la droite FI par rapport à φ dans le rapport 2. Sa branche *infinie* issue de F et ne contenant pas φ traverse manifestement le cercle (I) auquel le point F est *intérieur*. La connaissance de L entraîne celle du triangle $\alpha\beta\gamma$ et de M, N. D'après la géométrie analytique, la strophoïde coupe le cercle (I) en six « points analytiques » dont deux sont les points cycliques ; le point φ est l'un des quatre autres, et il résulte du raisonnement de continuité qui précède que les trois autres sont nécessairement réels. La donnée de φ détermine un seul triangle tel que $\alpha\beta\gamma$.

APPRÉCIATIONS DE L'ÉPREUVE. — Très peu de candidats ont pu répondre de façon entièrement satisfaisante aux deux premières questions, ce qui a obligé la plupart, dans la suite, à admettre l'existence des triangles ABC. L'existence d'une infinité des triangles $\alpha\beta\gamma$ n'est établie de façon claire et rigoureuse que dans une vingtaine de copies.

Même les questions de l'unicité et de l'existence effective de la conique (E) ne sont pas nettement présentées et dissociées dans les démonstrations données. De trop nombreux candidats affirment que (E) est une ellipse sans preuve : on a vu que celle-ci exigeait une étude préalable de situation. Certains, trompés par l'emploi du mot « inscrite » ne prétendent-ils pas que toute conique inscrite dans un triangle est une ellipse ?

Une bonne moitié des copies contient la démonstration de la relation d'Euler : $R^2 - d^2 = 2Rr$ par la méthode indiquée dans le texte du problème. Mais certains l'ont redémontrée *à priori* sous la forme où ils l'avaient apprise. D'une manière générale, une résistance des candidats à se laisser guider par le texte est signalée par les correcteurs, mais en dehors de cas peu nombreux où cette tendance a été heureuse, cette résistance témoignait plus du désir de plaquer des résultats connus que de véritable initiative.

On a souvent pensé que la relation d'Euler, nécessaire pour l'existence de triangles inscrits à (O) et circonscrits à (I) était suffisante, sans doute par paresse d'esprit, sans soupçonner que le fait que ces triangles sont en nombre infini est *à priori* paradoxal. Une quinzaine de concurrents ont traité correctement la question.

Nous nous sommes attachés, dans l'analyse du problème, à élucider des questions de situation (auxquelles sont relatives les indications portées en *italique*). Ces questions ont été à peu près généralement négligées. Les élèves ne se font pas à eux-mêmes d'objections de principe telles que la suivante : est-il bien sûr que l'infinité des triangles ABC admettent (I) comme cercle inscrit et non comme cercle ex-inscrit ? La raison de cette tendance d'esprit est qu'ils en sont restés au stade de la vision directe de figures qu'on s'imagine représenter celles du cas général, par tendance au moindre effort.

Il a été parfois signalé, cependant, que le triangle $\alpha\beta\gamma$ (de la partie 1^{re}) a tous ses angles aigus, mais une telle affirmation ne produit pas bonne impression sur le correcteur lorsque, naïvement, elle veut témoigner d'érudition et n'est qu'une réminiscence d'exercices, autrefois faits, il est vrai, dans la classe de Seconde. Cependant le Jury a admis le rappel des faits classiques sur la droite et le cercle d'Euler, révisés habituellement à propos de la transformation par homothétie (et que le corrigé précédent a admis, pour ne pas devenir trop long).

Il n'est pas douteux que les connaissances des candidats sont plus que suffisantes pour traiter un tel problème : certains ont fait intervenir, un peu plus loin, le théorème de Steiner sur la droite de Simson. Nous n'y attribuons pas de gravité, mais pourtant il faudrait rappeler à nos élèves l'adage reproduit souvent dans les textes des compositions, outre-Manche :

« Every result without justification,
Shall not be taken in consideration. »

La troisième partie n'a pas embarrassé notablement les concurrents, sauf le dernier alinéa qui n'est traité que dans une trentaine de copies. Mais l'absence de justifications complètes (avec réciproques) pour les lieux et enveloppes est trop générale.

Les cinq dernières parties constituaient un terrain neuf pour les candidats permettant de sonder leurs qualités de raisonnement et il faut reconnaître que, malgré des difficultés assez appréciables, les résultats, dans les meilleures copies, ont été fort honorables. Nous avons été surpris, en particulier, du fait que le parallélisme de $a\varphi$ et la ait été souvent démontré sans suivre servilement la marche, indiquée comme facultative d'ailleurs, par le texte.

Il serait donc injuste de prétendre que la pratique du « guidage » des candidats par des problèmes comportant de nombreux jalons les contraigne, les « assujettisse », et diminue leur faculté d'invention. Comment pourrait-on, au reste, concevoir la notation des solutions par le correcteur, dans un problème sans jalons ?

Ce qui semble délicat à apprécier, c'est, au contraire, l'effort pour démêler ce qui reste à dire et à remarquer quand on lit le problème « entre les lignes » : l'analyse des problèmes, chaque année, montre que le champ offert à l'élève, à ce point de vue, est encore très vaste, bien que le texte semble le diriger étroitement.

Défauts les plus fréquents, dans la masse des copies :

Au point de vue technique, les démonstrations et discussions manquent de précision ; l'emploi de la géométrie orientée n'est correct que chez les meilleurs sujets. De nombreux candidats donnent encore des démonstrations incomplètes ou valables dans un cas de figure seulement. Un tiers des candidats environ n'orientent ni les angles, ni les arcs, dans les applications du quadrilatère inscriptible ; ou démontrent le parallélisme des deux droites par l'égalité des valeurs absolues des angles qu'elles forment avec une direction fixe.

Trop souvent les segments ne sont pas orientés, alors qu'il conviendrait

qu'ils le soient : c'est ainsi qu'on définit une inversion par $IM \times IM_1 = C'^2$, la conjugaison des points a et U par $Ia \times IU = r^2$. De même la position de Σ , sur la droite IO est fréquemment définie par la relation $\frac{\Sigma I}{\Sigma O} = \frac{r}{R}$.

Peut-on, dès lors, affirmer la convergence des droites $A'a$, $B'\beta$, $C'\gamma$?

Plusieurs candidats abordant la similitude directe des triangles AOI et ϕIa se bornent à démontrer l'égalité des angles orientés $(IO, IA) = (aI, a\phi)$ et l'égalité du rapport des *longueurs* des côtés comprenant ces angles. On pourrait leur objecter que les angles intérieurs aux triangles en A et α , peuvent aussi bien *a priori* être supplémentaires.

Quelques copies, rappelant le théorème de Feuerbach pour affirmer le contact des cercles (Imn) et (I) , ne précisent pas la nature de ce contact, ce que permettait d'obtenir la méthode suggérée par le problème.

En résumé, les ressources de la théorie de l'orientation et de celle des transformations ne sont pas encore utilisées pleinement au point de vue de l'esprit de précision, trop d'élèves s'en tenant toujours au stade visuel de la géométrie. A un point de vue moins spécial, il est regrettable que le sens cartésien de l'autocritique qui consiste à se présenter à soi-même des objections touchant les résultats entrevus, ne soit pas plus développé, au niveau de la classe terminale des études du second degré.

Présentation : On semble mieux comprendre la nécessité de multiplier dans le texte des figures partielles. Il y a encore des copies ne contenant aucune figure.

La rédaction est hâtive, défectueuse. Trop souvent le concurrent emploie une lettre sans la définir et sans qu'on puisse même la retrouver sur la figure.

Quand le style est concis, cela provient trop de l'absence de justifications, et ce n'est alors qu'en apparence que la copie, facile alors à lire, est facile à apprécier.

L'orthographe est toujours aussi lamentable, et les lauréats ne sont pas les moins fantaisistes dans ce domaine. Le mot orthocentre est particulièrement malmené « *horthocentre* », « *hortocentre* » ; de même le mot ellipse « *élipse* ». Ce défaut est loin d'être général, mais il frappe d'autant plus chez de bons élèves.

La moyenne générale des notes après la première lecture des cent soixante-douze copies a été d'environ 6 sur 20. Le Jury a retenu, pour en faire une étude plus approfondie, vingt-trois copies, dont dix-huit dépassaient 10 sur 20.

Cette nouvelle lecture a permis, sans divergence notable entre les avis des correcteurs, de proposer treize lauréats (trois prix, dix accessits) dont les notes définitives s'échelonnaient de 16 à 10,72. Le concours est comparable par la tenue des résultats à celui de l'an dernier.

Parmi les lauréats, 5 d'entre eux avaient déjà eu en 1947, une nomination au Concours général de mathématiques de la classe de Première. Il y a là une indication franchement encourageante de qualités confirmées.

La valeur moyenne des élèves ayant affronté le concours semble meilleure que l'an dernier, mais il est encore des copies faibles et la difficulté considérable de la tâche des correcteurs en a été alourdie. Nous les en remercions ici et exprimons notre satisfaction à tous les maîtres qui forment des élèves toujours dignes de leurs aînés. Nous savons que l'érudition et la spécialisation géométrique, qui ne doivent en aucune façon être recherchées à l'occasion de ce concours, ne sont pas le fait des professeurs, mais des élèves qui prennent à cœur l'intérêt, développé en eux, pour la branche la plus attrayante des mathématiques.

L'Inspecteur général, Président du Jury,
P. ROBERT.
