

DEUXIÈME PARTIE (1)

A propos du théorème de Wilson

Je me propose de démontrer, par des considérations d'ordre géométrique, le théorème suivant connu sous le nom de « *Théorème de Wilson* ».

Théorème : n étant un nombre premier on a la congruence :

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Considérons sur un cercle n points : $A_1 A_2 \dots A_n$, (n premier), divisant le cercle en n parties égales, et cherchons le nombre des polygones de n côtés déterminés par ces n points.

A chacun de ces polygones, par exemple au polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ on peut faire correspondre $2n$ permutations des n lettres $A_1, \dots, A_n$, à savoir : les n permutations obtenues par permutations circulaires dans un certain sens des lettres $A_1, A_2, \dots, A_n$, et les n permutations obtenues par permutation dans l'autre sens, des mêmes lettres.

(1) Adresser, soit au Président, soit à M. HUISMAN, 11, rue Jacques-Cœur, Paris (4^e), toute communication destinée à la Deuxième Partie du *Bulletin*.

Réciproquement : aux $2n$ permutations de n lettres obtenues par permutations circulaires dans un sens ou dans l'autre, des lettres de l'une d'entre elles, ne correspond évidemment qu'un seul polygone.

Le nombre total des polygones de n côtés déterminés par les n points est donc : $\frac{n!}{2n} = \frac{1}{2} (n-1)!$ Parmi ces polygones, il y en a $\frac{1}{2} (n-1)!$ qui sont réguliers, ce sont ceux obtenus en joignant les n points considérés de 1 en 1, 2 en 2, ... $\frac{n-1}{2}$ en $\frac{n-1}{2}$.

Le nombre des polygones non réguliers est donc :

$$\frac{1}{2} (n-1)! - \frac{1}{2} (n-1)! = \frac{1}{2} [(n-1)! - (n-1)!].$$

D'autre part, soit P un tel polygone non régulier, on peut le considérer comme générateur d'une famille de n polygones, également non réguliers,

tous différents, et déduits de P par n rotations successives d'angles $\frac{2\pi}{n}$,

autour du centre du cercle. De plus il est évident que tout polygone de cette famille engendre, par les rotations envisagées, les seuls polygones de cette famille et les engendre tous. Il résulte de là qu'il est possible de ranger l'ensemble de tous les polygones non réguliers en un certain nombre de familles contenant chacune n polygones distincts entre eux et distincts de ceux d'une autre famille. Par suite le nombre de ces polygones est divisible par n . Donc :

$$\frac{1}{2} [(n-1)! - (n-1)!] \equiv 0 \pmod{n}$$

ou $(n-1)! - (n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$

ou enfin : $(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Le théorème est donc bien établi.

Remarque : On pourrait procéder autrement pour déterminer le nombre total des polygones de n côtés déterminés par les n points.

Soit P_{n-1} le nombre des polygones de $n-1$ côtés correspondants à $n-1$ points $A_1 \dots A_{n-1}$. Chacun de ces polygones donne naissance à $n-1$ polygones de n côtés, obtenus en remplaçant successivement chacun des côtés du polygone de $n-1$ côtés envisagé par les deux segments joignant au n^{me} point A_n les extrémités de ce côté. (Les n points ainsi considérés ne sont pas également répartis sur le cercle, mais cela ne modifie en rien le nombre des polygones qu'ils déterminent). On a donc, la relation de récurrence : $P_n = (n-1) P_{n-1}$ et comme $P_3 = 1$ on a :

$$P_n = 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (n-1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) = \frac{1}{2} (n-1)!$$

A. COMBES (*Voltaire*).