

Le cercle est-il une conique ?

(SUR DEUX DÉFINITIONS NON ÉQUIVALENTES)

Le programme de la classe de Mathématiques Élémentaires prescrit deux définitions des coniques :

- 1) lieu des centres des cercles passant par un point F et tangents à un cercle (C) ou à une droite (D) ;
- 2) lieu des points dont le rapport des distances à un point F et à une droite D est constant (et égal à e).

On suppose en général implicitement que F n'est ni sur (C) , ni sur (D) . Il est bon de remarquer que ces deux définitions ne sont pas équivalentes (1) : la première définit une famille de courbes qui comprend les cercles, obtenus si F est choisi au centre de (C) ; la seconde ne comprend pas les cercles. La différence n'est pas négligeable si on veut bien penser que ces courbes

(1) Deux définitions sont équivalentes si tout défini de l'une est défini de l'autre. Ainsi, deux équations sont équivalentes si tout nombre (ou tout système de nombres) défini par l'une est aussi défini par l'autre. Par exemple, pour un élève de mathématiques élémentaires, les équations : $x + y = 0$, $x^3 + y^3 = 0$ sont équivalentes.

sont, pour les élèves de Mathématiques, les plus usitées, celles auxquelles ils accordent, abusivement peut-être, une importance primordiale.

En revanche, la seconde définition donne, dans le cas exceptionnel où F est sur (D) , des coniques constituées par deux droites sécantes (si $e > 1$) et des coniques réduites à un point (si $e < 1$) ; ce que ne peut donner la première ; celle-ci donne seulement une conique réduite à une droite lorsque F est sur (C) ou sur (D) .

Il est parfaitement légitime d'exclure les cercles d'une première théorie des coniques et de réserver le mot nouveau à des courbes vraiment nouvelles. Cela a l'inconvénient d'empêcher de prétendre sans précaution, par la suite, que toute section plane d'un cône de révolution est une conique ; cela a l'avantage de permettre l'équivalence des deux définitions, à condition de spécifier expressément, non seulement que F n'est pas sur (C) ou sur (D) , mais qu'il n'est pas au centre de (C) (2).

On peut s'accorder à estimer que les élèves de la classe de Mathématiques doivent quitter celle-ci avec cette idée bien assurée que le cercle est une conique, idée qui sera pleinement confirmée dans les classes ultérieures. La question est alors de savoir s'il n'est pas préférable de considérer, dès le début de l'étude, que les coniques comprennent les cercles : ces courbes étant depuis longtemps très familières aux élèves, en les incluant dès l'abord dans les coniques, on se ménage la possibilité de vérifier sur elle les propriétés générales que l'étude révélera — ce qui est de bonne pédagogie — ; toutes les propriétés projectives (pôles et polaires), les propriétés affines des ellipses (diamètres conjugués), la plupart (3) des propriétés métriques, ponctuelles ou tangentielles, sont des généralisations de celles du cercle (par exemple, les théorèmes de Poncelet sont des généralisations de deux propriétés simples des tangentes issues d'un point à un cercle) ; un autre avantage appréciable sera de s'assurer une meilleure continuité dans l'étude de certaines familles de coniques (sections planes du cône de révolution, équation générale des coniques à centre, etc...).

Si on adopte ce point de vue, on doit considérer comme présentant un sérieux inconvénient toute théorie des coniques qui s'ouvre par la seconde définition. Les cercles étant mis hors-jeu par elle, il importe de les raccrocher par la suite en examinant expressément ce que deviennent certains

(2) Les démonstrations d'équivalence que l'on trouve ici ou là sont en défaut si le point donné est au centre du cercle donné.

(3) Celle qui intervient dans la seconde définition fait précisément exception ; toutefois, on peut la rapprocher de la propriété qu'a tout cercle (Γ) d'être lieu de points M , dont le rapport de distance à deux points F et Φ est constant (ce rapport K étant différent de 1) ; il suffit de prendre deux points F et Φ distincts et inverses par rapport à (Γ) . Si (D) est la perpendiculaire en Φ à $F\Phi$ et si H est la projection de M sur (D) , on vérifiera qu'on peut choisir F suffisamment voisin du centre de (Γ) pour que le rapport $\frac{MF}{MH} = \frac{K \cdot M\Phi}{MH}$ reste, quand M décrit (Γ) , aussi voisin de K qu'on le veut, et aussi voisin de zéro qu'on le veut.

résultats lorsqu'on fait tendre e vers zéro. La nécessité d'expliquer le mot excentricité entraîne d'ailleurs l'examen de ce cas limite et il devient naturel d'inclure celui-ci dans l'ensemble étudié.

Puisque notre Association s'interroge sur les définitions de mots, elle pourrait chercher à préciser ce qu'il faut entendre par le mot conique dans la classe de Mathématiques et décider en particulier si le cercle y est une conique. Si oui, la seconde définition devrait être reléguée à la qualité de propriété commune aux coniques non cycliques.

On peut appeler conique toute section plane d'un cône ou d'un cylindre de révolution, en qualifiant de singulière toute conique réduite à deux droites, à une droite ou à un point. Toute conique proprement dite et toute droite sont susceptibles de la première définition. Toute conique est susceptible de la seconde, sauf les cercles et les couples de droites parallèles.

A. CHAUVIN (*Lakanal*).