

Sur les fondements de la géométrie et sur son enseignement

Je désire exposer ici quelques idées sur la géométrie, qui sont loin d'être nouvelles, mais qu'on ne s'est pas préoccupé, au moins en France, d'appliquer à l'enseignement.

Depuis Francis Bacon, et en précisant un peu ses idées, nombre de philosophes et de savants qui ont médité sur l'origine des sciences voient trois stades dans leur formation.

Dans le premier, l'homme aperçoit dans la nature et la technique quelques permanences grossières, il les multiplie, il les affine, il en tire enfin un ensemble d'axiomes et de définitions. Ces définitions font correspondre à des notions intuitives des notions précises qui, pour cela même, ne sont que des images imparfaites (parce que des notions trop parfaites) des premières. Ces axiomes idéalisent des permanences qui ne le sont qu'en gros.

Dans le second stade, le savant déduit une théorie axiomatique de l'ensemble précédent d'axiomes et de définitions. Comme cet ensemble repose sur l'utilisation de certaines notions premières, considérées comme indéfinissables, la théorie axiomatique a l'avantage d'être indépendante des vraies relations qui s'observent dans le monde sensible. Mais une théorie, si elle est réellement axiomatique, n'est pas directement applicable au monde sensible. Pour lui être appliquée, il faut lui adjoindre une interprétation concrète déterminée de ses notions « indéfinissables ».

Dans le troisième stade, on applique la même interprétation aux résultats de la théorie axiomatique, et on est conduit à des affirmations d'ordre concret, que la logique ne suffit pas à prouver, et dont on doit vérifier qu'elles sont conformes à la réalité sensible (il est essentiel d'observer que cette vérification ne prouve nullement que les axiomes choisis et leur interprétation sont ceux qui expliquent les permanences réelles. Bien souvent,

celles-ci pourraient être aussi expliquées par plusieurs systèmes d'axiomes et d'interprétations).

On voit ici se répartir les rôles respectifs de l'intuition et de l'induction ainsi que celui de l'observation dans le premier stade, de la déduction dans le second, de l'expérience ou de l'observation dans le troisième.

En appliquant ce qui précède à la géométrie élémentaire, on s'aperçoit que, telle qu'elle a été créée par Euclide et telle qu'elle est généralement enseignée, elle se réduit à sa partie axiomatique. Il est vrai qu'Euclide et ses successeurs essaient bien de présenter les notions fondamentales de point, de droite, de longueur... sous une forme d'apparence concrète. Mais en réalité, la partie théorique de la géométrie élémentaire reste inchangée quand on néglige ces apparences, et c'est bien, après cette très légère épuration, le type de ces théories axiomatiques dont, trop souvent, on ne fait remonter l'apparition qu'à Hilbert.

Le point important que je voudrais souligner est celui-ci. C'est fausser dangereusement les esprits que de faire croire (ou laisser croire) qu'une théorie axiomatique se suffit à elle-même pour être applicable au monde réel. Il est essentiel de passer par le troisième stade mentionné plus haut. Autrement dit, et à titre d'exemple, le théorème du triangle rectangle ne prouve pas que si l'on a une équerre en bois, si l'on mesure avec un double décimètre en bois les longueurs de ses côtés et de son hypoténuse, on aura : $h^2 = a^2 + b^2$, pour les valeurs observées de ces mesures a, b, h . Tout au plus rend-il vraisemblable que h^2 sera « voisin » de $a^2 + b^2$, et encore ne donne-t-il aucun renseignement sur la grandeur de la différence entre h et $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Il n'est pas possible, dans l'Enseignement du Second Degré, d'insister sur ces idées, ni de procéder à des vérifications expérimentales étendues. Mais, à mon avis, il serait essentiel : 1) de dire aux élèves très nettement que ce qu'on appelle droite, angle... dans la pratique n'a pas les propriétés rigoureuses qu'on leur attribue dans la théorie ; 2) de faire vérifier expérimentalement sur un ou deux exemples que les relations rigoureuses entre certains éléments de la théorie ne sont pas vérifiées rigoureusement par les objets concrets correspondants ; 3) de constater cependant qu'elles le sont approximativement ; 4) d'affirmer que, quelle que soit la précision des mesures entreprises, elles n'ont jamais conduit dans le passé à des approximations inadmissibles (sauf peut-être dans les phénomènes très particuliers où la théorie de la relativité donne une précision « un peu » meilleure).

Les axiomes de la géométrie gardent un sens indépendant de l'interprétation concrète qu'on leur donne, mais ils dépendent de l'expérience en ce sens que c'est l'expérience qui a conduit leur choix et qui, ensuite, l'a justifié.

Ma conclusion est donc qu'il faut cesser d'enseigner une géométrie qu'on ne s'est pas donné le droit d'appliquer à la réalité. La géométrie qu'on enseigne est une géométrie tronquée, parce que réduite à sa partie axiomatique. Il faut, sans y consacrer long temps, prononcer les mots nécessaires pour que les élèves aient entre les mains une géométrie applicable, une géométrie totale.

On peut tirer une autre conclusion pédagogique de ce qui précède. Puisqu'une géométrie totale ne peut se dispenser d'avoir recours à l'expérience, pourquoi hésiter, pour les débutants, à éviter les démonstrations longues ou délicates, en les remplaçant par des expériences ou des intuitions. Les enfants trouvent leurs principales difficultés, non pas dans les chaînons successifs des démonstrations logiques, mais dans la compréhension de la nécessité de démontrer certaines propositions qui leur paraissent évidentes. Par exemple, que deux triangles qui ont trois côtés égaux deux à deux sont égaux, ou la théorie des droites et plans parallèles. Qu'on retarde la démonstration de certaines assertions géométriques jusqu'au moment où l'élève s'aperçoit qu'elles ne sont pas logiquement évidentes. Et que, d'autre part, on allège les cours en démontrant expérimentalement d'autres assertions qui ne sont pas évidentes, mais dont la démonstration est compliquée.

On pourrait m'objecter que ces vœux sont difficiles à traduire dans un enseignement réel. J'ai cependant eu entre les mains, vers 1920, des ouvrages anglais qui adoptaient cette façon de procéder (mélange de logique et d'expérience), dans le même pays où la tradition d'un enseignement exactement conforme à l'exposition d'Euclide est resté le plus longtemps en faveur.

Serait-il possible que les commissions, officielles ou officieuses, qui s'occupent de la réforme des programmes, tiennent compte de ces réflexions, réflexions dont nous avons tiré deux applications distinctes dont peut-être certains qui repousseraient l'une accepteraient l'autre.

Maurice FRÉCHET.