

III. Document Officiel

4. Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Première)

au Concours général des Lycées et Collèges en 1946 (1)

Le problème proposé aux candidats concernait l'étude de quelques propriétés des sphères S tangentes à deux droites Y et Z , non situées dans un même plan, et à leur perpendiculaire commune X .

Dans une *première partie*, l'angle des droites Y et Z étant quelconque, on donnait sur la droite X un point H défini par ses distances a et b aux deux points A et B où X coupe Y et Z , et l'on demandait de construire les centres de celles de ces sphères S qui sont tangentes à X au point H , — de définir les points de contact M et N d'une telle sphère avec Y et Z , — et de calculer certains éléments métriques et angulaires attachés au triangle HMN formé par les trois points de contact.

La construction des centres de ces sphères et la détermination des points M et N faisant l'objet d'une première question. Il était naturel de considérer les plans T et T' bissecteurs des dièdres ayant pour rectilignes les angles droits XAY , et les plans U et U' , bissecteurs des dièdres ayant pour rectilignes les angles droits XBZ . Lorsque le point H est distinct de A et de B , les traces sur le plan V perpendiculaire en H à X des plans T , T' et U , U' sont les côtés d'un parallélogramme ayant pour centre le point H et dont les sommets sont les centres des quatre sphères cherchées. Si O est l'un de ces sommets, ses projections orthogonales sur Y et Z sont les points de contact M et N de la sphère S ayant O pour centre avec ces deux droites ; il est commode de construire ces points M et N par l'intermédiaire des projections orthogonales m et n du point O sur les parallèles HY' et HZ' menées par le point H à Y et à Z ; on prépare ainsi utilement, par la mise en évidence des carrés $AHmM$ et $BHnN$, les calculs demandés dans la suite. Les cas particuliers où H est confondu avec A ou avec B s'étudient sans difficulté.

Dans un assez grand nombre de compositions, cette question a été traitée, ou, du moins, les résultats ont été obtenus, mais, presque toujours, à la suite de raisonnements incomplets ou incorrects. Les fautes commises sont du reste fréquentes dans les problèmes de construction.

La solution de ces problèmes comprend, en fait, deux étapes :

1° Transformation des conditions définissant initialement l'élément à construire en d'autres considérées comme pratiquement réa-

(1) Le Jury était composé de M. DESFORGE, Inspecteur général, président ; Mlle BARBIER, professeur de Mathématiques au Lycée Victor-Duruy ; MM. CAGNAC, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; FLAVIEN, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; ITARD, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Henri-IV ; MIRABEL, professeur de Mathématiques (Cours préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud) au Lycée Saint-Louis.

Voir l'énoncé p. 3 du *Fascicule E 25* (1946 B.).

lisables à l'aide de constructions classiques ; — étude de l'équivalence du problème posé et du problème ainsi transformé ; si l'équivalence n'est pas acquise, analyse précise des relations qui permettront de déduire la solution cherchée de la solution du problème nouveau ;

2° Réalisation pratique des constructions ainsi définies ; — discussion des conditions de possibilité ; — étude des cas particuliers.

Or l'étude de l'équivalence des conditions données et des conditions effectivement utilisées pour effectuer la construction est trop souvent absente ; parfois même la nécessité de cette étude est masquée par une présentation trop rapide, et défectueuse, du raisonnement. Il est indispensable que des habitudes correctes soient données, à cet égard, aux élèves : un problème de construction doit se traiter avec la même rigueur logique et la même précision de pensée que la recherche d'un lieu géométrique ou la démonstration d'une propriété d'une figure. En particulier, si l'étude du problème est amorcée par l'hypothèse : « Supposons le problème résolu... », il est évident que toutes les conséquences qui seront déduites de ce point de départ ne constituent que des conditions nécessaires d'existence de la figure proposée ; une réciproque reste donc à établir, et il est tout indiqué de le faire immédiatement ; sans doute pourrait-elle trouver place après le développement du mécanisme des constructions, mais elle risque alors d'être oubliée, ou confondue avec la discussion des conditions de possibilité. Il arrive d'ailleurs assez fréquemment, comme dans les problèmes de lieux géométriques, que la première étape de la solution puisse être franchie plus rapidement, par l'utilisation explicite de conditions nécessaires et suffisantes, en faisant appel à des résultats connus. Par exemple, dans le cas actuel, le raisonnement peut être ainsi présenté : « Pour qu'un point O soit le centre d'une sphère tangente à la droite X au point H et tangente également à Y et à Z , il faut et il suffit qu'il soit à la fois dans le plan V , dans l'un ou l'autre des plans T ou T' , et dans l'un ou l'autre des plans U ou U' ; ... »

Certains candidats ont eu une idée claire de ce qui devait être fait, mais la présentation laisse souvent à désirer et l'expression trahit parfois la pensée. Ainsi, il n'est pas équivalent de dire : « Pour qu'une sphère soit tangente aux droites X et Y , il faut et il suffit que son centre soit situé dans l'un ou l'autre des plans... », ou de dire : « Pour qu'un point soit le centre d'une sphère tangente aux droites X et Y , il faut et il suffit qu'il soit situé... ».

Le reste de la première partie du problème proposait la recherche de quelques relations métriques et angulaires concernant une sphère déterminée S répondant aux conditions données au début ; l'énoncé donnait une méthode de recherche.

L'application au triangle Hmn de relations métriques classiques permettait d'évaluer de deux façons différentes la longueur du segment mn , d'une part en fonction des distances $HA=a$, $HB=b$ et de l'angle $mHn=\varphi$, qui est l'un des angles des droites Y et Z , d'autre part en fonction de l'angle φ et du rayon r de la sphère S , dont le centre est le point diamétralement opposé au point H sur le cercle circonscrit au triangle Hmn ; on obtenait ainsi l'expression de r en fonction de a , b , φ .

Les indications fournies par le texte permettaient alors de calculer la longueur du segment MN, à partir de ses projections orthogonales sur le plan V et sur la droite X, — puis le cosinus de l'angle $MHN = \theta$, — et enfin l'angle de la droite X et du plan HMN, en comparant les aires du triangle HMN et de sa projection orthogonale Hmn sur le plan V. Les résultats dépendent ici de la position du point H par rapport au segment AB ; l'énoncé attirait sur ce point l'attention des candidats.

A l'occasion de ce calcul, qui porte sur des propriétés des vecteurs $\vec{HM}$ et $\vec{HN}$, il était bon de signaler le fait, géométriquement évident, que le plan médiateur de HM est celui des plans bissecteurs T ou T' qui contient le centre O de la sphère étudiée et que le plan médiateur de HN est de même celui des plans U ou U' qui contient le point O.

L'énoncé ne demandait pas de démonstration directe des relations entre les angles φ , θ et α . Cependant celles-ci pouvaient être obtenues à partir de quelques remarques simples. Il est en effet tout naturel de faire apparaître, dans cette étude, le rectiligne de l'un des dièdres formés par le plan V et par le plan HMN, et, par conséquent, de chercher d'abord l'intersection de ces deux plans. Cette droite est définie par le point H et par le point E où la droite MN rencontre sa projection orthogonale mn sur le plan V. La considération des triangles homothétiques EMn , ENn , met alors en évidence le fait que la droite HE est bissectrice des angles en H des deux triangles HMN et Hmn , bissectrice intérieure ou extérieure suivant que le point H est lui-même intérieur ou extérieur au segment AB (cette propriété, dont la démonstration était demandée dans la deuxième partie du problème, lorsque les droites Y et Z sont orthogonales, est indépendante de la valeur de l'angle φ). Ce point acquis, on peut construire l'angle des plans HMN et Hmn en projetant orthogonalement le point m (ou le point M) en G sur la droite HE : l'angle aigu mMG du triangle rectangle mMG est l'angle α ; les angles en H des triangles rectangles GHm et GHM sont respectivement égaux à $\frac{\varphi}{2}$ et à $\frac{\theta}{2}$, ou à leurs compléments, suivant que H est intérieur ou extérieur au segment AB. En utilisant les formules classiques liant les éléments de ces trois triangles, on obtient facilement les relations cherchées :

$$\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = \sin \frac{\varphi}{2},$$

ou bien

$$\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\varphi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \alpha = \cos \frac{\varphi}{2},$$

suivant que H est intérieur ou extérieur au segment AB.

Ces questions ont été étudiées, plus ou moins complètement, en suivant les indications du texte, par un tiers environ des candidats. L'un d'eux a eu l'heureuse idée d'établir directement les relations angulaires proposées ; il a partiellement réussi. Dans la plupart des compositions, la conduite des calculs, qui supposait la connaissance de quelques résultats du cours de Seconde, révèle une grande inexpé-

rience et beaucoup de maladresses. L'inexpérience est sans doute excusable chez des élèves de Première, de qui l'on ne peut attendre une longue pratique du calcul, surtout lorsqu'il s'applique aux éléments d'une figure de l'espace. Il semble pourtant normal de demander aux meilleurs d'entre eux une connaissance suffisante des relations trigonométriques classiques, leur permettant un choix réfléchi des transformations susceptibles d'aboutir.

D'autre part, l'idée si importante du contrôle de résultats obtenus, ou de formules employées, par quelques vérifications effectuées directement à partir de données numériques simples, ou même par quelques remarques de bon sens, semble généralement ignorée ; sa mise en jeu éviterait pourtant bien des erreurs grossières ; elle est essentielle dans toute recherche, et sa valeur pratique doit être signalée et soulignée à tous les degrés de l'enseignement.

Dans la *deuxième partie* du problème, les droites Y et Z étant supposées orthogonales, on recherchait d'abord le lieu des centres des sphères tangentes aux trois droites X, Y, Z : il se compose des quatre droites d'intersection de l'un ou l'autre des plans T ou T' avec l'un ou l'autre des plans U ou U' précédemment définis.

Il est commode, pour préciser les notations, d'orienter les droites Y et Z suivant des demi-droites Ay et Bz ; soient alors T et U les bissecteurs intérieurs des dièdres ayant respectivement pour rectilignes les angles droits BAy et ABz, T' et U' les bissecteurs extérieurs des mêmes dièdres, D₀, D₁, D₂ et D' les intersections des plans T et U, T et U', T' et U, T' et U'. L'orthogonalité des plans (X, Y) et (X, Z) entraîne quelques propriétés simples de symétrie : les droites D₁, D₂ et D' sont les symétriques de D₀ respectivement par rapport aux plans (X, Y), (X, Z) et à la droite X. Les points de rencontre des droites D avec les deux plans (X, Y) et (X, Z) se définissent aisément en traçant les demi-droites Az₀ et By₀ parallèles à Bz et Ay et de même sens qu'elles, et en prenant les points d'intersection α₀ et β₀ des plans T et U respectivement avec les demi-droites By₀ et Az₀ : la droite D₀ passe par les points α₀ et β₀ ; les trois autres droites D₁, D₂, D', sont définies par les couples de points (α₀, β₁), (β₀, α₁), (α₁, β₁), α₁ et β₁ étant les symétriques de α₀ et β₀ par rapport à X. Cette construction met en évidence trois segments β₀A, AB, Ba₀, ayant la même longueur AB = 2d, et qui peuvent être considérés comme trois arêtes d'un cube W dont la droite D₀ est une diagonale. Le plan médiateur P du segment AB rencontre D₀ au point J₀, milieu de α₀β₀, et centre du cube W ; les points J₁, J₂ et J' où les trois droites D₁, D₂ et D' coupent le plan P se déduisent de J₀ par les symétries précédemment définies ; les quatre points J sont les sommets d'un carré dont les diagonales J₀J' et J₁J₂ sont les perpendiculaires communes aux droites D₀, D' et D₁, D₂.

On remarque enfin que si O est un point de l'une quelconque des droites D, les points de contact avec X, Y, Z, de la sphère S ayant O pour centre sont les projections orthogonales du point O sur ces trois droites ; en particulier, les points M et N sont à l'intersection de Y et de Z avec les plans menés par O parallèles à (X, Z) et (X, Y) ; le rayon de cette sphère est égal à OH. Par conséquent si l'on impose aux sphères étudiées d'avoir leurs points de contact M et N avec Y et Z respectivement situés sur les demi-droites Ay et Bz, le lieu des centres ω de

ces sphères particulières Σ est formé par les portions des droites D_0, D_1, D_2 et D' situées à l'intérieur du dièdre droit (X_0) dont les faces sont les demi-plans limités à X et contenant respectivement les demi-droites Ay et Bz . Pour définir commodément ce lieu, on remarque que la droite D_0 est partagée par les plans (X, Y) et (X, Z) en trois parties : le segment $\alpha_0\beta_0$ et les demi-droites $\beta_0\gamma_0$ et $\alpha_0\delta_0$ extérieures à ce segment ; le lieu des centres ω comprend le segment $\alpha_0\beta_0$ et les demi-droites $\alpha_0\delta'_0$ et $\beta_0\gamma'_0$ respectivement portées par D_1 et D_2 , et symétriques de $\alpha_0\delta_0$ et $\beta_0\gamma_0$ par rapport aux plans (X, Y) et (X, Z) .

Ainsi la famille des sphères Σ se déduit simplement de celle des sphères S ayant leurs centres sur la droite D_0 . Si l'on désigne par $(S_0), (S_1)$ et (S_2) les groupes des sphères S ayant leurs centres respectivement sur le segment $\alpha_0\beta_0$ et sur les demi-droites $\alpha_0\delta_0$ et $\beta_0\gamma_0$, la famille Σ est formée du groupe (S_0) et des groupes (S'_1) et (S'_2) symétriques de (S_1) et (S_2) respectivement par rapport aux plans (X, Y) et (X, Z) . On peut donc déduire les propriétés des sphères Σ de celles des sphères S ayant leurs centres sur D_0 .

Le calcul du rayon ρ d'une sphère Σ en fonction de la mesure algébrique x du vecteur $\overrightarrow{IH}$ joignant le milieu I de AB au point de contact H de Σ avec X , celui de l'angle en H du triangle HMN , ne présentaient aucune difficulté ; ils étaient d'ailleurs préparés par les résultats de la première partie du problème.

La détermination de la direction des normales au plan HMN était essentielle pour la suite : lorsque le centre O d'une sphère S décrit la droite D_0 , les plans T et U sont les plans médiateurs des segments HM et HN , et le plan HMN reste normal à la droite D_0 , intersection de T et U . Ainsi, pour chaque sphère Σ , la direction des normales au plan HMN correspondant est définie par celle des droites D_0, D_1 ou D_2 qui porte le centre ω de Σ .

Ces remarques amorçaient la solution de la question concernant le lieu des centres C des cercles circonscrits aux triangles HMN correspondant aux différentes sphères Σ . Il suffit d'étudier le problème pour les sphères S ayant leur centre O sur D_0 . Le cercle considéré étant la section de la sphère S par le plan HMN , la droite D_0 est l'axe de ce cercle et les vecteurs $\overrightarrow{J_0O}$ et $\overrightarrow{J_0C}$ sont portés par cette droite ; en remarquant que $\overrightarrow{J_0O}$ a pour projection orthogonale sur X le vecteur $\overrightarrow{IH}$, et que le vecteur $\overrightarrow{IH}$ a pour projection orthogonale sur D_0 le vecteur $\overrightarrow{J_0C}$, on établit la relation : $\overrightarrow{J_0O} = 3 \cdot \overrightarrow{J_0C}$, puisque le cosinus de l'angle des droites D_0 et X est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (résultat déduit de la première partie).

L'homothétie de centre J_0 et de rapport $\frac{1}{3}$, combinée avec les symétries par rapport aux plans (X, Y) et (X, Z) donne alors la définition du lieu des centres C correspondant aux sphères Σ . On étudie d'une façon analogue le lieu du point K commun aux plans tangents à une sphère Σ aux points H, M, N , en démontrant d'abord, pour une

sphère S ayant son centre O sur D_0 la relation : $\overline{J_0 O} \cdot \overline{J_0 K} = -3d^2$, après avoir constaté que le point K est lui-même sur la droite D_0 .

Une dernière question concernait l'étude du point F où le cercle circonscrit au triangle HMN coupe, en dehors du point H , le plan V perpendiculaire en H à X . Ce point F est sur la bissectrice HE déjà rencontrée dans la première partie du problème ; il est donc le milieu de l'un des arcs MN de cercle circonscrit au triangle HMN . On en déduit aisément que le triangle FMN est, dans tous les cas, équilatéral

et que les vecteurs $\overrightarrow{HF}$ correspondant aux sphères Σ restent équipolents, suivant la position du point H par rapport aux points A et B , à l'un ou à l'autre des vecteurs diagonaux des faces du cube W perpendiculaires à X ; la détermination du lieu de F résulte de ces remarques.

Bien entendu, cette étude est étroitement liée à celle des sphères tangentes à trois arêtes consécutives, non parallèles, Y, X, Z , du cube W , sphères qui sont également tangentes aux trois arêtes symétriques des précédentes par rapport au plan diagonal passant par le lieu des centres D_0 et parallèle à l'arête X .

Si la deuxième partie du problème a été abordée dans une soixantaine de copies, la plupart ne contiennent que des indications superficielles sur le lieu des centres des sphères S . Malgré sa facilité, la solution de cette première question n'est sérieusement commencée que dans vingt compositions, mais les raisonnements précis et corrects sont extrêmement rares, et la détermination des points remarquables des droites D n'est faite, partiellement du reste, que par une dizaine de candidats. La claire vision d'une figure de l'espace exige sans doute quelque entraînement, mais il s'agissait ici de données très simples que les élèves avaient certainement rencontrées en cours d'année, ne serait-ce qu'en étudiant le cube ; et la recherche d'une construction méthodique des éléments utiles devait donner le moyen de présenter des schémas nets et faciles à commenter.

Trois candidats seulement ont obtenu des résultats, incomplets du reste, sur la seconde question, plus délicate, concernant la famille des sphères Σ : une analyse un peu poussée des faits déjà acquis suffisait cependant pour bâtir une solution satisfaisante, même sans faire appel à quelques notions très élémentaires sur les symétries, qui allégeaient notablement l'étude de la figure, et qui, sous cette forme modeste, paraissaient bien être à la portée de bons élèves de Première. Notons encore la réelle difficulté qu'ont éprouvée les meilleurs pour donner un dessin correct des projections du lieu des centres des sphères Σ sur des plans parallèles aux faces du cube W ; il s'agissait pourtant de droites bien simplement placées par rapport à ce cube.

Les calculs demandés dans cette question ont donné lieu à quelques réponses correctes, tirées presque toujours des formules établies dans la première partie ; par contre, la direction des normales au plan HMN est bien rarement définie d'une façon précise.

Un seul candidat a tenté l'étude du centre du cercle circonscrit au triangle HMN , proposée comme troisième question ; de grosses maladresses ne lui ont pas permis d'aboutir.

Quant à la dernière question, seule la partie facile concernant la droite d'intersection du plan HMN et du plan V a été traitée, plus ou

moins complètement, et seulement dans une dizaine de compositions. Quelques rares indications sur le triangle FMN et sur le lieu de F méritent à peine d'être mentionnées.

Il convient pourtant de signaler, à ce sujet, l'un des candidats qui, après avoir étudié, incomplètement d'ailleurs, et non sans d'assez grosses maladresses, la première partie du problème, a présenté, en guise de solution de la seconde partie, une figure très claire, où apparaissaient, avec le cube W dont on a expliqué plus haut le rôle fondamental, les éléments essentiels permettant de résoudre une bonne part des seconde et quatrième questions ; quelques phrases et quelques formules, hâtivement rédigées, commentaient, sur quelques points, cette figure. Sans doute est-il permis de supposer que cet élève aurait pu, s'il avait disposé d'un temps plus long, donner une solution vraiment intéressante, sinon complète, du problème ; mais l'insuffisance des résultats effectivement exposés et du nombre des réponses précises et correctes n'a pas permis au jury de mettre sa composition en concurrence avec les toutes premières du classement.

Les indications qui précèdent n'envisagent que le côté technique de l'épreuve, mais il convient aussi d'attirer l'attention sur un point non moins important, dont on saisira aisément la liaison avec une compétition telle que le Concours général. Il s'agit de la contribution que doit apporter l'étude des mathématiques à la formation de l'esprit et à l'acquisition des moyens d'expression de la pensée. C'est là un des aspects essentiels de l'enseignement de cette discipline, que le professeur ne doit jamais perdre de vue, à tous les stades, et dès l'initiation. Qu'il s'agisse d'algèbre ou de géométrie, toute question doit être étudiée et traitée comme un exercice de raison, avec une mise en jeu active et réfléchie, et non passive, de la mémoire, — et la mise au point des résultats acquis doit être recherchée avec un soin méticuleux, tant pour le fond que pour la forme. Cet effort vers la perfection, s'il est tenté à toute occasion, et comme naturellement, dans le travail en commun du maître et des élèves, ne manquera pas de se révéler, à tous points de vue, et pour tous, efficace ; l'épreuve du Concours général, à laquelle est conviée une élite, devrait en apporter le reflet précis.

Les compositions de 1946 sont, à cet égard, quelque peu décevantes ; trop rares sont les candidats qui montrent un véritable souci de l'expression correcte d'une pensée d'abord précisée et clarifiée ; le style, la construction de la phrase, l'orthographe et la ponctuation, comme les figures, sont bien souvent, même chez les meilleurs, négligés et traités, sans doute, comme éléments accessoires, alors qu'ils constituent les vrais matériaux permettant de communiquer les idées, de faire comprendre à d'autres ce que l'on a soi-même compris.

Sur les cent vingt et un candidats ayant pris part au Concours cette année, sept ont finalement paru dignes d'être proposés pour une récompense ; un premier prix, deux seconds prix et quatre accessits ont été décernés. Les lauréats ont montré, à des degrés divers, de sérieuses qualités, encore incomplètement révélées mais déjà appréciables ; les premiers classés, s'ils n'ont point dominé l'ensemble du problème, ont cependant obtenu, sur quelques points difficiles, des résultats corrects qu'ils ont su présenter avec une netteté satisfaisante et un sens déjà averti du raisonnement mathématique.

Dix-sept copies se détachent ensuite de l'ensemble ; si le classement définitif les a écartées du palmarès, elles apportaient cependant le témoignage de connaissances déjà solides et correctement assimilées.

A l'autre extrémité de l'échelle, on trouve une dizaine de compositions complètement nulles, et une vingtaine nettement insuffisantes. Pour la moyenne des candidats, l'impression du jury a été, dans l'ensemble, favorable, et si leurs efforts n'ont pas toujours été heureux, du moins leur comportement dans une épreuve difficile justifiait le choix dont ils avaient été l'objet de la part de leurs professeurs.

Le Concours général de mathématiques pour la classe de Première n'avait pas eu lieu depuis 1939. Cette reprise s'adressait à des élèves qui ont commencé et poursuivi leurs études secondaires pendant la rude période de guerre, à peine achevée. Les pénibles conditions matérielles, les difficultés de toutes sortes, qui, durant cinq années terribles, ont apporté une gêne considérable au développement du travail scolaire, pouvaient faire craindre une baisse sensible du niveau des candidats. Que les résultats de ce concours soient comparables à ceux d'autrefois montre que l'élite de ces jeunes gens, aidés par le talent et le dévouement de leurs maîtres, a été capable d'un bel effort d'intelligence et de volonté ; c'est là un heureux présage.

L'Inspecteur général, président du jury :

J. DESFORGE.
