

DEUXIÈME PARTIE

Equivalence de deux lieux géométriques

Sous réserve des exceptions classiques, nous appelons :

courbe (C) de foyer F et de cercle principal (O) le lieu des points M tels que le cercle de diamètre FM soit tangent à (O) ;

courbe (Γ), de foyer Φ, de directrice (Δ) et d'excentricité e le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à Φ et à (Δ) soit égal à e .

I°) F et (O) — de rayon a — étant donnés, on considère l'inversion (I) de centre F qui conserve le cercle (O). (I) transforme le point O en P, pied de la polaire (D) de F par rapport à (O), le point *quelconque* M en M' et le cercle de diamètre FM en la droite (d) perpendiculaire en M' et le cercle de diamètre FM en la droite (d) perpendiculaire en M' à FM.

$$\text{On a } \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FM'} = \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{FP} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FM'} = \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{FP}$$

d'où en introduisant les projections H de M sur (D) et L de O sur (d)

$$\overrightarrow{FM} (\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LM'}) = \overrightarrow{FO} (\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP})$$

et comme $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{HP} = 0$, il reste $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{OL} = \overrightarrow{FO} \cdot \overrightarrow{MH}$

$$\text{d'où} \quad \frac{MF}{MH} = \frac{OF}{OL}$$

La condition de contact qu'exprime $OL = a$ équivaut donc à

$$\frac{MF}{MH} = \frac{OF}{a}, \quad \text{d'où} :$$

toute courbe (C) est une courbe (Γ) où Φ coïncide avec F, (Δ) avec la polaire de F par rapport à (O) et e avec le rapport de la distance OF au rayon du cercle (O).

II°) Φ, (Δ) et e étant donnés, soient α et α' les points de la courbe (Γ) correspondante qui sont situés sur la perpendiculaire menée de Φ à (Δ).

Il existe une courbe (C') qui admet pour foyer Φ et pour cercle principal le cercle (Ω) de diamètre $\alpha\alpha'$. D'après ce qui précède, (C') est aussi une courbe (Γ') qui admet pour foyer Φ, pour directrice la polaire de Φ par rapport à (Ω), soit (Δ) et une certaine excentricité e' . Pour fixer la valeur de ce rapport constant, remarquons que α et α' appartiennent à (C') donc aussi à (Γ') ce qui montre que $e' = e$. (Γ') coïncide avec (Γ).

Toute courbe (Γ) est une courbe (C) où F coïncide avec Φ et (O) avec le cercle ayant pour diamètre le segment qui joint les deux points de (Γ) situés sur l'axe de symétrie passant par Φ.

Mme AYRAULT (Jules-Ferry).