

IV. Document Officiel

**Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1945 (1)**

Le problème proposé concerne l'étude d'une opération ponctuelle plane (2) : deux points fixes O et A étant donnés, on fait correspondre au point m quelconque le point M tel que les triangles OAm , OmM soient semblables et de même sens : en d'autres termes Om est bissectrice de l'angle des demi-droites OA , OM et $\overline{Om}^2 = OA \cdot OM$.

La première partie n'est qu'une prise de contact attirant l'attention sur deux faits simples :

a. Le point M , dit *associé* de m est aussi associé de m' , point symétrique de m par rapport à O . Ce fait n'a pas été compris de beaucoup qui assurent qu'un point donné est l'associé d'un seul, voire de quatre points m , et qui ne lisent pas attentivement les stipulations de l'énoncé.

b. Pour trouver la ligne (Γ) associée d'une ligne donnée (γ) décrite par m , il peut y avoir avantage à substituer au point A (que certains ont baptisé point de base de l'opération ponctuelle ω à étudier) un point particulier A_1 . La nouvelle opération ω_1 définie par O et le nouveau point de base A_1 , fait correspondre à m le point M_1 qui décrit la ligne (Γ_1) . Comment passer de (Γ_1) à (Γ) ? Guidés par l'énoncé, les concurrents ont vu généralement que M_1 est homologue de M dans une similitude directe de centre O , qui est déterminée par la propriété de transformer A en A_1 ; mais ils ont exprimé le résultat de manière souvent trop peu expressive, et ont abusé inutilement de congruences d'angles de module 2π .

La deuxième partie approfondit l'étude de la figure formée par les points O , A , M , m et m_1 . Le jury a eu la satisfaction de ne pas trouver ici des réminiscences d'une érudition poussée au delà du programme de la classe, concernant le « quadrilatère harmonique » $AmOm'$. Suivant les indications du texte, on a construit les points m , m' , dont l'associé est M , en prolongeant MO d'une longueur OA' égale à OA , en décrivant le cercle passant par les points M , A , A' : les points m et m' sont les intersections de ce cercle avec la bissectrice des demi-droites OA et OM ; les centres I , J , K , L des quatre cercles tangents aux trois côtés du triangle OAM peuvent être, utilement pour la suite, adjoints à cette figure : K et L , sur la bissectrice extérieure de l'angle en O , sont sur le cercle $MAA'mm'$; I et J , sur la bissectrice intérieure de cet angle, sont conjugués harmoniques par rapport à m , m' . L'identité de la bissectrice intérieure AIK de

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, Inspecteur général, président ; CAIRE, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Janson-de-Sailly ; DOLLON, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis-le-Grand ; MARTENOT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Charlemagne ; Mme PAUC, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Jacques-Decourdemanche ; Mr. RIVET, professeur de Navale au Lycée Saint-Louis.

(2) Voir l'énoncé p. 6 du *Fascicule E 23* (1945 B).

l'angle OAM avec celle de l'angle mAm' , qu'on laissait à découvrir, a manqué à beaucoup, qui suivent servilement l'énoncé en cherchant à vérifier les propriétés indiquées à titre de points de repère, et n'observent la figure qu'après coup. Les vérifications font usage de triangles semblables et de quadrilatères inscriptibles, sauf dans les meilleures copies où les ressources de la théorie des polaires sont utilisées.

La troisième partie est tout à fait indépendante du reste du problème et de la considération de l'opération (ω) : les candidats en étaient prévenus, l'énoncé les incitant presque à la traiter en dernier lieu. Contre toute attente elle a été la partie la mieux traitée du problème :

Il s'agissait d'étudier le produit des inversions de pôles I, J, K, L, et de puissances respectives $\overline{Im}.\overline{Im}'$, $\overline{Jm}.\overline{Jm}'$, $\overline{Km}^2$, $\overline{Lm}^2$, l'énoncé aidant les recherches.

Cette question a semblé intéresser les candidats, mais ils n'ont eu que rarement l'idée de considérer le cercle de la partie II comme inverse de la droite mOm' dans les inversions précitées de pôles K et L ; là encore on manie sans élégance des puissances et des triangles semblables.

En cherchant l'homologue du point O dans le produit des quatre inversions, on a été amené, à la seconde inversion, à transformer par celle-ci le pôle de cette inversion ; quelques candidats ignoraient que son inverse peut être regardé comme rejeté à l'infini ; c'est pardonnable, mais que dire de ceux, assez nombreux, qui, confondant homothétie et inversion, croient que le pôle d'inversion est son propre homologue !

Beaucoup n'ont pas su dire qu'un nombre *pair* d'inversions conserve les angles en grandeur et en sens ; le raisonnement qui établit, en définitive, qu'un point quelconque du plan n'est *pas changé* par le produit des quatre inversions, n'a jamais été absolument complet : on a omis de considérer le cas d'un point pris sur le cercle OAM, très facile si on l'envisage à la suite du cas général.

On demandait la somme algébrique des inverses des puissances des quatre inversions. Elle est *nulle*. On l'a vu plus ou moins adroitement ; la somme

$\frac{1}{\overline{Km}^2} + \frac{1}{\overline{Lm}^2}$ vaut $\frac{1}{\overline{Om}^2}$ d'après la relation classique, dans un triangle rectangle $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$. Ce fait a été rarement utilisé.

La quatrième question a présenté pour les candidats de plus notables difficultés ; elle était demandée sous forme d'une recherche, mais les résultats s'en devinaient rien qu'à la lecture du texte. Quelle est l'homologue, par (ω), d'une droite D passant par A ?

La droite indéfinie mM (m étant supposé, sur D, distinct de A) forme avec Om un angle invariable de grandeur et de sens, égal à celui que D forme avec OA ; on a bien su déduire de cette remarque l'enveloppe de mM ; il suffit de considérer les hauteurs OB, OH homologues dans les triangles semblables OAm, OMm ; le cercle de diamètre Om passe par le point fixe B et par H ; l'angle des droites Bm, BH vaut, à π près, l'angle (Om, OH) (angles inscrits), lequel est

égal, par similitude, à l'angle (OA, OB) constant ; H décrit donc une droite fixe D_1 passant par B. Qualifions D_1 : c'est la tangente en B au cercle de diamètre OA. L'enveloppe de mM est la parabole (P) de foyer O et de tangente au sommet D_1 ; (P) est tangente, en particulier à la droite D. La construction classique des tangentes à (P) issues de A utilise, si l'on veut, l'intersection du cercle de diamètre OA avec la tangente au sommet D_1 : on a vu qu'il y a contact entre ce cercle et D_1 , donc les tangentes à (P) issues de A sont confondues : ainsi (P) est tangente à D en A.

Si nous considérons maintenant les tangentes à P issues de m , qui sont mA et mM , elles sont d'après Poncelet, vues de O sous des angles symétriques par rapport à Om ; ce qui établit que mM touche (P) au point M. Ce dernier raisonnement a eu plus de succès que celui que nous donnons ci-dessus pour le point A. Aussi, même dans de bonnes copies, le fait que (P) passe par A n'est pas justifié clairement.

Quelle est l'associée d'une droite quelconque Δ ? D'après I c'est une ligne déduite d'une parabole telle que (P) par une similitude de centre O, donc une autre parabole de foyer O ; on n'a pas su la définir en fonction de la droite Δ . Il suffisait de la caractériser par son sommet qui est l'associé S du point s projection de O sur Δ .

Cette lacune dans les esprits n'a pas permis de bien expliquer que toute parabole de foyer O est l'associée de deux droites symétriques par rapport à O ; on s'est borné à deviner et à signaler ce fait ; dans bien des copies on relève des affirmations contestables telles que la suivante : la parabole est l'associée d'une infinité de droites Δ (ce qui n'est correct que si on fait varier le point de base A avec Δ).

Le défaut qui est apparu ici est bien connu : il consiste à entrevoir vaguement la réciproque d'une propriété démontrée, avant que de préciser judicieusement les termes de son énoncé. Cette observation s'applique à toute la suite du problème.

Dans la cinquième partie, que l'on aurait pu traiter avant la quatrième sans inconvénients, on demandait de montrer qu'une ligne (γ) passant par A est tangente en A à son associée (Γ) : le point A est visiblement son propre associé, ce qui n'autorise pas à conclure que (γ) et (Γ) sont tangentes parce qu'elles y ont un point commun. La considération des seuls triangles semblables OAm , OmM suffit pour établir que le supplément de l'angle AmM est égal à $AOm = mOM$, angle qui a pour limite zéro quand m tend vers A sur (γ) . Dans le triangle AmM , l'angle mAM est inférieur au supplément de AmM , il tend donc à fortiori vers zéro : si donc la demi-droite Am a une position limite, c'est aussi celle de la demi-droite AM . Cette question du contact dépasse la majorité des concurrents qui ont échafaudé maints développements incompréhensibles : le programme fait appel cependant à des raisonnements analogues. Par contre on a bien su déduire du résultat relatif à une ligne passant par A la disposition des tangentes en deux points correspondants quelconques des lignes associées (γ) et (Γ) : on aurait aimé cependant une conclusion, celle que la transformation (ω) conserve les angles en grandeur et en sens, à l'exception du cas singulier où ces angles ont comme sommet le pôle O, auquel cas (ω) double ces angles.

La sixième question et la septième question indiquent assez clairement une méthode pour rechercher la transformée par (ω)

d'une conique de centre O , en commençant par le cas où le point de base A est l'un des foyers de la conique. Les propriétés des points I et J , notées dans la deuxième partie, et la théorie de l'intersection d'une droite avec une conique définie par foyer, directrice et excentricité donnaient sans peine la solution. Peu de copies ont reconnu cette possibilité ; à la septième partie le souffle commence à manquer, et on ne situe pas simplement les résultats : à une hyperbole équilatère de centre O , (ω) fait correspondre une droite, dont le point le plus rapproché de O est l'associé des sommets de l'hyperbole ; à une hyperbole non équilatère de centre O , (ω) fait correspondre une branche d'une hyperbole ayant O comme foyer, le sommet appartenant à cette branche étant défini de la même manière ; à une ellipse de centre O , (ω) fait correspondre une ellipse de foyer O dont le sommet le plus voisin de O est encore donné par cette même règle.

La huitième question (résolution et construction d'un triangle, liée à l'étude de la figure $OAMmm'$) n'a donné lieu à aucune solution convenable, parce qu'abordée trop tardivement. Il n'en a pas été tenu compte, mais nous relevons comme par le passé le peu de goût que les élèves de la classe de Mathématiques montrent pour la résolution des triangles, systématiquement mise à l'écart dans les compositions où elle fait l'objet de questions posées, même discrètes.

Dans l'ensemble, les résultats du concours sont moyens, mais au-dessus du médiocre. Le Jury a accordé trois prix et neuf accessits, en se montrant très large : la meilleure copie primée atteint le total de 15,3 sur 20 : les dernières sont au voisinage de 8.

Peu de copies, même parmi celles qui ont été retenues, sont indemnes d'inexactitudes ; toutes contiennent, soit des lacunes, soit des obscurités. Mais des qualités certaines se sont manifestées au cours de cette compétition un peu longue. Insistons sur les améliorations possibles et souhaitables :

D'une manière générale, on s'inspire trop du seul énoncé, pour effectuer des vérifications formelles des propositions qu'il indique à titre de repères : le pouvoir suggestif de ces vérifications n'est pas assez exploité, et au moment où il devrait l'être. Bref il y a quelque désordre dans l'inventaire personnel que l'élève devrait lui-même tirer de ses recherches : ce qui explique sa faillite à réussir lorsque les indications de l'énoncé ne le soutiennent plus.

Au point de vue de l'exposition, il semble que les « forts en math » qui font preuve de qualités plus particulières de réflexion et d'observation, soient précisément ceux qui dissimulent le plus volontiers cette louable pénétration, par une concision trop extrême dans leur rédaction. Ils ne sont pas assez soucieux de soigner leurs exposés au point de vue logique : on croirait parfois que le raisonnement mathématique ne compte pas plus, pour eux, que les procédés du calcul mental. Les professeurs doivent combattre cette tendance à la sécheresse d'esprit, sans encourager pour autant le verbiage.

Il faut reconnaître par contre que beaucoup de copies moyennes, non retenues au palmarès de l'épreuve, attestent un souci plus marqué de la forme, et comportent des explications qui sont claires, élégantes, et ne négligent pas les intermédiaires.

Les figures ont été réalisées exactement et sont généralement claires, mais les lettres mal formées les rendent difficiles à suivre par le correcteur. Il faut imposer à l'élève de ne pas introduire sans définition de l'objet qu'elle désigne une lettre nouvelle, et même l'inciter à poser lui-même les problèmes qu'il est amené à résoudre ; stimuler en somme son initiative et restreindre l'arbitraire de sa fantaisie.

Cette fantaisie trouve son expression dans les libertés prises avec l'orthographe aussi bien qu'avec la logique : dans la copie la plus agréable à lire, on relève à maintes reprises les mots « enveloppe », « homotétie » et « assossée »... dans une autre « ce point est donc confondu avec lui-même ». L'effet en est aussi fâcheux que celui des affirmations commodes « nous savons que, dans un triangle... » (suit une propriété qui est dépourvue de tout usage, et qui est une réminiscence d'un exercice antérieur).

L'augmentation croissante des effectifs de nos classes de Mathématiques, la spécialisation des études et la fatigue mentale expliquent sans les excuser ces déformations de la langue et du bon sens. Mais reconnaissons qu'un goût prononcé subsiste dans ces classes pour les études scientifiques et particulièrement pour la géométrie, jugée matière attrayante. C'est à nos professeurs que nous devons l'entretien de ce goût et la qualité d'ensemble des concurrents qu'ils ont formés. Leur vigilance et le succès de leurs efforts dans ce domaine, malgré la qualité moyenne des trop nombreux élèves qu'ils ont à éduquer, sont de nature à nous inspirer une pleine confiance.

Le Président du Jury :

P. ROBERT.