

3. Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1946 (1)

Le problème de géométrie proposé (2), dans la préoccupation de renouveler les sujets habituels, en conduisant graduellement les concurrents à se mesurer sur un terrain neuf, était tiré de l'étude des transformations planes affines. Le thème des recherches imposées aux concurrents était destiné à leur faire aborder la composition de deux « symétries obliques », opérations de même type dont l'étude préalable ne comporte aucune difficulté. Il était nécessaire de guider de très près les élèves, ce qui a nécessité la séparation en deux problèmes des ordres d'idées à approfondir pour arriver à une conscience approximative des résultats visés.

Les résultats, cependant, n'ont pas été à la hauteur des désirs des auteurs du texte, malgré les espérances favorables éveillées par les résultats satisfaisants de concours antérieurs : aucun des concurrents n'est parvenu à donner l'impression d'une complète compréhension de l'ensemble du problème ; et le lien qui devait se révéler entre les problèmes I et II, semble n'avoir été guère soupçonné. Peu d'efforts supplémentaires auraient cependant conduit les meilleurs à entrevoir la solution dont le texte de l'épreuve fournissait tous les jalons. Les copies couronnées ont dominé le problème I et l'entrée en matières du problème II. Mais presque toutes ont buté sur le deuxième paragraphe de II où l'algèbre devait prêter secours aux chercheurs ; là aucun piège n'était tendu, l'énoncé soigneusement étudié, aplanissait tout véritable obstacle. Mais il faut relever, comme en maintes circonstances dans le passé, le manque de méthode et de réflexion de nos élèves lorsqu'il s'agit de mettre en équations un problème de calcul à origine concrète (en fait une simple question se traduisant par un système du premier degré à plusieurs inconnues, ne comportant aucune discussion). L'algèbre est trop considérée *in abstracto*, et son utilisation comme instrument de recherche est actuellement très insuffisante. Bref, la coordination de l'algèbre et de la géométrie ne s'est pas améliorée depuis 1923, terme de l'application des programmes de 1905. Et les progrès, en ordre dispersé, constatés dans ces disciplines lorsqu'on les envisage indépendamment l'une de l'autre, s'ils sont indéniables, ne font que faire ressortir davantage une certaine pauvreté dans l'adaptation de nos élèves à une culture équilibrant le goût de la géométrie et le sens utilitaire de l'application.

En passant en revue successivement les divers paragraphes des problèmes posés, on est amené d'autre part à constater des insuffisances techniques qui ont fait perdre du temps aux élèves, mais la

(1) Le Jury était composé de MM. ROBERT, Inspecteur général, président ; CAIRE, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Janson-de-Sailly ; DOLLON, professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Louis-le-Grand ; Mme DOMANGE, professeur de Mathématiques (Cours préparatoire à l'Ecole Normale Supérieure de Fontenay-aux-Roses) au Lycée Fénelon ; MM. MARTENOT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée St-Louis ; RIVET, professeur de Mathématiques (Navale) au Lycée Janson-de-Sailly.

(2) Voir l'énoncé p. 3 du *Fascicule E 25* (1946 B).

longueur du texte a certainement effrayé nombre de ceux-ci, et ils ont plus travaillé dans l'ordre du compartimentage que dans celui d'une intelligente synthèse devant fournir les matériaux indispensables à l'effort décisif final.

PROBLÈME I. — Première partie : Deux cercles (m) , (m') se coupent aux points f , φ ; p et p' sont deux points appartenant respectivement à ces cercles (m) , (m') , dont les centres sont désignés par m , m' . Quelle disposition des droites indéfinies φm , $\varphi m'$ et φp , $\varphi p'$ caractérise le cas où p et p' sont alignés avec f ?

Les symétriques p_0 et p'_0 de φ par rapport à m et m' , respectivement, sont alignés avec f sur la perpendiculaire en ce point à la droite φf , et sont sur les cercles (m) et (m') . Pour que les droites fp , fp' soient confondues, il faut et il suffit donc que (fp_0, fp) et (fp'_0, fp') soient égaux, à $k\pi$ près. Or $(fp_0, fp) = (\varphi p_0, \varphi p)$ et $(fp'_0, fp') = (\varphi p'_0, \varphi p')$. La condition recherchée est celle de l'existence d'une même rotation faisant passer des droites φp_0 , $\varphi p'_0$ aux droites homologues φp , $\varphi p'$ et se traduit par l'égalité, à $k\pi$ près :

$$(\varphi p_0, \varphi p'_0) = (\varphi p, \varphi p') \text{ ou encore } (\varphi m, \varphi m') = (\varphi p, \varphi p') + k\pi$$

condition que le texte donnait à vérifier. Les solutions les plus élégantes données dans les copies sont proches de la précédente. Mais peu de concurrents ont su donner à la présentation une forme concise, faisant l'économie de l'examen d'une réciproque pour une condition, démontrée d'abord nécessaire, et qui est visiblement aussi suffisante.

Les correcteurs signalent que beaucoup de démonstrations ne sont valables que pour certains cas de figure, et que la mise en œuvre des propriétés des angles inscrits, ne dépasse pas le niveau de débutants de Seconde : le maniement des angles orientés de droites n'est pas familier à la plupart des candidats. Il était, pour la suite, inutile de considérer des angles de vecteurs.

Deuxième partie : (t) désignant la tangente en un point i d'une conique (γ) , ellipse ou hyperbole, on demande de caractériser la correspondance de deux points de (t) tels que les secondes tangentes à (γ) issues de ces points sont parallèles.

On aiguillait les élèves vers une solution directe tirée de la construction classique de ces tangentes, en considérant (γ) comme lieu des centres des cercles passant par l'un de ses foyers f et tangents au cercle directeur (f') ayant pour centre l'autre foyer f' . Les points de (t) considérés étant appelés m et m' dans le texte, l'application de la première partie de I s'imposait d'elle-même :

Les cercles (m) et (m') de centres m et m' et passant par f , se recoupent au point φ , symétrique de f par rapport à t , et qui est le point de contact avec (f') du cercle, de centre i , passant par f . Les points p et p' de rencontre de (f') avec les cercles (m) et (m') (autres que φ) doivent être alignés avec f ; la relation $(\varphi m, \varphi m') = (\varphi p, \varphi p') + k\pi$ exprime donc le parallélisme des secondes tangentes (d) , (d') .

Mais là, ceux qui n'ont pas observé que φp et $\varphi p'$ sont respectivement perpendiculaires à $f'm$, $f'm'$ ont été handicapés. Il résulte de cette remarque que $(f'm, f'm') = (\varphi p, \varphi p')$ à $k\pi$ près, d'où la nouvelle forme de la condition visée :

$$(\varphi m, \varphi m') = (f'm, f'm') + k'\pi$$

Elle exprime que les points m, m', φ, f' sont sur un même cercle, jalon que le texte indiquait encore.

Malgré les facilités ainsi offertes, des concurrents ont compliqué, inutilement, et parfois avec ingéniosité, la démonstration : beaucoup ont eu recours aux théorèmes de Poncelet sur les tangentes aux coniques.

Une nouvelle transformation de la condition la rend plus expressive pour la suite, et nous débarrasse de la considération du point φ : m et m' doivent être inverses dans l'inversion de pôle i échangeant f' et φ ; sa puissance est $\overline{if'} \cdot \overline{i\varphi} = \varepsilon \cdot \overline{if} \cdot \overline{if'}$, ε étant égal à -1 si (γ) est une ellipse, à $+1$ si (γ) est une hyperbole. La distinction des deux cas n'était utile qu'à cet endroit et fait jouer la nature du contact, avec (f') , du cercle de centre i , passant par f . On relève à cet égard des affirmations erronées, même dans les meilleures copies, quoique leur influence soit mineure. L'énoncé n'indiquant pas que $\varepsilon = \pm 1$, c'était à l'élève de le préciser, ce qui n'a pas été fait, dans nombre de copies où l'on se borne à parler du signe de ε .

Troisième partie : o étant le centre de (γ) on prend, sur la demi-droite symétrique de la demi-droite oi par rapport à l'axe focal $f'of'$ le point g tel que $oi \cdot og = \overline{of}^2 = \overline{of'}^2$. On demande de comparer les bissectrices de if, if' à celle des vecteurs $\overrightarrow{io}, \overrightarrow{ig}$ et de démontrer que

$$if \cdot if' = io \cdot ig$$

Le symétrique k de g par rapport à l'axe non focal Oy de (γ) est sur la demi-droite d'origine o , opposée à oi . Le produit (de mesures algébriques) $\overline{oi} \cdot \overline{ok}$ est négatif et sa valeur absolue est $\overline{of}^2 = \overline{of'}^2$: ainsi la relation $\overline{oi} \cdot \overline{ok} = \overline{of} \cdot \overline{of'}$ est vérifiée, les points i, f, f', g sont sur un même cercle (ω) [en réservant le cas où i est un sommet d'axe focal sur (γ)]. Ce cercle a son centre sur la médiatrice de ff' , qui est Oy , et aussi la médiatrice de gk ; il passe donc par g . La droite ff' partage le cercle (ω) en deux arcs, dont le premier contient i et le second k (parce que o est entre i et k) : par symétrie d'axe Oy le second arc contient aussi g . Les angles, inscrits au cercle (ω) , $\widehat{fik}$ et $\widehat{gif}$ interceptent des arcs symétriques par rapport à Oy , ils sont superposables et comme les cordes ik et ig sont toujours intérieures à l'angle des cordes if, if' , les angles $\widehat{f'if}, \widehat{kig}$ ont même bissectrice. La bissectrice de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{io}, \overrightarrow{ig}$ est aussi celle de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{if}, \overrightarrow{if'}$. Les triangles oif', gfi sont semblables (angles en i égaux, angle $\widehat{if'o}$ égal à l'angle $\widehat{igf}$). On en déduit aisément la relation $if \cdot if' = io \cdot ig$.

Quelques élèves connaissaient ces propriétés de la figure appelée quadrilatère harmonique, qu'on n'entendait pas d'ailleurs, considérer comme classique.

On demandait encore de construire les points f, f' connaissant le centre o , le point i , la droite (t) passant par i , ainsi qu'un couple

de points m, m' situés sur (t) , sachant qu'ils doivent vérifier la relation $\overline{im} \cdot \overline{im'} = \varepsilon \cdot if \cdot if'$ avec $\varepsilon^2 = 1$.

On peut à priori connaître s'il faut prendre $\varepsilon = -1$ ou $\varepsilon = +1$ selon que m et m' sont de part et d'autre, ou non, de i sur (t) . Il est visible que la bissectrice des rayons vecteurs cherchés if, if' est connue [c'est la perpendiculaire en i à (t) dans le premier cas, (t) elle-même dans le second cas] : la connaissance de la *demi-droite* ig en résulte, et celle de la longueur ig est également assurée par la formule $ig = \frac{im \cdot im'}{io}$. g étant ainsi déterminé sans ambiguïté.

k en résulte, ainsi que le cercle (ω) dont l'intersection avec la bissectrice de l'angle $\widehat{iog}$ donne les points f et f' cherchés. Une synthèse, ou justification de la convenance des résultats, est nécessaire en bonne logique. Malgré tous nos efforts déployés pour réclamer de nos élèves, la compréhension de cette synthèse, constatons qu'elle est généralement délaissée : elle n'offrirait pas ici de difficulté particulière. Les correcteurs signalent l'absence de précision de la rédaction des copies dans cette partie : certains candidats trouvent deux points g , quitte à en exclure un en fin de discussion.

La *quatrième et dernière partie* du premier problème est une application immédiate : trouver une conique tangente aux quatre droites portant les côtés d'un parallélogramme donné, connaissant le point de contact avec une de ces droites. On n'a pas toujours justifié rigoureusement l'intuition du fait que le centre o de la conique cherchée est confondu avec celui du parallélogramme. Le problème se ramène immédiatement au précédent ; il a fallu encore se contenter d'une équivalence à demi établie.

PROBLÈME II. — 1^{re} partie. — Elle comporte l'étude de l'opération ponctuelle $T(D, \Delta)$, sorte de « symétrie oblique » dans laquelle deux points homologues du plan P sont sur une même parallèle à Δ et déterminent un segment dont le milieu est sur D ; D et Δ sont deux droites distinctes se coupant au point donné O .

Δ n'intervenant qu'en tant que direction, le point O n'a dans l'opération aucun rôle privilégié, parmi tous les points de D , qui sont « points doubles ». Une droite passant par O a pour homologue sa conjuguée harmonique par rapport à D et à Δ ; on n'a pas toujours pensé à utiliser cette notion de faisceau harmonique.

L'étude de l'homologue d'une droite quelconque du plan P n'est pas nouvelle si cette droite coupe D : lorsqu'elle est parallèle à D , on obtient la symétrique (véritable) de la droite par rapport à D .

Lorsqu'un point M subit une translation parallèle à D , son homologue subit la même altération ; il en résulte qu'à des droites parallèles correspondent comme homologues des droites parallèles.

L'homologue d'un vecteur $\overrightarrow{MN}$ est le vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ unissant les homologues M', N' de M et N . Ecartons le cas où MN passe par O et celui où MN est parallèle à D , auquel cas les triangles $OMN, OM'N'$ ont des bases équipollentes $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}$ et des hauteurs, qui sont relatives à ces bases, égales. Si la droite MN coupe D en M_1 , substituons

à $\overrightarrow{MN}$ le vecteur équipollent $\overrightarrow{M_1N_1}$ dont l'origine est M_1 : une substitution analogue régit le passage de $\overrightarrow{M'N'}$ à $\overrightarrow{M'_1N'_1}$ homologue de $M'N'$: par ces changements les aires des triangles OMN , $OM'N'$ sont inaltérées ; si l'on compare les triangles OM_1N_1 , $OM'_1N'_1$ où M'_1 se confond avec M' , leur équivalence apparaît immédiatement (base commune et hauteurs égales). En résumé, et dans tous les cas les aires des triangles OMN , $OM'N'$ sont égales ; et les vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{M'N'}$ ont des sens (de rotation) opposés autour du point O .

La plupart des concurrents ont employé la décomposition des aires envisagées parfois comme somme, parfois comme différence d'aires de triangles ayant un côté commun situé sur D ou parallèle à D . Ce raisonnement n'affecte pas toujours une complète généralité. Deux candidats ont introduit avec succès la notion de moment, voire (pour l'un d'eux) celle de produit vectoriel.

Dans les 2^e, 3^e et 4^e parties du II^e problème, on ne trouve plus que des résultats épars mal mis au point, et en général faux, les questions de sens et de signes réclamées par l'énoncé n'ayant pas attiré l'attention. Le souffle ayant commencé à manquer, dès qu'il s'est agi de préciser la mise en équation, dont il a été question plus haut, l'étude détaillée de ces questions nous conduirait à traiter ce qui n'a pas été entrevu dans les copies.

Les fautes n'ont pas été aperçues à temps malgré une certaine symétrie des calculs : nos élèves n'ont pas paru familiarisés avec l'emploi des permutations circulaires, tant des données que des résultats.

A noter cependant que la 3^e partie [produit de trois opérations nettement définies du type $T(D, \Delta)$] a été analysée avec un succès relatif par deux ou trois candidats ; et que le calcul demandé au début de la 4^e a été effectué dans l'une des copies.

Le jury après avoir examiné toutes les compositions, à raison de deux correcteurs pour chacune d'elles, a retenu pour l'examen final 28 copies : il a décidé de ne pas tenir compte des 5^e et 6^e parties, qui n'ont pas été abordées. Mais le barème adopté a dû être un peu sévère pour départager les meilleurs.

Les résultats de cette nouvelle correction n'ont pas mis en évidence de supériorités très manifestes ; cependant les trois premières copies, notées 11,52 (sur 20), 11,24 et 11,08 et qui se tiennent très voisines ont paru par leur intelligence générale dignes d'être couronnées, sinon imprimées. Il a été décerné huit accessits dont les moyennes sur 20 s'étagent de 10,60 à 9,72.

L'écriture difficilement lisible d'un des meilleurs élèves a failli le faire écarter du palmarès — un autre a perdu plusieurs rangs par la négligence de son orthographe. D'une manière générale la lecture de calculs lourds et pénibles à suivre a mis les correcteurs à très dure épreuve.

Le nombre des concurrents (175) est inférieur à celui de l'an dernier (223). Le tri des élèves présentés par leurs professeurs a été

plus sévère, le nombre des copies quasi nulles étant beaucoup plus faible.

Le niveau moyen semble le même que celui des concours précédents. Mais les meilleures copies ont montré moins de souffle cette fois.

Il n'y a aucune raison de marquer à ce propos le moindre découragement. Au terme de leurs études secondaires, nos élèves demeurent des « visuels » et ne sont pas encore des logiciens. Il faut reconnaître que l'introduction en Mathématiques élémentaires des méthodes affectant une certaine puissance de généralité, en particulier l'emploi des mesures algébriques (coordonnées, angles et aires orientés, géométrie des transformations) ne porte pas tout l'effet désirable. Il nécessite donc, dans la classe de Mathématiques Supérieures, une révision prudente et attentive.

L'initiation au domaine des nombres positifs et négatifs en algèbre, a été en 1941 reculée, passant de la Troisième à la Quatrième, ce qui est sans doute à l'origine de certaines insuffisances dans le sens qui vient d'être signalé. Mais l'observation directe et l'intuition doivent être développées aussi ; nous souhaitons que des épreuves écrites de physique soient rétablies au baccalauréat, pour réaliser un heureux climat de maniement de maints problèmes concrets ; les professeurs de mathématiques, en s'associant de leur côté à un effort du même genre, contribueront au rétablissement de la solide formation dévolue autrefois aux bacheliers d'élémentaires préparés sous le régime de 1905.

Mais les programmes dont la refonte s'amorce actuellement, n'auront leur pleine efficacité que lorsque la jeunesse reprendra goût au travail de mise au point et aux efforts de réflexion qui peuvent seuls assurer une forte culture ; nous avons confiance dans ses maîtres pour agir sur elle, malgré des difficultés accrues.

L'Inspecteur général président du Jury,
P. ROBERT.
