

DEUXIÈME PARTIE

Axiomes et postulats en géométrie

I. — Je trouve dans plusieurs ouvrages de Géométrie pour l'Enseignement Secondaire des considérations relatives aux axiomes et aux postulats qui me paraissent tout à fait surprenantes. On prétend y distinguer ainsi les axiomes des postulats : les axiomes seraient des vérités « évidentes par elles-mêmes », ou « dont l'évidence est manifeste ». Quant aux postulats, ce sont des vérités « que l'on admet sans démonstration ».

Je ne comprends pas du tout ce que c'est qu'une vérité dont l'évidence est manifeste ; ainsi considérons l'axiome fondamental de la Géométrie : « On peut déplacer dans l'espace une figure invariable » ; qu'y a-t-il d'évident ou de nécessaire là-dedans ? C'est un fait d'expérience vérifié approximativement pour les corps solides réels, et c'est une propriété qu'on attribue *par définition* aux figures de Géométrie, êtres de pensée déduits des objets réels par abstraction et par « passage à la limite ».

Considérons de même la propriété fondamentale de la droite : « Par deux points il passe une ligne droite et une seule » ; il n'y a là-dedans non plus ni évidence ni nécessité ! Les images de la droite (fil tendu, axe de rotation, rayon lumineux) permettent de vérifier cette propriété expérimentalement et dans certaines limites : si les deux points sont dans deux étoiles différentes il n'y a plus de vérification possible, ni d'ailleurs aucune image puisque la seule qui paraît subsister à cette échelle, celle du rayon lumineux, est soumise aux théories d'Einstein.

II. — Je rencontre dans deux manuels très différents, destinés à la classe de Seconde, le même exemple d'axiome, c'est-à-dire de vérité soi-disant évidente par elle-même : « Deux figures égales à une même troisième sont égales entre elles ». Or ce qu'on présente ici comme une évidence purement logique n'est pas autre chose que la *définition* même de l'égalité des figures géométriques.

Deux figures égales sont — tout le monde en est d'accord — deux figures *superposables*. C'est-à-dire qu'on peut les « superposer », ou poser l'une sur l'autre. Pour poser l'une sur l'autre, il faut *déplacer* la première dans l'espace et poser comme axiome que ce déplacement la laisse invariable. Dire que F_1 et F_2 sont égales à F_3 , c'est dire qu'on peut amener F_1 sur F_3 par un premier mouvement ; mais comme on peut amener F_3 sur F_2 par un autre mouvement d'après la seconde égalité, on peut amener F_1 sur F_2 par un mouvement, ce qui *démontre* que F_1 et F_2 sont égales. Cette démonstration utilise, d'une part la *définition* de l'égalité des figures géométriques, et d'autre part l'*intuition* que nous avons du mouvement, intuition dont nous ne pouvons pas nous passer et qu'il serait fastidieux — et sans doute chimérique — de vouloir réduire à un système d'axiomes.

En réalité, si je comprends bien les auteurs en question, les axiomes sont pour eux les principes de notre logique, et les postulats sont les vérités (géométriques ou numériques), que l'on admet sans démon-

tration. Mais l'exemple même qu'ils donnent montre à quel point leurs idées sont confuses, puisqu'ils confondent la notion logique d'égalité abstraite (qui doit être par nature *réci-proque* et *transitive*) avec la notion physique et expérimentale de l'égalité des figures géométriques. En réalité il faudrait dire les choses de la manière suivante : Si F_1 est superposable à F_2 , F_2 est superposable à F_1 , et si F_1 et F_2 sont superposables à F_3 , elles sont superposables l'une à l'autre. Par suite la propriété de deux figures d'être superposables a bien les deux caractères nécessaires (*réci-procité* et *transitivité*) de l'égalité logique, ce qui prouve tout simplement que le mot « égal » a été bien choisi en la circonstance !

III. — Je crois déceler l'origine psychologique de toute cette confusion : elle tient à la méfiance, voire même à la phobie de beaucoup de professeurs de Mathématiques à l'égard de l'expérience physique en général et du mouvement en particulier. Cette répugnance se manifeste par les conséquences les plus extravagantes telles que la proscription de la symétrie par rapport à une droite, qui fut érigée en dogme dans les programmes de ces dernières années. Ne pas parler de symétrie à propos du triangle isocèle ou du diamètre d'un cercle est évidemment une gageure.

En réalité, il n'y a que deux partis possibles.

Le premier est de regarder la géométrie comme une physique des solides invariables, mobiles dans l'espace, et de considérer les objets géométriques comme suggérés par l'expérience, avec leurs propriétés fondamentales (axiomes ou postulats), à partir desquelles les autres propriétés s'obtiennent par déduction logique. Ce point de vue a été formellement conseillé par Henri POINCARÉ, dont nul ne pourra contester la compétence. Il est conforme aussi à la psychologie des élèves, et au caractère de la culture qu'on doit leur donner, laquelle doit s'efforcer de les maintenir en contact étroit avec le réel. Henri POINCARÉ allait jusqu'à dire que notre logique est due à notre frottement avec le monde extérieur solide ; il pensait que des êtres fluides vivant dans un milieu entièrement fluide, auraient une tout autre logique (1).

Le second parti est celui de l'axiomatique moderne. Les axiomes ne sont pas non plus dans cette perspective des vérités « évidentes par elles-mêmes » mais ils constituent un ensemble de propriétés indépendantes et non contradictoires paraissant arbitraires, puisqu'elles sont détachées de leur origine expérimentale ; elles constituent la définition même des êtres mathématiques auxquels elles s'appliquent. Est-il besoin de dire qu'il serait ridicule et désastreux de prétendre introduire dans notre Enseignement Secondaire, même en Mathématiques Spéciales, l'exposé de D. HILBERT sur les axiomes de la Géométrie ?

Faute de vouloir opter franchement pour l'un ou l'autre parti, notre enseignement géométrique s'est condamné, depuis qu'il s'est refusé à suivre les indications si fécondes des plans d'étude et des instructions de 1902, à une incohérence et à une décadence de plus en plus profondes.

Maurice WEBER,

Professeur honoraire au Lycée Condorcet.

(1) Cf. *Science et Méthode*, Livre II, Chapitre II intitulé « Les définitions mathématiques et l'Enseignement ». (Flammarion, éd. de 1918.)