

VI. Documents officiels

9. Rapport sur le Concours, en 1938

de l'Agrégation des Sciences Mathématiques ⁽¹⁾

177 candidats (173 en 1937, 182 en 1936) ont achevé l'écrit. Parmi eux, quatre professeurs d'écoles normales et dix-huit d'écoles primaires supérieures, six appartenant à l'enseignement technique, et plusieurs instituteurs. 12 candidats ont abandonné en cours de route (22 en 1937, 16 en 1936). 20 candidats inscrits ne se sont pas présentés (26 en 1937, 16 en 1936).

Sur les 209 candidats inscrits, 150 environ avaient déjà subi le concours, 60 environ se présentaient pour la première fois.

Il y a eu 51 admissibles (38 en 1937, 32 en 1936), et 34 reçus (25 en 1937, 23 en 1936), dont 18 se présentaient pour la première fois.

33 admissibles des concours antérieurs (et souvent plusieurs fois admissibles) se présentaient cette année. 17 d'entre eux ont été de nouveau déclarés admissibles. La proportion est meilleure que les années précédentes. 12 ont été reçus. Mais les 5 autres, bien que deux fois ou trois fois admissibles, n'ont pu l'être, non seulement du fait de leurs leçons, mais aussi des exercices pratiques. Ils ont tous une note presque nulle, soit en épure, soit en calcul. Il leur manque aussi de la méditation sur des sujets délicats, de la discipline d'esprit, du soin, mais surtout, il faut y revenir, l'application et la volonté de s'astreindre à l'effort régulier d'un calcul et d'une épure.

Ils ont fait leurs preuves à l'écrit, comme aussi les 16 anciens admissibles qui, ne l'ayant plus été en 1938, se sont solidement groupés parmi les 40 candidats immédiatement classés après les admissibles. Tous méritent des encouragements, en raison de leur valeur et de leur persévérance. (L'admissibilité de nombre d'entre eux est ancienne, elle remonte même jusqu'à 1932).

Epreuves écrites ⁽²⁾

Mathématiques élémentaires (M. ROBERT). — Le problème proposé comportait deux parties divisées chacune en trois paragraphes. Les six paragraphes se suivaient par ordre de difficulté croissante.

Placé en préliminaire, le paragraphe 1 de la partie I est une étude de la figure formée par les « pôles cyclographiques » φ et φ' d'un cercle (C) (points situés sur l'axe du cercle à la distance de son centre égale à son rayon), d'une part, une « droite focale » (D) du cercle (C), d'autre part. L'énoncé définissait sous ce nom, une droite telle que la projection orthogonale du cercle sur un plan perpendiculaire à cette droite, ait un de ses

(1) Le jury était composé de MM. LECONTE, inspecteur général, président ; DELTHEIL, recteur de l'Académie de Toulouse ; BOULIGAND, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers ; DESFORGE, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée St-Louis ; ROBERT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

(2) Voir les énoncés pages 11, 12, 14, 15 des *Fascicules Spéciaux* 1938-A1° et 1938-A2°.

foyers sur cette droite, et dégageait pas à pas les premières propriétés d'une notion devenue classique, mais encore récente.

Cette étude, vue sans difficulté, a été jugée d'après la précision et la clarté de son exposition, parfois très bonne. Dans trop peu de copies, on a su éviter des longueurs de raisonnement relatives aux réciproques, en utilisant le fait évident qu'il existe deux droites (D), et deux seulement, parallèles à une direction donnée.

Le paragraphe 2 de I envisage la famille des droites normales à un cylindre de révolution donné aux points M d'une ellipse (E) tracée sur ce cylindre. Ces droites (D) sont les droites focales d'un certain cercle fixe (C), qui rencontrent un même diamètre de (C). Cette propriété a été bien justifiée, mais l'emploi de la trigonométrie a fait quelque peu négliger de définir le cercle (C) d'une manière expressive et géométrique : il n'est autre que le cercle orthogonal au plan de l'ellipse (E) aux deux foyers de cette ellipse ; le diamètre (Δ) de (C), mentionné plus haut, est l'axe du cylindre de révolution. Inversement les droites (D) focales d'un cercle (C) et issues des points d'un diamètre (Δ) de celui-ci, *intérieurs* à (C), rencontrent *une infinité* d'ellipses (E), dont deux sur chaque cylindre de révolution d'axe (Δ).

ω étant un point fixe de l'axe (Δ), à toute droite (D) rencontrant (Δ) à angle droit, correspondent deux droites parallèles (d) et (d'), déduites de (D) par les rotations d'angle droit autour de la parallèle (D_ω) à (D) menée par le point ω . Quand (D) varie dans la famille étudiée au premier alinéa du paragraphe 2, (d) et (d') enveloppent deux cercles, situés dans le plan II perpendiculaire à (Δ) en ω . Cette question a été traitée lourdement. On n'a pas observé que le choix de l'ellipse (E) sur le cylindre de révolution d'axe (Δ) qui la contient, a pour effet d'orienter les droites (D), (D_ω) ; *a priori* l'enveloppe proposée se décompose, la rotation définissant (d) ou (d') pouvant être opérée dans un sens ou dans l'autre autour de la droite orientée (D_ω).

La tendance systématique aux tracés plans, dans une telle étude, concernant l'espace, met des œillères à nombre de candidats. Il était naturel de commencer par traiter le cas où ω est centre de (C), qui se trouvait déjà traité au paragraphe 1. Les cercles (c) et (c') que l'on obtient comme enveloppes de (d) et (d') se présentent comme parallèles de cônes de révolution dont l'angle au sommet est un droit.

Ces cercles n'ont presque pas été qualifiés de manière simple, par rattachement au cercle (C) : ce sont les cercles du plan (II) ayant un de leurs pôles cyclographiques confondu avec un des pôles φ ou φ' de (C).

Le paragraphe 3 de I est une généralisation facile du paragraphe 2. On y considère les droites focales d'un cercle (C) issues des points, intérieurs à (C), d'une droite donnée (Δ) quelconque du plan du cercle. Leur propriété essentielle est de couper (Δ) sous un angle constant égal à celui que (Δ) forme avec le cercle (C).

Pour traiter cette question, très accessible, il est fait abus, dans beau-

coup de copies, de considérations trop élevées, — formules de trigonométrie sphérique, — transformation d'un double produit vectoriel ! — enfin, de géométrie analytique à deux ou trois axes de coordonnées. Les questions annexes ont donné lieu à une importante proportion de réponses correctes ; toutefois, la situation simple des résultats n'a pas toujours été aperçue. Nous regrettons la rareté des épreuves de géométrie descriptive à deux projections, qui auraient pu remplacer tant de figures faites à la diable, et permettre un coup d'œil d'ensemble sur les résultats.

La II^e partie du problème visait à démontrer, en utilisant les acquisitions de la I^{re}, un résultat remarquable dont voici la substance :

Deux droites (Δ) et (Δ_1) , non orthogonales, ayant pour perpendiculaire commune la droite (X) , étant données, on considère deux droites variables (S) et (S_1) , se coupant à angle droit, (S) coupant (Δ) à angle droit, (S_1) coupant (Δ_1) à angle droit. Si la droite (D) symétrique de (X) par rapport à (S) rencontre une ellipse fixe (E) tracée sur un cylindre de révolution d'axe (Δ) , la droite (D_1) , symétrique de (X) par rapport à (S_1) , rencontre d'une manière analogue une ellipse fixe (E_1) , tracée sur un cylindre de révolution d'axe (Δ_1) .

Dans les paragraphes 1 et 2 de II, les droites (Δ) , (Δ_1) sont supposées sécantes ; le cas général où ces droites sont non coplanaires, plus difficile, faisait l'objet du paragraphe 3.

Les concurrents avaient d'abord à démontrer que, lorsque (Δ) et (Δ_1) ont un point commun ω , les droites (D) et (D_1) sont droites focales d'un même cercle d'axe (X) .

Environ quarante copies contiennent des justifications correctes de cette propriété : on a bien su utiliser la composition de deux rotations de 180° autour des droites perpendiculaires (S) , (S_1) et voir que la proposition principale du paragraphe 3 de I permet d'achever le raisonnement.

Appelons « image de (D) par rapport au point ω » la droite (d) (ou (d')) déduite de (D) comme il a été détaillé au paragraphe 2 de I. En considérant de même une image (d_1) de (D_1) par rapport au même point ω , on devait ensuite étudier l'enveloppe de (d_1) quand (d) enveloppe un cercle (c) : bien entendu (d) varie dans le plan (Π) perpendiculaire à (Δ) en ω , et (d_1) dans le plan (Π_1) perpendiculaire à (Δ_1) en ω .

Deux figures planes suffisent à prouver qu'à condition d'associer convenablement les images (d) et (d_1) choisies pour (D) et (D_1) , on passe directement de (d) , tangente à (c) , à la droite (d_1) du plan (Π_1) sans plus considérer les éléments (S) , (S_1) , (D) , (D_1) . L'enveloppe (c_1) de (d_1) est un cercle ; le fait que deux tangentes à un même cercle sont également inclinées sur la corde joignant leur point de contact, et les propriétés des droites perpendiculaires dans l'espace, suffisaient pour cette étude.

Mais l'emploi de relations métriques et trigonométriques a détourné les concurrents de la voie géométrique. Nous avons cependant tenu un très large compte des efforts de ceux qui ont employé une telle méthode de calcul. Les résultats deviennent faibles au paragraphe 2 de II qui restait cependant une question abordable.

Le temps a manqué aux candidats pour aborder le paragraphe 3 de II. 189 candidats ont pris part à l'épreuve de Mathématiques élémentaires. La moyenne générale est 7,3 sur 20. Les candidats qui ont abordé la II^e partie sont au nombre de 59, trop peu nombreux.

Quarante-et-une notes atteignent la moyenne : deux 14,5 ; un 14 ; deux 13 ; trois 12,5 ; un 12 ; huit 11,5 ; cinq 11 ; huit 10,5 ; onze 10.

Vingt copies ont mérité 9,5 ou 9 ; vingt 8,5 ou 8 ; vingt-quatre 7,5 ou 7 ; vingt-deux 6,5 ou 6 ; vingt-deux 5,5 ou 5.

Quarante copies n'ont pas atteint la note 5.

Le soin de la rédaction et le souci de rendre l'exposé accessible à des élèves de la classe de Mathématiques, ont été des éléments de l'appréciation. Un certain lot de copies donne hautement satisfaction au point de vue pédagogique : ceci compense un manque général de maîtrise technique, que les notes précédentes semblent déceler cette année.

Mathématiques spéciales (M. DESFORGE). — Le problème proposait l'étude de quelques propriétés d'une famille de quartiques planes unicursales Γ , définies en coordonnées polaires par une équation de la forme :

$$r (A' \cos \theta + B' \sin \theta + C') = A \cos \theta + B \sin \theta + C,$$

certaines restrictions apportées à la signification des constantes réelles A, B, C, A', B', C' écartant la considération de cas particuliers classiques et une inutile complication dans les discussions.

Dans une première partie, une forme particulière de l'équation cartésienne des courbes Γ mettait en évidence une génération simple de ces courbes, ainsi que le rôle important que jouent dans leur étude la droite P et le cercle G respectivement définis par les équations : $A'x + B'y - C = 0$ et $Ax + By - C'(x^2 + y^2) = 0$.

Une analyse précise permettait de montrer qu'il n'existe qu'un seul cas de décomposition de Γ , la courbe étant alors l'assemblage d'une droite passant par le pôle O et d'une cubique circulaire unicursale. Par une similitude, on peut mettre l'équation de cette dernière sous la forme remarquable

$$z = h + \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \quad (h \text{ constante}), \text{ qui définit une strophoïde.}$$

Les droites passant par le pôle recoupent la courbe Γ en deux points M et M' ; le milieu I de MM' et le conjugué harmonique k du point O par rapport à MM' décrivent des courbes simples : conique, cubique circulaire unicursale, dont la détermination analytique était aisée. Il était tout indiqué d'ajouter quelques précisions sur la nature et la disposition de ces lieux géométriques, et particulièrement lorsque la quartique Γ est décomposée.

Une seconde partie comportait l'étude de quelques propriétés des points multiples des courbes Γ non décomposées. En utilisant leurs équations cartésiennes et polaire, on met en évidence qu'elles n'ont jamais de point triple, et qu'elles admettent en général trois points doubles distincts. La discussion précise des cas particuliers n'exige qu'un peu d'attention : suivant la position de la droite P par rapport au cercle G et au point O , la quartique peut avoir seulement deux points doubles distincts, ou même un seul.

La disposition des trois points doubles aux sommets d'un triangle équilateral s'obtient aisément : I et H étant respectivement le centre du cercle G et la projection orthogonale de O sur la droite P, la condition vectorielle, nécessaire et suffisante $\vec{OI} = \frac{2}{3} \cdot \vec{OH}$ donne immédiatement les rela-

tions cherchées entre les coefficients A, B, C, A', B', C'. La courbe correspondante est un cas particulier des courbes Γ admettant un axe de symétrie passant par le pôle. Il faut noter que l'existence d'un tel axe est réalisable de deux manières, le diamètre du cercle G passant par O pouvant être perpendiculaire à la droite P ou bien confondu avec elle. La forme que prend l'équation polaire de Γ dans le premier de ces cas conduit à définir ces courbes comme des conchoïdes de coniques par rapport à un foyer.

L'énoncé demandait alors d'indiquer les diverses formes des courbes Γ pourvues d'un axe de symétrie passant par O : il s'agissait surtout de dégager les éléments géométriques qui interviennent dans cette étude, et d'ordonner les résultats de cette discussion.

Une autre question complétait la seconde partie du problème : elle proposait l'étude des points de la quartique situés soit sur l'un des cercles du faisceau linéaire ayant pour points de base les points doubles, Ω et Ω' , en général distincts du pôle, soit sur l'un des cercles ayant pour centre le pôle. Ces deux problèmes sont intimement liés, comme le montre l'interprétation attentive des calculs ; l'emploi judicieux des coordonnées cartésiennes et polaires permet de nombreuses et intéressantes remarques.

Dans la troisième partie, la quartique Γ apparaissait comme la projection orthogonale d'une courbe gauche Δ , dont l'énoncé donnait une définition précise, équivalant à une représentation paramétrique en coordonnées semi-polaires, en fonction de l'angle θ pris comme variable indépendante. Une analyse de cette définition conduit à considérer Δ comme l'intersection complète de deux quadriques : un cône de révolution ayant O pour sommet et Oz pour axe, et une quadrique (de Hachette) définie par l'équation cartésienne $xP - kG = 0$ [$P \equiv A'x + B'y - C$ et $G \equiv Ax + By - C'(x^2 + y^2)$].

Ce fait établi, toute l'étude ultérieure de certaines des quadriques S passant par Δ ne présentait pas de difficultés ; l'intérêt des questions posées était d'attirer l'attention sur les relations variées qui existent entre ces surfaces S et la quartique Γ , et de permettre une étude géométrique de certains lieux demandés à la fin de l'énoncé, au moyen de l'utilisation d'une relation d'affinité évidente et de quelques notions faciles sur les faisceaux linéaires de cercles.

Ainsi, le problème était d'un abord simple, n'exigeait aucune érudition particulière, et ne pouvait surprendre un candidat normalement préparé, ayant réfléchi sur les notions essentielles de géométrie analytique. Chacune des trois parties comportait pourtant un point plus délicat, dont la solution exigeait un sens assez averti de l'emploi des méthodes de l'algèbre et de la géométrie : décomposition de la courbe Γ , étude de ses points multiples, détermination de la courbe Δ comme intersection complète de deux quadriques précisées.

La facilité relative du sujet permettait d'espérer un certain effort de composition, une présentation correcte et bien ordonnée des raisonnements et des résultats, quelque curiosité touchant les liens entre les différentes questions. D'assez nombreuses copies ont répondu à cette attente, mais partiellement seulement, surtout pour ce qui concerne les rapprochements souhaités.

D'autre part, les fautes graves sont fréquentes. Je soulignerai d'abord les deux plus marquantes : le maniement incorrect des coordonnées polaires, donnant lieu à des erreurs grossières (lieux des points I et K, intersection de la quartique et d'un cercle ayant pour centre le pôle), — et la méconnaissance, trop répandue, de l'idée fondamentale d'équivalence entre des systèmes de conditions d'origine géométrique ou algébrique, idée pourtant essentielle dans toute recherche, et dont la portée générale dépasse même le domaine des mathématiques.

Les questions un peu plus délicates de chaque partie ont arrêté de nombreux candidats. Ainsi, la décomposition de la courbe Γ donne lieu, trop souvent, à des considérations vagues ou inexactes, aboutissant à de longues digressions, sur des cas formellement exclus par l'énoncé ; quand l'étude est correcte, la curiosité ne va pas jusqu'à la recherche précise des éléments de la décomposition.

Peu de candidats ont traité d'une façon satisfaisante l'étude des points doubles ; il était indispensable de préciser la recherche lorsque la droite P passe par le pôle, ou lorsqu'elle est tangente au cercle G. La question si simple des points doubles placés aux sommets d'un triangle équilatéral a donné lieu à bien des fautes : la plus fréquente consiste à considérer implicitement la distance d'un point à une droite comme un élément orienté.

La recherche des axes de symétrie passant par O, faite, soit à partir de l'équation polaire, soit à partir de la définition géométrique est très rarement complète, le cas où la droite P est axe de symétrie étant en général oublié.

Bien peu d'indications intéressantes sont données sur la construction de ces courbes particulières : il ne pouvait être question de les étudier en détail, mais il était facile de donner les éléments d'une classification méthodique à partir des particularités essentielles.

L'oubli de la double forme ($r = a$, ou $r = -a$) de l'équation polaire d'un cercle ayant le pôle pour centre a conduit certains candidats à de graves fautes, leurs affirmations étant en contradiction flagrante avec des propriétés géométriques évidentes de la quartique ou avec les résultats classiques de la discussion d'une équation linéaire en $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

L'étude de la courbe Δ dans l'espace est rarement conduite avec précision. Il convient de remarquer que l'intersection du cylindre ayant pour section droite la quartique Γ , et du cône de révolution défini par l'équation $z = kr$, est une courbe du huitième ordre décomposée en deux courbes symétriques par rapport au plan xOy ; le procédé précis employé pour la définition de Δ distinguait ces deux courbes.

Les questions posées sur les quadriques V et W ont donné lieu, chez la

plupart, à des réponses fragmentaires, mal rattachées aux propriétés déjà connues de la quartique Γ : les liaisons étaient pourtant faciles à découvrir. La recherche des lieux géométriques relatifs aux quadriques W et à leurs sections planes a entraîné des calculs invraisemblablement longs et pénibles ; or, l'étude géométrique s'imposait ; bien rares sont les candidats qui l'ont compris.

Cette énumération des imperfections relevées dans les compositions, explique que, pour beaucoup, les notes d'ensemble ne soient pas très élevées. Les compositions bonnes ou satisfaisantes ne sont pas très nombreuses. Les trois meilleures ont obtenu respectivement les notes 17, 15, 14. Huit ont 13,5 ou 13 ; onze de 11,5 à 10. Viennent ensuite vingt-sept copies cotées entre 8 et 10 ; trente-neuf entre 6 et 8 ; trente-neuf entre 4 et 6 ; soixante-et-une entre 0 et 4. La moyenne de l'épreuve est 5,8.

Calcul différentiel et intégral (M. DELTHEIL). — 184 candidats ont pris part à cette épreuve. Le sujet proposé consistait en l'étude de la congruence (C) des droites tangentes à deux paraboloides de révolution homofocaux et égaux. Il comportait six parties, de difficultés largement graduées. Les candidats étaient invités à présenter de nombreuses remarques géométriques.

1° La première partie portait sur la correspondance entre un point M de l'espace et le cercle (μ) projection sur le plan xOy de l'intersection du paraboloïde (II) d'équation $x^2 + y^2 - 2ps - p^2 = 0$ avec le plan polaire du point M .

L'un des faits géométriques à mettre en évidence consistait en la détermination de l'enveloppe des cercles (μ) associés à une courbe de l'espace comme étant la projection sur xOy de l'intersection du paraboloïde avec la développable polaire réciproque de la courbe considérée. Cette propriété a été signalée par 47 candidats. Les questions préliminaires ont donné lieu à de bonnes réponses dans la moitié environ des compositions. La moyenne générale pour cette première partie du problème est 11,7.

2° La deuxième partie faisait intervenir à propos de la congruence (C) les questions les plus classiques : développables de la congruence, arêtes de rebroussement, orthogonalité des plans focaux, surfaces normales aux droites de la congruence.

Bien peu nombreux sont les candidats qui ont rattaché, comme il se devait, la propriété d'orthogonalité des plans focaux à la théorie des quadriques homofocales.

D'autre part, la propriété d'égalité des surfaces (S) normales aux droites de la congruence (C), laquelle résulte immédiatement du fait que cette congruence est de révolution, n'a été mise en évidence dans la plupart des compositions, que d'une manière insuffisamment nette.

Pour cette deuxième partie, 60 candidats ont obtenu une note supérieure ou égale à 15 ; la moyenne générale est 10,2.

3° Après une première partie tout à fait élémentaire et une seconde partie à peine du niveau moyen du Certificat de Calcul différentiel et inté-

gral, venaient deux parties d'une difficulté un peu supérieure, dont il paraissait cependant naturel d'espérer une solution correcte de la part de la majorité des candidats à l'Agrégation.

La troisième partie consistait principalement dans la recherche de toutes les congruences de normales telles que le plan médiateur de chaque droite de la congruence limitée à ses foyers contienne l'origine et la trace de la droite considérée sur xOy .

La condition évidente $\xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi = 0$ suggérait immédiatement le choix de la fonction inconnue $f(\theta, \varphi) = -\frac{\xi}{\sin \varphi} = \frac{\eta}{\cos \varphi}$, que l'intervention des hypothèses : Congruence de normales, foyers équidistants de xOy , déterminait aussitôt comme étant de la forme $\frac{k}{\sin \theta}$, k désignant une constante.

Vingt candidats seulement ont traité correctement cette question ; la moyenne générale pour cette troisième partie n'est que 4,2.

4° Il résulte d'une proposition de CHASLES sur les géodésiques des surfaces du second ordre, que l'arête de rebroussement de toute développable de (C) est une géodésique de celui des paraboloides étudiés sur lequel elle se trouve.

La détermination directe des géodésiques du paraboloïde (II) se rattachait donc très étroitement à l'étude de la congruence (C). Elle constituait l'objet de la quatrième partie ; des conditions initiales appropriées conduisaient à la détermination effective de l'une des géodésiques qui sont effectivement arêtes de rebroussement des développables de (C).

46 candidats ont su mettre en évidence (ou ont pris d'autorité pour point de départ) l'équation de Clairaut relative aux lignes géodésiques des surfaces de révolution. Mais la détermination précise de la courbe (Γ) demandée n'a été terminée que par 14 d'entre eux. Pour cette quatrième partie, la moyenne générale tombe à 3,3.

5° La détermination de l'enveloppe des cercles (μ) associés aux points M d'une courbe de l'espace, telle que nous l'avons précisée plus haut dans le compte rendu de la première partie, mettait en évidence, pour M décrivant la courbe (Γ), cette particularité remarquable que les cercles (μ) associés sont tous osculateurs à une même courbe du plan des xy .

Cette courbe, qui est la projection (Ω_1) de la courbe de contact (Ω) des tangentes à (Γ) avec le deuxième paraboloïde, admet donc (Γ_1) pour développée, tandis que la courbe (L), lieu des traces sur xOy des tangentes à (Γ), est la podaire de (Γ_1) par rapport à l'origine.

Cette partie n'a été abordée que par 20 candidats, dont la plupart se sont bornés à des aperçus rudimentaires ; deux seulement ont correctement établi la correspondance entre (Γ_1) et (Ω_1).

6° Enfin la dernière partie traitait des surfaces (Σ) telles que chacune d'elles est transformée par une rotation arbitraire d'axe Oz en une surface parallèle. Cette question n'a été abordée que par un tout petit nombre de

candidats ; aucun n'a pensé au rôle particulier joué par les surfaces (Σ) qui sont développables ; deux seulement ont obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne.

Ainsi qu'on pouvait le prévoir, les normales aux diverses surfaces (Σ) admettant le paraboloïde (II) pour l'une des nappes de leurs développées sont respectivement tangentes aux divers paraboloïdes homofocaux à (II) : ce résultat n'a été donné par aucun candidat.

Pour l'ensemble de la composition, appréciée suivant un barème large, 33 candidats ont obtenu 10 ou plus de 10 ; la meilleure note est 16 ; il y a un 15,5, un 14, trois 13,5, trois 13, six 12,5 ou 12, dix-huit notes de 11,5 à 10. En dessous de la moyenne, dix copies ont 9,5 ou 9, quinze 8,5 ou 8, soixante-trois de 7,5 à 5, soixante-trois ont moins de 5. La moyenne générale est 6,3.

La facilité du sujet comme son caractère classique pouvaient, semble-t-il, justifier l'espérance de bien meilleurs résultats.

Mécanique rationnelle (M. BOULIGAND). — L'appareil (A) étudié dans la partie dynamique du sujet apparaissait déjà dans sa partie cinématique, partie qu'on eût pu rejoindre en finissant par l'étude dynamique de l'appareil (A) quand ses deux disques se meuvent au contact du sol, suffisamment rugueux pour empêcher tout glissement.

Mieux valait ne pas dépasser les possibilités des bons candidats.

Moyennant quoi, l'épreuve a donné un rendement satisfaisant.

Il ne s'agissait d'ailleurs pas de demander, même à quelques aspirants éminents, de dégager avec ses fertiles conséquences, cette intéressante idée du solide principal d'un assemblage matériel, diffusée et exploitée à d'autres titres par M. Jean LE ROUX dans un ouvrage récent (1). A cette idée on peut rattacher une classe de problèmes dynamiques, comportant une disjonction, qui se produisait dans la question II, abstraction faite du 5°. Je n'y insiste pas (2). Je signale seulement qu'ici cette disjonction ramenait les 2°, 3°, 4° de la question II à des problèmes usuels sur la dynamique du solide dénommé Σ , le paramètre angulaire qui définit la rotation de l'un des disques par rapport à ce solide se réduisant à une fonction linéaire du temps.

Le 5° de la question II exigeait un sérieux entraînement à ces calculs mettant en œuvre les angles d'Euler. Elle a été convenablement traitée par quelques candidats.

Faut-il dire qu'au début de la question I, l'invitation faite à raisonner géométriquement n'a pas toujours été accueillie ? Une bonne moitié pourtant des copies se sont orientées dans la voie conseillée, qui, pour la question II, laissait le plus de temps disponible.

Voici maintenant quelques précisions sur la répartition des notes : le

(1) J. LE ROUX. *Leçons sur les principes mathématiques de la théorie de la gravitation* (Gauthier-Villars, 1931).

(2) Voir dans le numéro du 15 novembre 1938 de la *Revue Générale des Sciences* l'article intitulé : *Solide principal et dynamique de certains assemblages de solides*.

premier a obtenu 19,5, le second 18 ; deux troisièmes viennent ensuite avec 17,5 suivis par six cinquièmes *ex-æquo* avec 17 ; signalons encore un 16, un 15,5, trois 15, un 14 ; puis au-dessous encore trente-trois notes au moins égales à 10. Sur 177 copies corrigées, il s'en trouve donc 128 au-dessous de la moyenne, 60 candidats ont des notes inférieures à 5. La moyenne générale est 7,1.

Epreuves pratiques (1)

Il est à remarquer que les épreuves pratiques, épure et calcul, ont joué un rôle important dans le classement définitif des candidats. Pour compléter une indication donnée plus haut, disons que parmi les 34 nouveaux agrégés, 19 ont obtenu la moyenne dans l'ensemble des épreuves pratiques, et qu'un seul l'a obtenue parmi les 17 candidats ajournés à l'oral.

Épure (M. DESFORGE). — L'épure proposée était relative à une surface de révolution Σ du quatrième ordre définie par une famille de génératrices circulaires. Une transformation par inversion, par rapport au point de rencontre du cercle générateur et de l'axe de révolution, fait correspondre à cette surface un hyperboloïde de révolution à une nappe ayant pour méridienne une hyperbole équilatère. La méridienne de Σ est donc une lemniscate.

On demandait alors d'étudier l'intersection de Σ avec une sphère donnée. En dehors du cercle imaginaire de l'infini, la courbe commune aux deux surfaces est du quatrième ordre. Il était facile de démontrer que sa projection frontale était un arc d'ellipse. Cette courbe Δ apparaissait donc comme une biquadratique sphérique, tracée sur un cylindre du second ordre à génératrices de bout.

La construction classique des tangentes à l'intersection de deux surfaces de révolution, au moyen du plan des normales, mettait en évidence deux diamètres conjugués de l'ellipse, et en donnait par suite une définition géométrique précise. Les points d'arrêt de la projection frontale de Δ , séparant les branches réelles et les branches virtuelles, se déterminaient rigoureusement, soit en utilisant l'inversion déjà signalée, soit à partir des points communs à un cercle et à une ellipse dont trois points de rencontre sont connus.

L'intersection Δ présente un point double A, provenant du contact des deux surfaces ; la détermination des tangentes pouvait être faite simplement, soit au moyen des indicatrices (le point A étant parabolique sur la surface Σ), soit au moyen du cône d'erreur, dont on pouvait déterminer simplement une base, horizontale par exemple (hyperbole définie par des points et des tangentes), soit par le calcul.

Bien entendu, la considération du cylindre elliptique de bout contenant Δ , la section droite étant construite avec précision, permettait de compléter l'étude de l'intersection (tangentes de profil, par exemple).

La représentation du solide commun se faisait sans difficultés, ainsi que

(1) Voir les énoncés pages 27 et 28 du *Fascicule Spécial* 1938-A2°.

la recherche de l'ombre propre dans les conditions où était défini le point lumineux. La limitation des arcs de cercle formant séparatrice d'ombre sur la sphère se ramenait à l'intersection d'une droite et d'une ellipse.

La plupart des candidats ont su définir la forme de la méridienne de Σ et la nature de la projection frontale de Δ . Mais la mise en évidence des particularités géométriques, leur utilisation pour la construction de certains éléments, la démonstration des propriétés importantes, n'ont pas toujours été satisfaisantes.

Ainsi la construction des tangentes au point double a donné lieu à bien des tracés incorrects. Un seul candidat a déterminé effectivement les points d'arrêt de la projection frontale. Très rares sont les notices qui justifient complètement les propriétés géométriques ou descriptives utilisées pour le tracé exact de l'ellipse.

Quant à l'exécution graphique, elle est assez rarement convenable, et bien des erreurs, particulièrement dans le tracé des séparatrices d'ombre, sont dues à des inexactitudes et à des négligences dans les constructions.

Les notes attribuées aux cinquante-et-une compositions sont échelonnées de 17 à 0 ; les quatre meilleures sont : un 17, un 16 et deux 15. Viennent ensuite dix-sept épreuves cotées entre 10 et 14 ; treize candidats seulement ont des notes inférieures à 6. La moyenne générale est voisine de 9.

Calcul (M. DELTHEIL). — Le sujet proposé aux 51 admissibles se rapporte à la navigation : il consiste dans le calcul de la longueur du trajet d'un point A_0 situé au large de New-York au point A_1 situé à l'entrée de la Manche, soit le long d'un arc de grand cercle, soit le long d'un arc de loxodromie ; en outre, les candidats étaient invités à calculer la longueur de l'arc HK du méridien moyen des méridiens de A_0 et A_1 .

Bien que les données fussent exprimées dans le système sexagésimal, il y avait un intérêt évident, fort bien aperçu par plusieurs candidats, à utiliser les tables relatives à la division en grades ; le rayon terrestre, exprimé en kilomètres, étant en effet pris égal à $\frac{20.000}{\pi}$, l'arc de grand cercle correspondant à un grade mesure exactement 100 kilomètres.

Les trois résultats demandés, qui sont respectivement 5200, 5365,4 et 602,3 kilomètres à deux hectomètres près, n'ont été donnés exactement et complètement que dans une seule composition.

Le premier résultat, tout à fait facile, a été donné par 29 candidats ; parmi les 22 autres, certains ont commis des erreurs banales d'interpolation ou de lecture qui ont faussé plus ou moins grossièrement leur calcul ; quelques-uns ont employé des méthodes d'une complication telle qu'il ne leur était pas possible d'aboutir, ou ont pris pour point de départ des formules trigonométriques inexactes.

L'arc de loxodromie a été correctement calculé par 10 candidats. De nombreux résultats inexacts proviennent, en plus des erreurs de lecture ou d'interpolation, de la confusion entre logarithmes vulgaires et népériens

à propos de la primitive de $\frac{d\theta}{\cos\theta}$, et même d'erreurs grossières dans la détermination de cette primitive.

Au total, cette épreuve paraît avoir permis, dans un domaine trop souvent négligé, un classement très net des admissibles à l'agrégation. Les notes s'échelonnent de 1 à 19 ; 18 calculs ont obtenu la moyenne, et 14 n'ont eu qu'une note inférieure à 5. La moyenne générale de l'épreuve est 7,7.

Epreuves orales (1)

Jusqu'en 1936, les deux leçons (Elémentaires et Spéciales) étaient l'objet de deux tirages au sort indépendants l'un de l'autre. Il est arrivé de ce fait qu'un même candidat eût à traiter deux sujets mal assortis. Pour éviter cet inconvénient, c'est un ensemble de deux leçons groupées suivant leur nature et leur difficulté que chaque candidat a tiré en 1937. D'autre part, toujours en 1937, pour tenir compte de ce que les admissibles à l'Agrégation possèdent à peu près tous aujourd'hui l'ensemble des matières qui figurent au programme des leçons, le jury avait augmenté le nombre des leçons dont le texte n'est pas un simple extrait du programme.

Ces deux innovations ayant donné de bons résultats ont été reprises en 1938. La seconde a même été étendue, mais avec d'innies précautions pour rester simple, ne pas imposer aux candidats en un temps limité un effort trop grand qui risquerait de nuire au souci pédagogique toujours nécessaire, et pour tenir le plus grand compte de la difficulté des sujets. On s'est donc borné, lorsqu'on sortait du texte littéral, à ajouter une exercice facile, à proposer une application immédiate d'une théorie importante, ou à rapprocher deux parties différentes du programme. Exemples : Progressions géométriques ; somme des termes ; cas où le nombre de termes augmente indéfiniment ; application à la signification de symboles illimités des formes suivantes $0,373737\dots$, $0,429373737\dots$ — Equation réduite de l'hyperbole rapportée à ses axes de symétrie ; application à la détermination d'une hyperbole admettant pour axes de symétrie les deux axes de coordonnées, connaissant les coordonnées de deux point de cette hyperbole. — Détermination d'une sphère connaissant trois points et un plan tangent, deux points et deux plans tangents, un point et trois plans tangents. — Relations entre les coefficients et les racines d'une équation entière ; applications tirées de la géométrie analytique. — Les méthodes permettant d'étudier en géométrie descriptive l'intersection de deux surfaces coniques ou cylindriques, ont été traitées, et on demande de les appliquer à un ou plusieurs exemples simples qui illustreront des points importants de ces méthodes. — Exemples de construction de courbes planes du 3^e et du 4^e ordre dont l'équation est au moins du 2^e degré, par rapport à chacune des variables. (On ne reviendra pas sur la théorie des fonctions implicites).

Quelques leçons d'Arithmétique, sur la multiplication des nombres entiers, sur les diviseurs communs à plusieurs entiers, et même sur la racine carrée,

(1) Voir le texte des leçons jumelées page 28 du *Fascicule Spécial* 1938-A2°.

sont limpides et pleines de bon sens. Mais dans l'ensemble, on peut regretter bien des insuffisances qui confirment la faiblesse actuelle en arithmétique. A propos de la division des nombres entiers, un candidat ne domine pas du tout l'idée de soustraire avec méthode des multiples du diviseur, du dividende. Le calcul d'un quotient à une approximation décimale donnée ne met pas en évidence que l'on peut extraire le plus grand nombre possible de dixièmes, de centièmes,..., comme on a extrait dans la partie entière le plus grand nombre possible d'unités des divers ordres. La recherche du p.g.c.d. et du p.p.c.m. de deux entiers avant l'étude des nombres premiers marque une confusion complète entre les divers points de vue de la divisibilité. Enfin, une première leçon sur les fractions ne dégage pas le théorème fondamental sur la forme générale des fractions égales à une fraction irréductible donnée.

Les leçons d'Algèbre et de Trigonométrie donnent lieu à quelques remarques générales. Lorsque le texte d'une leçon (Révision du second degré en Première, par exemple) résume un chapitre un peu long, c'est l'opposé d'une étude détaillée qui convient, la première chose étant de dégager les idées essentielles. Ce ne sont pas toujours les questions les plus difficiles qui arrêtent le plus les candidats. Par exemple, l'un des points faibles les plus marqués dans l'étude de la fonction homographique est une simple appli-

cation ($y = \frac{x-1}{cx+1}$) ajoutée au texte classique. Un même sujet ne peut

pas se traiter de la même manière dans la classe de Mathématiques et dans la classe de Spéciales. A cet égard, deux leçons de mathématiques élémentaires sur la dérivée et la variation des fonctions appellent des regrets déjà exprimés. Elles sont faites de déductions et de soucis constants de rigueur. Au contraire, il faudrait procéder par induction et intuition, et s'élever peu à peu, au moyen d'exemples, jusqu'à la nécessité de l'étude rigoureuse qui viendra plus tard.

Une leçon sur l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ fléchit chaque fois qu'il est fait appel aux premiers éléments de la trigonométrie. Elle renferme cependant d'excellents passages sur les méthodes de résolution et sur l'inéquation correspondante. Sur le même sujet, un autre candidat, par ailleurs solide, dit qu'une telle équation se résout « au moyen de l'artifice qui consiste à poser $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ ». Ce n'est pas un artifice mais un procédé impor-

tant que l'on peut rendre naturel en faisant tourner l'axe des cosinus d'un angle α , en observant que $\sin(x + \alpha)$ et $\cos(x + \alpha)$ sont de la forme $a \cos x + b \sin x$, ou en remarquant que l'équation étudiée donne les points d'intersection d'un cercle et d'une droite ou les points de contact des tangentes menées d'un point à un cercle, et que dans ces deux problèmes, il y a un axe de symétrie.

Une première leçon sur les équations et inéquations trigonométriques précisait que l'équation $a \cos x + b \sin x + c = 0$ n'était pas dans le sujet. Un candidat qui a donné plusieurs fois sa mesure à l'écrit et a montré qu'il pos-

sédait sur la question toute la matière voulue, n'a cependant pas su la traiter. C'est ainsi que l'équation $a \cos x + b = 0$ et l'inéquation $a \cos x + b > 0$ ont été étudiées sans l'emploi du cercle trigonométrique, que l'équation $\sin 3x = \sin x$ n'a été résolue que par l'emploi de l'égalité

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x,$$

et que des généralités parfois inexactes sur les équations de la forme $f(\cos px, \sin px, \cos qx, \sin qx, \dots) = 0$ n'ont pu être bien appréciées.

Les leçons de Géométrie sont, dans l'ensemble, supérieures aux autres leçons de mathématiques élémentaires. De la personnalité et de la vigueur sur bien des sujets : Divisions semblables déterminées par une tangente variable à une parabole sur deux tangentes fixes, diverses formes de l'intersection d'une droite et d'une conique, inversion (le point de vue métrique est cependant un peu négligé), symétrie par rapport à une droite (dans une autre leçon qui touche au même sujet, on semble dire et on croit que si une figure a trois axes de symétrie rectangulaires concourants en O, le point O est centre), le volume de la pyramide, le théorème de Dandelin, les trièdres supplémentaires...

La leçon sur la longueur de l'arc de cercle (classe de Seconde) comme celles des années précédentes est bonne théoriquement, mais trop élevée et trop imprégnée de l'esprit de rigueur pour l'âge des élèves auxquels elle s'adresse. Dans l'étude de deux cercles ou de deux sphères considérés comme figures homothétiques et dans les prolongements relatifs à trois cercles, à trois ou quatre sphères, il y a lieu de traiter posément et complètement les divers cas envisagés, sans croire qu'il est nécessaire d'arriver le plus vite possible aux plans d'homothétie de quatre sphères, partie mal traitée parce qu'elle est mal préparée. Il ne faut pas que le désir de rapprocher et de préciser aille trop loin et puisse, par exemple, laisser aux élèves cette idée fausse que le problème des cercles passant par deux points et tangents à une droite est *identique* à celui des cercles passant par un point et tangents à deux droites. Dans l'étude du centre de rotation de deux figures planes directement égales, l'emploi constant du retournement et l'oubli des questions de sens viennent complètement gâter un exposé. Une leçon de géométrie descriptive sur la construction de trièdres donnés par trois éléments fondamentaux ne consiste pas à placer les données d'une manière quelconque par rapport aux plans de projection et à commencer des épures inutilement compliquées. Bien au contraire, il s'agit de placer les données aussi simplement que possible, et de faire jouer à la géométrie descriptive le rôle important et modeste d'auxiliaire dans l'étude des figures de l'espace. Ce rôle est trop souvent négligé ; les remarques présentées plus haut sur la composition de mathématiques élémentaires appellent de nouveau l'attention sur ce point. A propos des asymptotes de l'hyperbole, on peut constater que les idées les plus simples sur la notion d'asymptote ne sont pas encore assez répandues. Ne nous laissons pas de répéter que l'essentiel est de définir le point à l'infini et ensuite la tangente en ce point. Il ne faut pas adopter ou paraître adopter comme définition de l'asymptote qu'elle est la

position limite d'une tangente dont le point de contact s'éloigne indéfiniment. Les deux problèmes précédents sont théoriquement différents. Même en une leçon de Spéciales, avec l'aide de l'analyse qui éclaircit le problème, on ne l'a pas mieux vu. L'existence du point à l'infini, de la tangente en ce point n'ont pas été bien dégagées, et les exemples dits « pathologiques » donnés sur ce sujet n'ont pas eu toute leur valeur éducative parce qu'ils n'ont pas été exposés en détail et avec soin. Enfin nous avons entendu des fautes graves sur l'ordre des infiniment grands et des infiniment petits à propos de la position d'une courbe autour d'une asymptote.

Quelques leçons de *Mathématiques spéciales* dénotent de la fermeté d'esprit, en premier lieu une leçon sur des exemples de courbes du troisième et du quatrième ordre, qui a des côtés remarquables et apporte la preuve qu'on continue à prendre intérêt aux belles théories classiques sur les courbes algébriques. Citons encore des leçons de géométrie analytique sur le tore, sur les surfaces réglées, de mécanique sur le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale d'expression $-\frac{mk^2}{r^2}$ ou $-mk^2r$, de géométrie descriptive sur l'intersection des cônes et cylindres et sur l'hyperboloïde à une nappe.

Bien d'autres remarques seraient aussi à présenter sur les leçons de mathématiques spéciales. Dans des leçons de géométrie analytique ou d'analyse sur les équations différentielles $f(x, y') = 0$, $f(y, y') = 0$, $f(\frac{y}{x}, y') = 0$ la représentation paramétrique des courbes et des surfaces n'est pas suffisamment utilisée. Souvent, en algèbre ou en analyse, le point de départ n'est pas assez précisé : Le théorème de d'Alembert est-il connu, se place-t-on dans le domaine réel ou complexe ? Il importe de ne pas grossir la leçon sur la courbure des courbes gauches de trop vagues indications sur le contact d'une courbe et d'une surface, ou de deux courbes. Aucune des leçons classiques sur les séries, sur l'intégrale définie, sur la fonction e^x considérée comme fonction inverse de Lx (c'est bien entendu le candidat qui choisit cette méthode pour étudier l'exponentielle), sur les séries entières, n'a été très bonne et plusieurs ont été mauvaises. Nous allons énumérer quelques faiblesses pardonnables si elles s'accompagnent d'un souci suffisant de la précision d'un certain sens de la rigueur, et quelques erreurs foncières sur lesquelles il est impossible de passer. On énonce encore une partie de la règle de Cauchy en disant qu'il y a divergence si $\sqrt[n]{u_n} > k > 1$, on continue à attacher au théorème de Mertens une importance qu'il ne mérite pas dans un premier enseignement de l'Analyse, on ne sépare pas dans l'intégrale définie le point de vue historique et le point de vue moderne, on ne définit pas avec précision l'extension de la notion de limite développée dans l'intégrale définie, on opère la division de deux séries entières sans scrupule théorique comme s'il s'agissait de développements limités, on borne la recherche du développement en série entière des fonctions usuelles au mécanisme de l'opération.

Dégageons enfin du concours de 1938 une impression d'ensemble. Ce concours a été moins brillant que ceux des années précédentes, surtout à l'oral, mais il a révélé qu'un plus grand nombre de candidats étaient au niveau du concours, et c'est ce qui explique l'augmentation importante du nombre des admissibles et du nombre de reçus. D'abord, l'écrit a donné des résultats franchement bons. On en jugera par le tableau suivant. (Le total des notes d'écrit a pour maximum 80).

<i>Rangs</i>	<i>Totaux</i>		
	1936	1937	1938
1	61	66,5	60
10	42	41	47
20	32	37	42
30	29	32	38
39	28	29,5	37
51	25,5	26,5	34,5
70	23	22	30
100	18	19	24

La différence régulière (sauf pour les premiers) en faveur de 1938 est frappante. Sans doute le jury avait-il essayé de rendre les sujets un peu plus accessibles, mais là n'est pas l'explication, puisque ce sont précisément les deux compositions les plus faciles qui ont donné le moins bon résultat. Tout simplement, l'écrit de 1938 a été sensiblement meilleur que ceux de 1937 et de 1936.

L'appréciation de l'oral est moins aisée. La moyenne des leçons d'Elémentaires passe de 13 en 1937 à 12 en 1938, et celles de Spéciales de 12 à une valeur un peu supérieure à 9. Ces chiffres ne suffisent pas à rendre la physiologie du concours de 1938, ni à mettre en évidence la belle défense des admissibles et l'augmentation de la proportion des notes supérieures à 10 et assez voisines de 10. La cause principale de l'affaiblissement des moyennes de leçons est la diminution du nombre des notes élevées. Les moyennes en épure (9 contre 8) et en calcul (7,7 contre 7,3) apportent des indications plus exactes. Les nouveaux Agrégés ont vaillamment conquis leur titre, ils nous donneront de bons professeurs, et, dernière constatation favorable, un assez grand nombre des 17 admissibles non reçus ne sont pas loin du but. Qu'ils poursuivent leur préparation avec confiance !

Nous voici parvenus au terme d'un effort long et délicat que, pour la première fois, j'ai été conduit à suivre dans tous ses détails. Cette circonstance me donne l'agréable devoir de saluer mon prédécesseur, M. TRESSE. Après avoir, pendant de longues années, proposé à l'Agrégation des problèmes de mathématiques élémentaires d'une haute tenue scientifique et d'une préparation pédagogique achevée, M. TRESSE a présidé le jury avec une bonne grâce et une autorité intellectuelle et morale dont j'ai été le témoin. Il a été pour moi un exemple, et je veux l'en remercier, comme aussi de la confiance et de la vieille amitié sur lesquelles il a toujours appuyé notre collaboration.

Je voudrais aussi, puisque la tâche a été cette année plus lourde et plus

chargée de responsabilité, exprimer à mes Collègues du jury toute ma reconnaissance. Leur aîné peut dire ce qu'ils n'ont cessé de prodiguer en talent, conscience, jugement et bonté, au cours d'une longue collaboration franche et cordiale, depuis le choix des sujets jusqu'à la délibération finale.

Le Président du Jury,

Th. LECONTE.