

**5. Rapport sur la composition de mathématiques**  
**(classes de Première A, A' et B)**  
**au Concours général des Lycées et Collèges en 1938 (1)**

Le sujet proposé aux concurrents (2) reposait sur l'étude des sections d'un cube par un plan variable perpendiculaire à une diagonale. Plusieurs propriétés visées par l'énoncé étant simples et presque classiques, le texte était assez copieux. Mais les candidats étaient prévenus, par une note placée en tête du sujet, qu'on leur demandait une solution soignée des parties qu'ils pourraient traiter, de préférence à une étude superficielle de l'ensemble.

Dans la première partie intervenaient des polygones  $P$  déterminés par une variable  $x$ . Les deux valeurs  $a$  et  $3a - x$  de  $x$  donnaient le même polygone  $P$ . Pour  $0 < x < a$ , le polygone  $P$  était un triangle équilatéral de périmètre  $3x\sqrt{2}$ . Pour  $a < x < 2a$ , le polygone devenait un hexagone déduit d'un triangle équilatéral de côté  $x\sqrt{2}$  par la troncature aux sommets de trois petits triangles équilatéraux de côté  $(x - a)\sqrt{2}$ . Le périmètre d'un tel polygone était constant. L'hexagone était régulier pour  $x = \frac{3a}{2}$ . Pour  $2a < x < 3a$  on retrouvait un triangle équilatéral de périmètre  $3(3a - x)\sqrt{2}$ .

L'aire des premiers triangles trouvés était  $\frac{x^2\sqrt{3}}{2}$ . Celle des hexagones

était  $\frac{\sqrt{3}}{2}(-2x^2 + 6ax - 3a^2)$ , fonction invariante par le changement

de  $x$  en  $3a - x$ . L'aire des derniers triangles était  $\frac{\sqrt{3}}{2}(3a - x)^2$ . Le graphique demandé comportait trois segments de droites formant avec un segment de l'axe  $Ox$  un trapèze isocèle.

En général, l'aspect géométrique des résultats de cette première partie a été perçu par la grande majorité des concurrents. Mais beaucoup d'entre eux n'ont pas su donner à leur vision la forme algébrique correspondante et le changement de  $x$  en  $3a - x$  a été fait très rarement. Le sens du mot « caractériser » échappe à beaucoup de candidats. Les caractères de l'hexagone  $P$  apparaissent rarement. Dans une copie cet hexagone est déclaré « curieux, mais pas symétrique » ; dans une autre on donne comme section possible un dodécagone.

Dans la deuxième partie, l'inscriptibilité dans un cercle du polygone  $P$

(1) Le jury était composé de MM. CHENEVIER, Inspecteur général, président ; DOUCHEZ, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Buffon ; Mlle LECONTE, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée de jeunes filles de Versailles, MM. LÉGER, professeur de Mathématiques Spéciales Préparatoires au Lycée Louis-le-Grand ; PÉTRUS, professeur de mathématiques (Navale), au Lycée St-Louis ; WEBER, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Condorcet.

(2) Voir l'énoncé page 2 du *Fascicule Spécial* 1938-B1°.

était évidente pour un triangle et résultait immédiatement, quand P était un hexagone, de l'équidistance des six sommets au sommet O du cube. Le calcul de R, à partir d'une section plane de sphère, était alors immédiat. Les trois formes possibles de la valeur de  $R^2$  étaient

$$\frac{2x^2}{3}, \frac{2}{3}(x^2 - 3ax + 3a^2), \frac{2}{3}(3a - x)^2.$$

La dernière résultait de la première par le changement de  $x$  en  $3a - x$ ; la seconde restait invariante par ce changement.

Le graphique demandé comportait trois arcs de trois paraboles égales, disposés symétriquement par rapport à la parallèle à Oy d'abscisse  $\frac{3a}{2}$ .

Ce graphique fournissait immédiatement la solution de la question suivante : déterminer  $x$  pour que le rayon R soit égal à  $ka$ . Lorsque  $k^2$  était compris entre  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{2}{3}$ , on trouvait deux polygones  $P_1$  et  $P_2$  inscrits dans des cercles égaux.  $P_1$  était un triangle équilatéral pour lequel  $2x^2 = 3k^2a^2$  et  $P_2$  un hexagone pour lequel  $2x^2 - 6ax + 6a^2 = 3k^2a^2$ . Le rapport  $\frac{S_2}{S_1}$

était alors donné presque sans calculs sous la forme  $2(\frac{1}{k^2} - 1)$  et la variation en était immédiate dans l'intervalle de variation de  $k^2$ .

Cette deuxième partie a commencé à échelonner les candidats. L'inscriptibilité de l'hexagone en a arrêté beaucoup. Un concurrent s'en tire en disant « qu'il peut parler du centre de l'hexagone parce qu'il présente une certaine régularité » ; un autre écrit « qu'un polygone qui a un centre de symétrie est inscriptible » ; une troisième remarque que « le triangle équilatéral et l'hexagone régulier étant inscriptibles, les autres hexagones le seront par continuité ».

Le nombre des candidats qui ont utilisé le graphique pour la discussion demandée est infime. Tous ceux qui ont traité la question se sont presque unanimement adressés à une équation du second degré. Mais, comme il fallait en considérer deux, dans deux intervalles différents de  $x$ , ils ont été très gênés. Un concurrent, qui a utilisé le graphique, s'en excuse et invoque, pour cet errement qui lui paraît grave, le manque de temps. Il y a là une révélation d'un état d'esprit vraiment fâcheux et contre lequel il faut réagir. Quand un graphique donne une solution d'une manière rapide, exacte et complète, il ne faut pas lui préférer des calculs, même s'ils sont relatifs à des équations du second degré. La question relative au rapport  $\frac{S_2}{S_1}$  n'a été abordée que dans un très petit nombre de copies et d'une manière souvent compliquée.

Dans la troisième partie, les concurrents devaient d'abord dire si les deux morceaux du cube séparés par le plan de l'hexagone régulier étaient égaux. Très peu de réponses exactes ont été données. Une diagonale quel-

conque de l'hexagone régulier était un axe de symétrie pour le cube et pour le plan sécant. L'égalité des deux morceaux en résultait.

On demandait ensuite d'évaluer le volume compris entre la surface du cube, le plan central  $Q_0$  correspondant à la valeur  $x_0$  de  $x$  et le plan  $Q_1$ , de section hexagonale, correspondant à la valeur  $x_1$  de  $x$  qu'on pouvait supposer, par exemple, supérieure à  $x_0$ . L'énoncé suggérait d'utiliser sept pyramides ayant toutes pour sommet le centre du cube. On voyait, par un développement de deux facettes adjacentes du cube, que pour deux pyramides consécutives, les bases accolées formaient un parallélogramme de base  $x_1 - x_0$  et de hauteur  $a$ . D'où, pour six pyramides réunies, un volume mesuré par  $\frac{a^2}{2} (x_1 - x_0)$ , ces six pyramides ayant toutes pour hauteur  $\frac{a}{2}$ , distance du centre  $\omega$  aux facettes du cube. La septième pyramide avait pour base l'hexagone  $P_1$  et pour hauteur  $\frac{x_1 - x_0}{\sqrt{3}}$ . Son volume était immédiat, l'aire de  $P_1$  ayant été évalué plus haut. On trouvait alors, pour le volume demandé, l'expression :

$$V_1 = \frac{x_1 - x_0}{3} (3ax_1 - x_1^2).$$

Si on appelait  $V_2$  l'expression déduite de  $V_1$  par le changement de  $x_1$  en  $x_2$ , on pouvait affecter de signe  $V_1$  et  $V_2$  et constater que, dans tous les cas, le volume  $V$  compris entre les plans  $Q_1$  et  $Q_2$  était :  $V = V_2 - V_1$ . La vérification de la formule des trois niveaux ne présentait alors aucune difficulté et se réduisait à un simple exercice de calcul facile. Le coefficient  $\lambda$  était  $\frac{1}{6\sqrt{3}}$ .

Un seul candidat a su mener à bien le calcul. Un autre a obtenu un volume exact, mais par application préalable de la formule des trois niveaux. Des fautes de calcul ont été commises, en particulier des fautes d'homogénéité.

Dans la quatrième partie, on demandait aux candidats d'observer que les cercles  $C$  formaient deux cônes et une portion de surface de révolution qui, par sa définition même, contenait six arêtes du cube. Par rotation autour de la diagonale, ces six segments en donnaient une infinité d'autres situés sur la surface. On est surpris de constater que des candidats, qui se sont signalés par des bévues un peu grosses, connaissent le nom de l'hyperboloïde de révolution, ou de surface gauche de révolution. Mais en général ceux qui ont abordé cette partie ont dit des choses raisonnables. Leur nombre est très réduit.

La cinquième partie conduisait à la construction du cube à partir d'un triangle ou d'un hexagone  $P$ . La limitation des lieux des sommets en supposant connu un triangle  $P$  n'est pas faite. La symétrie par rapport au plan de  $P$  est souvent oubliée.

Enfin la sixième partie comportait la construction du cube connaissant le sommet  $O$ , la diagonale  $O\omega$  en direction et sachant que le sommet  $A$

ou le sommet  $A'$  se trouvait sur un cercle  $\Gamma$  donné dans un plan  $H$  perpendiculaire à la diagonale  $\Delta$ . Le sommet  $A$  se trouvait alors sur un cercle du plan  $H$ , d'axe  $\Delta$  ; le sommet  $A'$  était sur un cercle du même plan, de même centre et de rayon moitié.

Les cercles  $\Gamma'$  étaient, dans chaque plan  $H$ , tangents à ces deux cercles. Le lieu de leurs centres était constitué par deux cônes de révolution de sommet  $O$ . Les intersections de ces cônes avec une droite  $D$  fournissaient la solution de la dernière question posée. Un seul candidat a traité cette dernière partie convenablement.

Le Jury a reçu 349 copies dont cinq étaient blanches ou nulles. Après une première lecture, 36 copies ont été retenues dont les notes étaient supérieures ou égales à 6 sur 20. Une seconde et une troisième lecture ont conduit à l'élimination nouvelle de 18 copies. Les 18 copies restantes ont été revues par trois correcteurs et classées définitivement. Pour tenir compte de la longueur du texte, les notes ont été relevées de 25 0/0 environ. Malgré cela les deux meilleures copies n'atteignent que 12,5. Aussi le Jury n'a pas décerné de premier prix. Les deux copies notées 12,5 sont très différentes d'aspect. Dans l'une les troisième et sixième parties ne sont pas traitées. Dans l'autre il manque la cinquième et la sixième, et la troisième est fort incomplète.

Il vient ensuite une copie notée 12,2 dans laquelle les cinq premières parties sont abordées mais, sauf la première, traitées de façon très incomplète.

La quatrième copie, notée 11,5, ne contient rien sur le volume ; mais la sixième partie y est traitée honorablement, ce qui a racheté les lacunes des autres et valu à son auteur un second accessit. On trouve ensuite les notes 10,4 ; 10,3 ; 10 trois fois ; 9,6 deux fois. Les six copies non récompensées sur les 18 retenues ont des notes qui s'échelonnent entre 9,3 et 8.

La forme des copies continue d'être insuffisante. La rédaction est aussi malmenée que la logique. Un concurrent écrit que le quadrilatère  $P$  est un triangle. Un autre décompose un polygone en quatre triangles, en conclut que la somme des angles est huit droits et que l'inscriptibilité en résulte. Un troisième applique les cas d'égalité des trièdres à l'étude de l'égalité des deux demi-cubes de la troisième partie. Un quatrième déclare ces deux demi-cubes égaux comme ayant le même volume. Un dernier — parce que l'on veut mettre un terme à la stigmatisation de ces horreurs — annonce une aire constante pour un polygone à périmètre constant parce que le nombre des côtés ne varie pas.

L'orthographe est souvent fantaisiste. On trouve « exagone », « co-tient », deux « part » deux, « médianne », « poligone », « simétrie », il « atteind ». Un candidat écrit que « le plan du  $\Delta$  se déplace ||ment à lui-même ».

L'impression qui se dégage de la lecture de toutes ces copies est toujours attristante. On ne s'attend certes pas à voir tous les concurrents traiter le sujet en entier et sans fautes. Mais on voudrait ne pas rencontrer les gros-

ses erreurs qui ont été signalées. Le sujet proposé fait appel à l'observation et non à l'érudition. Quand des concurrents ont construit la courbe qui donne  $\frac{R^2}{a}$  en fonction de  $x$  et qu'on leur demande combien il y a de valeurs de  $x$  pour lesquelles  $R = ka$ , on voudrait que tous pensent à utiliser le résultat qui vient d'être obtenu. Est-ce trop demander à un élève de Première, candidat aux récompenses du Concours général, de penser que les diverses parties d'un problème peuvent être liées et que telle question prépare peut-être la solution de la suivante ? Nous ne le pensons pas.

Le sujet proposé cette année ne comportait aucune difficulté théorique, aucune vision délicate. Les résultats obtenus sont, dans l'ensemble, très médiocres.

*Le Président du Jury :*  
P. CHENEVIER.

---