

4. Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1938 (1)

1. Le problème de géométrie plane proposé aux candidats (2) concerne les triangles (T) dont un sommet C est fixe, les deux autres sommets A et B variant sur une droite fixe (Δ) de telle façon que la tangente en C au cercle circonscrit (CAB) soit fixe. Cette tangente coupe (Δ) en U et fait avec (Δ) un angle aigu α . La hauteur issue de C s'appelle CH.

La première partie, destinée à préparer les suivantes et surtout la seconde, dégage quelques propriétés simples :

Les bissectrices de CA et de CB sont fixes. (Leurs pieds sur (Δ) sont appelés J et K). Ce début est généralement bien traité, avec de l'imprécision cependant sur le sens des angles et en particulier sur la notion de droites anti-parallèles. Le fait que les cercles (CAB) sont homothétiques les uns des autres par rapport au point C est parfois utilisé. Le rôle du cercle de centre U et de rayon UC est aperçu dans quelques copies sans que, toutefois, les points J et K soient caractérisés par les relations simples $UJ = UK = UC$. Il y a lieu d'éviter, pour démontrer une propriété presque en évidence, et seulement pour cela, l'emploi d'une méthode indirecte comme une inversion par rapport au point C, aussi intéressante que soit cette inversion.

Les élèves ne se demandent pas lequel des deux points J, K est le pied de la bissectrice intérieure, et ils perdent ainsi une première occasion de voir qu'il y a deux séries de triangles (T), d'un côté et de l'autre de CU.

Calcul de la différence des angles en A et B d'un triangle (T). La plupart des candidats trouvent α ; le cas $\pi - \alpha$ leur échappe. Une seconde fois, ils manquent de réflexion et d'observation et n'aperçoivent pas qu'il y a deux séries de triangles (T).

Nous ferons la même constatation à propos du calcul des produits $\overline{CH} \cdot \overline{CJ}$, $\overline{CH} \cdot \overline{CK}$, dans lesquels pourtant on sépare les points J et K (C' est le milieu de AB).

Ainsi, à trois reprises, c'est en vain que l'attention des candidats est appelée sur une question de situation facile et importante. La faiblesse de la promotion s'est donc vite manifestée, et il ne s'agit pas seulement d'un manque de connaissances et d'une diminution de la culture, mais d'une atteinte à la faculté de regard, à l'esprit de réflexion, à l'aptitude au raisonnement, toutes choses qui font partie de la justesse d'esprit.

(1) Le Jury était composé de MM. LECONTE, Inspecteur général, président ; BASTIEN, professeur de mathématiques (Centrale) au Lycée St-Louis ; BRESSE, professeur de mathématiques (Centrale) ou Lycée Louis-le-Grand ; DELCOURT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Henri IV ; ROBERT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ; Mlle WAROUX, professeur de Mathématiques Spéciales Préparatoires au Lycée Fénelon.

(2) Voir l'énoncé page 3 du Fascicule Spécial 1938-B1.

Le calcul de $\overline{CH}$ est considéré comme difficile. Le fait que J et H, ou K et H, sont du même côté par rapport à C' n'est pas utilisé, bien qu'il règle la question de signe, ni remarqué bien qu'il se trouve prouvé par le calcul. Sur certains dessins, C' est placé entre J et H.

De l'imagination et de l'ingéniosité peuvent cependant être signalées. Quelques candidats rattachent le calcul de $\overline{CH} \cdot \overline{CJ}$ (J pied de la bissectrice intérieure) à la propriété des couples HJ, FF' de former une division harmonique (F, F' sont les points de contact avec AB du cercle inscrit et du cercle ex-inscrit dans l'angle C).

La deuxième partie consiste à construire et à résoudre un triangle (T) connaissant, soit la somme des deux côtés CA, CB, soit leur différence. Géométriquement, la solution résulte immédiatement des valeurs, $\frac{(CA - CB)^2}{4}$ et $\frac{(CA + CB)^2}{4}$, des produits $\overline{CH} \cdot \overline{CJ}$, $\overline{CH} \cdot \overline{CK}$. Au point

de vue trigonométrique, la résolution était limitée à la détermination des angles A et B, c'est-à-dire à l'étude des deux équations

$$\frac{\sin A \pm \sin B}{\sin A \sin B} = k,$$

la différence A — B étant donnée. Donc, aucune difficulté mathématique, il suffit d'un peu d'ordre et de jugement pour interpréter, discuter, et confronter les résultats trigonométriques et géométriques.

Nous n'avons pas obtenu de solution complète. Dans les meilleures copies, les résultats ne sont franchement bons qu'en géométrie ou qu'en trigonométrie. Il est à noter encore que la partie trigonométrique a effrayé les candidats, qui, en grande majorité, ne l'ont pas abordée, ou n'ont pu aller au delà d'essais pénibles et infructueux, alors que les égalités

$$CH = CA \sin A = CB \sin B$$

contiennent la mise en équation.

Quelques remarques intéressantes sont présentées sans être poussées assez loin : La construction géométrique se rattache au problème de Pappus, ou encore se ramène à la détermination d'une conique connaissant la droite (Δ) qui porte l'axe focal (A et B sont les foyers), connaissant aussi un point C et la tangente CJ ou CK en ce point, connaissant enfin la longueur de l'axe focal $CA + CB$ ou $|CA - CB|$.

Enfin, il y a lieu de rendre un hommage mérité à l'élève qui, n'ayant pas vu que la solution géométrique est conséquence immédiate de la première question, a su pousser jusqu'au bout une solution élémentaire personnelle.

Dans la troisième partie, on considère le cercle inscrit (I) dans un triangle (T), et le cercle ex-inscrit (I') dans l'angle C. On suppose que la bissectrice intérieure s'appelle CJ.

L'énoncé rappelle les principales étapes de la démonstration du théorème de Feuerbach. Mais au lieu d'opérer l'inversion habituelle de pôle C', on a choisi une inversion de pôle fixe H. La démonstration à laquelle on

parvient ainsi est un peu moins simple que la démonstration classique, mais tout à fait analogue. Les précautions prises avaient pour but de placer tous les élèves sur le même plan, qu'ils connussent ou non le théorème de Feuerbach. Cette expérience pédagogique a été curieuse à observer. Trop souvent, nous avons reconnu que des élèves étaient dominés par leurs souvenirs plus que par les suggestions précises de l'énoncé, au point de ne pouvoir aller jusqu'au bout. L'un d'eux croit bon de revenir à l'inversion de pôle C' , un autre de comparer les deux méthodes au détriment de celle du texte.

Le but principal que l'on poursuivait en proposant la troisième partie était de montrer qu'au delà du théorème de Feuerbach la figure tracée possède d'intéressantes propriétés. On demandait de *chercher le point* (c'est le point J) *en lequel la droite qui joint les points de contact du cercle d'Euler et des cercles (I) et (I') coupe le côté AB, et ensuite, de construire le triangle (T) connaissant cette droite.*

La première de ces questions a donné des résultats satisfaisants. Un seul candidat a vraiment abordé la seconde en ayant l'intuition que l'inversion suggérée dans le texte pouvait donner la solution. (L'étude directe de la figure la donne aisément aussi).

La quatrième et la cinquième parties sont relatives d'abord à l'enveloppe (E_1) des hauteurs des triangles (T) issues de A et de B. La courbe E_1 est une parabole dont la directrice est CU et dont le foyer est le symétrique de C par rapport à (Δ) . La parabole (E_1) a une enveloppe simple lorsque (Δ) varie en tournant autour du point U. (Cette enveloppe est formée de deux paraboles de foyer U). L'expression « Enveloppe des courbes (E_1) » n'est pas employée dans l'énoncé. On se borne à *la recherche des courbes (E_1) passant par un point donné, et à la discussion de ce problème*, qui conduit au fait que *les paraboles (E_1) restent tangentes à deux courbes fixes*, ces courbes étant visiblement formées du lieu des centres des cercles tangents au cercle de centre U et de rayon UC, tangents aussi à la droite UC. La propriété de contact annoncée résulte immédiatement de la construction classique de la tangente à la parabole.

Plusieurs candidats ont heureusement abordé cette partie du problème. L'un d'eux a même montré un véritable esprit géométrique, accompagné du don de s'exprimer à la fois avec précision et concision. Il a été classé le premier. Pourtant, il y a dans sa copie des insuffisances marquées au sujet des deux cas qui correspondent aux deux séries de triangles (T), et d'autre part la résolution trigonométrique n'y est pas abordée.

La quatrième et la cinquième parties concernent aussi, *pour les médianes des triangles (T), issues de A et de B, une propriété géométrique qui permet une étude géométrique de l'enveloppe de ces médianes.* Cette propriété est la suivante : Une médiane coupe (Δ) en A et la parallèle (Δ') à (Δ)

menée par le milieu U' de CU, en A'. On a la relation $\overline{UA} \cdot \overline{U'A} = \frac{\overline{UC}^2}{2}$,

qui est la traduction immédiate de l'égalité $\overline{UA} \cdot \overline{UB} = \overline{UC}^2$.

Nous reconnaissons là une génération tangentielle de l'ellipse dont UU' est un diamètre, le diamètre conjugué ayant pour longueur $UC\sqrt{2}$. Mais le point de vue d'un élève de la classe de Mathématiques est moins large. Aussi ne demandait-on pas de reconnaître la nature de cette courbe, mais seulement de montrer que sa propriété permet de l'étudier. Aucun résultat à ce point de vue, ni recherche ponctuelle, ni allusion aux affinités par lesquelles le correspondant du segment UU' devient un axe et même la courbe enveloppe devient un cercle, ni remarque concernant le fait que la courbe (E_2) est la section plane d'un cylindre à base circulaire. (Il suffit de lire dans l'espace la figure plane classique qui donne les affinités précédentes). Un seul élève a trouvé la propriété des médianes, et c'est tout.

Nous sommes ici à la limite d'un programme très vaste, je ne l'oublie pas, mais il s'agit de la fin d'un problème de concours général, et l'étude de la projection orthogonale du cercle conduit tout naturellement à ces faciles extensions que, d'ailleurs, les professeurs utilisent dans leurs exercices.

La démonstration élémentaire du fait que la courbe (E_2) est une ellipse est hors du sujet, répétons-le, et cependant, rappelons qu'elle résulte presque sans effort de ce que cette courbe est la section plane d'un cylindre à base circulaire. Il est en effet facile de trouver deux diamètres rectangulaires du cercle qui se projettent parallèlement aux génératrices suivant deux droites rectangulaires du plan de la section plane. (Détermination d'une sphère passant par deux points, le centre du cercle et le centre de la section plane, et ayant son centre sur la droite d'intersection du plan du cercle et du plan de la section plane). Ceci fait, la propriété de la courbe (E_2) indiquée dans l'énoncé est obtenue non plus seulement avec un diamètre, mais avec un axe, et cette fois, l'élève de la classe de Mathématiques peut retrouver aisément l'ellipse. Il y a là une attrayante préparation à la lecture des chapitres de notre maître, M. J. HADAMARD, sur la perspective et les propriétés projectives des coniques.

Terminons enfin cet exposé. On demandait, la droite (Δ) tournant autour du point U , de déterminer les courbes (E_2) tangentes à une droite donnée et de déduire de la discussion que chaque courbe (E_2) est tangente en deux points à une courbe fixe. La détermination des deux courbes (E_2) tangentes à une droite donnée est des plus simples. Les deux solutions sont confondues lorsque la droite donnée est tangente à une ellipse de foyers U et U' , la condition de contact annoncée étant, ici encore, une conséquence immédiate de la construction classique de la tangente à une conique en un point. Cette dernière question n'a été abordée par aucun candidat.

II. Les progrès constatés depuis plusieurs années dans l'ordre, le soin, la bonne présentation, se maintiennent à peu près. Mais il reste à faire. N'oublions pas les doléances exprimées il y a une vingtaine d'années par les chefs d'entreprise au sujet de certains rapports d'ingénieurs.

Le manque d'orthographe, cette fois, s'est fait remarquer dans les meil-

leures copies. Il y a eu peut-être davantage d'écritures peu lisibles. L'emploi de phrases clichées, d'expressions vicieuses, d'abréviations étranges ou incompréhensibles se retrouve. Les notations de l'énoncé ne sont pas toujours respectées. Il n'y a pas toujours concordance entre les lettres des figures et celles qui sont employées dans le texte de la copie. Parfois même les figures manquent. Trop souvent, on a l'impression que l'énoncé n'a pas été lu, relu, et médité comme il est nécessaire de le faire. Quelques candidats perdent pied dans la troisième partie où, pourtant, ils sont guidés pas à pas, et ils croient que de vagues propos rétabliront la situation. Il importe de ne jamais paraître donner le change.

J'arrête là ces diverses observations qui ne sont pas d'ordre mathématique, mais qui sont en étroit rapport avec l'efficacité de la vertu éducative des mathématiques. Nos professeurs en sont pénétrés, et se montrent, je le sais, vigilants aussi dans cette importante partie de leur mission.

III. En résumé, les résultats du Concours en 1938 sont restés modestes. Le jury, pour la première fois depuis d'assez longues années, n'a pas pu proposer que les treize nominations possibles soient accordées. Il n'a pu désigner que dix lauréats, malgré la facilité du sujet et les bienveillantes mesures prises, à propos du barème, après la première lecture. Mais il n'y a aucune raison de découragement. De même qu'on avait pu prévoir un résultat franchement bon en 1934 et en 1936, le Concours général de la classe de Première en 1937 avait annoncé une année faible.

Nos excellents professeurs de la classe de Mathématiques ont une rude tâche, alourdie cette année par l'augmentation des effectifs. Mais un tel afflux numérique ne peut pas ne pas comporter pour une part un véritable goût pour les études scientifiques. D'autre part, les retouches récemment apportées aux programmes de Seconde et de Première ne manqueront pas de produire leur effet. Enfin, la refonte en cours des programmes apporte de l'espoir.

En achevant ce rapport, je tiens à citer à nos collègues quelques lignes d'un membre du jury qui, pour la première fois, participait aux opérations du Concours :

« Mal servi par le hasard de la distribution des compositions, j'ai d'abord corrigé les deux plus mauvaises séries parmi les cinq du Concours puisque huit seulement d'entre elles ont pu être retenues et qu'il y a eu en tout vingt-sept copies retenues. Mais la correction finale des meilleures compositions m'a montré que quelques candidats avaient pénétré à fond une bonne partie du problème et fait preuve de qualités d'intelligence, de netteté, de maîtrise aussi, qui révèlent plus qu'un bon élève, et ces copies-là fixent le bon souvenir que me laisse la correction du Concours général. »

Le Président du Jury,
Th. LECONTE.