10. Rapport sur le Concours, en 1937 de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)

Le concours de 1937 marque enfin, après bien des années, un arrêt dans la progression du nombre des candidats ; à une unité près, les chiffres sont identiquement les mêmes que ceux de 1936 : 221 concurrents se sont fait inscrire, 195 ont pris part aux épreuves écrites. Les résultats arrivent également au même niveau puisque les moyennes nécessaires pour l'admissibilité comme pour l'admission restent exactement les mêmes : 29,5 sur 80 pour la première et 200 sur 400 pour la seconde, ces chiffres permettant toutefois de faire un plus large recrutement, 39 admissibles au lieu de 33, et 26 reçus définitivement, dont un au titre colonial, au lieu de 23.

(1) Le Jury était composé de MM. Tresse, inspecteur général honoraire, président ; Leconte, inspecteur général, vice-président ; Deltheil, recteur de l'Académie de Caen ; Bouligand, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers ; Robert, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

A ne considérer d'abord que les sujets admis dans les premiers rangs et, plus particulièrement, ceux qui sont arrivés les trois premiers, avec des moyennes de 16,6, 15,8 et 15,5, ce concours pourrait être jugé comme étant d'une haute qualité et se classer parmi ceux qui ont été les plus brillants. Une belle émulation s'est établie entre ces trois concurrents qui ont déjà fait preuve d'une personnalité marquée et ont mis en œuvre de belles qualités de natures différentes.

Passant maintenant à l'autre extrémité de l'échelle et continuant le rapprochement avec les années précédentes, nous ne pouvons que répéter ce que nous avons déjà signalé maintes fois concernant le nombre trop élevé de concurrents qui se présentent avec une préparation nettement insuffisante, et de ceux qui persévèrent pendant des années sans jamais dépasser une moyenne dérisoirement faible. L'an passé, nous signalions 50 concurrents n'arrivant pas, dans leurs compositions, à la moyenne de 3 : leur effectif s'élève cette fois à 55, et, parmi ceux-ci, un pointage nous permet de relever 20 récidivistes. On trouvera dans les observations relatives aux quatre compositions, les mêmes plaintes de tous les correcteurs sur le nombre trop élevé de copies témoignant d'une indigence et d'une ignorance indignes de candidats à l'Agrégation.

Cependant, si le concours de 1937 se rapproche du concours de 1936 par ce que nous venons de constater aux deux extrémités de l'échelle, en revanche il s'en distingue très nettement, si l'on examine la moyenne générale de l'ensemble, laquelle s'est sensiblement affaiblie. Des 26 nouveaux agrégés admis avec la moyenne minimum de 10, seize seulement dépassent celle de 11, neuf celle de 12 et cinq celle de 13 : la chute, après les trois premiers, est donc rapide. Il sera signalé, à propos des épreuves orales, que la note attribuée à dix-neuf des nouveaux agrégés, soit à plus des 2/3, dans leur leçon de Mathématiques élémentaires, est de 13 ou 14 ; cela présage sans doute des maîtres appelés à faire une carrière honorable en suivant les voies tracées ; nous voudrions espérer un peu plus : les mathématiques, autant que toutes les autres disciplines, ne remplissent bien leur rôle dans l'enseignement, que si elles restent toujours jeunes, sensibles aux conceptions nouvelles qu'apporte chaque époque ; il s'y trouve sans cesse à faire, à reprendre, et le Jury de l'Agrégation cherche à donner des indications dans le sens de cette recherche.

Epreuves écrites (1)

Mathématiques élémentaires (M. Lecomte). — Le problème proposé en 1937 est relatif au triangle $A_1B_1C_1$ construit à partir d'un triangle ABC, les points $A_1B_1C_1$ étant choisis sur les médiatrices de BC, CA, AB de telle manière que les angles (A_1B, BC), (B_1C, CA), (C_1A, AB) soient égaux à un même angle φ donné à π près dans le plan orienté.

On envisage aussi les trianges $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ qui correspondent aux angles $-\varphi$ et $\frac{\pi}{2}-\varphi$.

(1) Voir les énoncés pages 13, 14, 15 et 17 du *Fascicule Spécial* 1937-A.

La première partie du problème concerne des propriétés de la figure dont la démonstration par les méthodes anciennes serait lourde, alors que la preuve est aisée au moyen de la simple notion de somme géométrique de vecteurs et de l'idée de transformation par rotation et par homothétie. En particulier, le fait que AA_3 et B_1C_1 sont rectangulaires, est en évidence si l'on remarque que l'on peut passer par homothétie et par rotation de $\frac{\pi}{2}$ du contour $\alpha_1\alpha'\beta B_1$ (α_1 est le milieu de B_1C_1, α' le milieu de $\beta\gamma$) au contour $ACIA_3$ (I est le 4^e sommet du rectangle dont les trois premiers sommets sont α, C, A_3).

Bien que l'énoncé oriente les candidats vers une solution basée sur l'emploi des vecteurs, il y a fort peu de copies dans lesquelles les résultats de la première partie soient tous obtenus par les méthodes les plus simples. On aurait pu espérer, après l'effort vigoureux accompli en France depuis plusieurs dizaines d'années, que les premières notions de géométrie vectorielle et que l'idée de transformation avaient davantage pénétré l'esprit de la jeunesse actuelle. Dans de trop nombreuses copies, on se borne à de pénibles vérifications (par exemple, l'emploi ingrat du théorème de Ceva ou le calcul des différences $\overline{AC_1}^2 - \overline{AB_1}^2$ et $\overline{A_3C_1}^2 - \overline{A_3B_1}^2$) ou encore, à défaut de méthode géométrique, on utilise, parfois vainement et toujours longuement, la géométrie analytique. Trop souvent, le produit scalaire de $\overrightarrow{B_1C_1}$ et $\overrightarrow{AA_3}$ est calculé sans ordre ni méthode, et des notions trop élevées sur les vecteurs sont mises en jeu inutilement, d'une manière abstraite et lointaine.

La seconde et la troisième parties du problème sont des questions d'algèbre et de trigonométrie suivies d'applications géométriques. Une relation (indépendante de φ) de forme simple entre les côtés a, b, c du triangle ABC et ceux a_1, b_1, c_1 du triangle $A_1B_1C_1$ est annoncée dans l'énoncé parce qu'elle fait bien comprendre pourquoi, à partir d'un triangle quelconque ABC, on peut obtenir un triangle $A_1B_1C_1$ équilatéral ou semblable à ABC, alors qu'on ne dispose que du seul paramètre φ. Cette question est en général bien traitée ; cependant, nous avons lu trop souvent que le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral lorsque φ est solution d'une équation de la forme $P\cos 2\varphi + Q\sin 2\varphi = R$, ou de l'équation $\cos 2\varphi = \dfrac{b^2 - a^2}{2c\,(b\cos A - a\cos B)}$, sans qu'il soit ajouté que la valeur de $\cos 2\varphi$ est $1/2$.

Il y a deux triangles $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont alignés. L'équation en $\operatorname{tg}\varphi$ qui les donne a toujours des racines distinctes. Ce résultat n'est obtenu qu'exceptionnellement. Chose curieuse, il a échappé aux meilleurs candidats qui n'ont pas raccordé l'orthogonalité de B_1C_1 et AA_3 à la propriété du lieu de M_3 d'avoir deux points à l'infini distincts.

Signalons encore à propos de la troisième partie la difficulté qu'éprouvent les candidats à s'élever au-dessus des calculs pour les interpréter ou à abandonner le calcul pour revenir à la géométrie. Quelques candidats seulement ont traité géométriquement le lieu du point A. Les autres ont opéré analytiquement et bien souvent n'ont pas trouvé que le lieu est un cercle, disant simplement qu'il est une courbe du second ordre. Pourtant, le lieu des points tels que le quotient du carré de leur distance à un point fixe à leur distance à une droite fixe est constant, est une des applications les plus directes de la notion de faisceau linéaire de cercles.

La quatrième partie est une construction géométrique qui a été vue par une vingtaine de candidats au moyen de procédés variés. La méthode la plus rapide et la plus élégante est assez naturelle. Son principe est immédiat si l'on remarque que trois rotations connues de centres A_1, B_1, C_1 permettent de passer successivement de C à B, de B à A, de A à C. Le produit de ces trois rotations est un déplacement et, en supposant que ce déplacement ne soit pas une translation mais une rotation, le centre de cette rotation donne le point C.

La dernière partie du problème est relative à l'enveloppe de B_1C_1 et au lieu du point commun aux droites AA_1, BB_1, CC_1. Son étude, entreprise d'une manière complètement indépendante des idées d'homographie et d'involution qui doivent être familières aux candidats à l'Agrégation, représente un lourd effort de géométrie élémentaire que, visiblement, nous ne pouvions attendre après le développement des quatre premières parties. Mais nous devons signaler que dans beaucoup de copies, on s'efforce de démontrer par voie élémentaire que B_1C_1 enveloppe une parabole, ce qui est d'autant plus méritoire que le foyer de cette parabole n'est pas un des points fondamentaux de la figure. C'est la directrice qui est simple (la médiane $A\alpha$) et ce fait reste souvent inaperçu, ou, s'il est vu, inutilisé. Un seul candidat a su, en quelques lignes, dominer toute cette cinquième partie.

195 candidats ont pris part à l'épreuve de mathématiques élémentaires. La moyenne générale des notes, appréciées suivant un barème large, est 6 sur 20.

Vingt-cinq notes atteignent la moyenne : un 19 ; un 17 ; un 15,5 ; un 15 ; un 14 ; un 13,5 ; un 13 ; cinq 12,5 ; un 12 ; un 11,5 ; un 11 ; deux 10,5 ; huit 10. Non seulement ces copies renferment des résultats, mais elles sont en général rédigées avec un soin qui fait bien augurer des qualités que leurs auteurs sauront montrer dans l'enseignement. Onze copies ont mérité 9,5 ou 9 ; dix, 8,5 ou 8 ; vingt-cinq, 7,5 ou 7 ; vingt-six 6,5 ou 6 ; vingt-huit 5,5 ou 5. Il reste 70 copies qui n'ont pas atteint la note 5. C'est trop si l'on se reporte à la facilité du problème, aux indications utiles que renferme l'énoncé, à la variété des questions posées, et aussi à cette circonstance que les diverses parties ne s'enchaînent pas rigoureusement, la plupart d'entre elles pouvant être abordées indépendamment des précédentes. Comme l'an dernier, nous conclurons en disant que, sans aucun doute, un assez grand nombre de candidats affrontent l'agrégation de mathématiques avec des connaissances et une préparation insuffisantes.

Mathématiques spéciales (M. Robert). — Le problème avait pour but l'étude de deux familles de cercles de l'espace, engendrant une même surface. La première se présente ainsi :

Deux points I, J se correspondent homographiquement sur deux droites Δ, Δ', d'un plan ; il leur correspond le cercle T intersection des sphères points I, J. Le lieu de T est la surface en question, Σ. On suppose (pour qu'elle soit *doublement* cerclée) que la conique enveloppe de la droite IJ soit un cercle C, d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ dans son plan xOy. Le point A d'intersection de Δ, Δ' est pris intérieur au cercle C ; l'axe Ox passe par A et l'on pose $\overline{OA} = R \cos \alpha$. Δ et Δ' sont donc les tangentes au cercle C issues du point A, imaginaires conjuguées.

1[re] PARTIE. On y définit les cercles T, orthogonaux au plan xOy en deux points réels E, F. L'énoncé n'utilise à cet effet que des éléments réels : sa forme conduit presque immédiatement à l'aperçu qui précède, équivalent à la définition du texte :

Deux droites variables issues de A et conjuguées par rapport au cercle C, déterminent sur une tangente donnée Mt au cercle C, deux points M'M'', en correspondance involutive ; les cercles du plan xOy ayant les segments M'M'' comme diamètres, forment donc un faisceau. Les points I et J, intersections de Mt avec les droites Δ, Δ' sont les points de Poncelet (imaginaires conjugués) de ce faisceau. On demandait de calculer leurs coordonnées, puis celles des points E, F (réels) communs aux cercles du faisceau. Les droites isotropes des points I et J, dans le plan xOy, se coupent aux points E, F, « associés » des points I, J : ceci permettait de rattacher le second calcul au premier.

Cette introduction a arrêté, d'emblée, un tiers des candidats, qui ont le calcul comme seule ressource ; visiblement, il était inutile de former l'équation des cercles de diamètre M'M''.

Le cercle OEF, que l'on demandait de caractériser, a la propriété d'être indépendant du point A (c'est-à-dire de l'angle α), quand Mt est fixée : on trouve que ce cercle, appartenant au faisceau considéré, a son centre sur Oy. Il touche donc Ox en O. Nous n'avons pas relevé de démonstration géométrique de ce fait, dont l'intérêt est insoupçonné. Il en résulte, en effet, que la sphère O,T devient, dans une inversion ayant O comme pôle, un plan parallèle à xOz, ce qui joue un rôle dans la dernière partie.

2[e] PARTIE. Il ne s'agit, là encore, que de géométrie analytique plane. Les résultats sont de nature à éclairer la suite.

Quand A est fixe, et que la tangente Mt à C varie, les lieux géométriques des points E, F sont deux cercles S_E, S_F, dont la détermination découle d'éliminations classiques. Ces points restent homologues dans une transformation simple, homothétie positive de centre A, accompagnée de la symétrie d'axe Ox : on le constate en comparant les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, dont Ox est bissectrice extérieure ; on trouve $\dfrac{OE}{OF} = \dfrac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$.

Les candidats qui n'avaient pas suffisamment simplifié les expressions des coordonnées des points E, F, ont été, à cet endroit, largement distancés par les concurrents mieux inspirés, qui ont vu sans peine les réponses aux exercices posés ensuite (enveloppe et lieu des points communs à S_E, S_F quand A, à son tour varie sur Ox). La comparaison des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ est par contre, étudiée fréquemment de manière incomplète.

3^e Partie. On y aborde la définition de la surface Σ, par une représentation paramétrique toute naturelle. Ici A reste fixe.

L'essentiel est de voir la nature d'une courbe S décrite sur Σ par le point P du cercle T dont le rayon forme l'angle donné ψ avec le plan xOy. Pour $\psi = 0$, $\psi = \pi$, on retrouve les cercles S_E, S_F déjà obtenus. Pour ψ quelconque S est encore un cercle, qu'on vérifie être orthogonal au plan xOz. Ainsi apparaissent la seconde famille de cercles S de la surface Σ, et une autre génération possible de celle-ci, par ces courbes $\psi =$ constante. On pressent une analogie avec la génération primitive par les cercles T.

Dans une seule copie cette analogie est développée avec précision : l'auteur y a bien vu qu'il existe dans le plan xOz un cercle D, d'équation $x^2 + z^2 = R^2 \cot g^2 \alpha$, qui, associé au point A, sert de base à la seconde génération, calquée sur la première. En échangeant les rôles des plans xOy et xOz, en changeant R en R' ($R' = R \cot g\, \alpha$) et α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, les cercles T deviennent les cercles S, et R' se change en R.

4^e Partie. Elle comporte l'étude des cônes K_S, K_T ayant le point fixe A comme sommet et les cercles S, T comme directrices.

Ces cônes sont *homofocaux* : une demi-douzaine de concurrents l'ont reconnu, mais ne considèrent guère que les cônes K_T. En fait K_S et K_T forment deux familles de cônes, orthogonales, dont l'analogie avec les ellipses et hyperboles d'un système de coniques homofocales est manifeste. Leur distinction résulte de la comparaison des angles principaux des sections de ces cônes par leurs plans de symétrie transverses.

Le texte était là plus explicite et mentionnait des propriétés métriques de la surface Σ, conduisant très simplement à son équation. Elles se rattachent au fait que la distance d'un point variable d'un cône du second ordre à une de ses droites focales réelles est fonction linéaire des coordonnées de ce point. Ces focales fixes D, D' sont les « associées isotropes » des droites imaginaires Δ, Δ' ; elles ont comme équations $x = a$ et $z = \pm y \operatorname{tg} \alpha$. Deux candidats ont étudié cette question en s'inspirant de la théorie classique des foyers d'une conique ; mais les signes de valeurs absolues, dans les expressions des distances δ, δ' du point considéré P aux droites D, D', ont été escamotés sans la justification désirable.

5^e Partie. Une synthèse géométrique de la surface Σ était possible, d'après les recoupements préalables. En effet, son inverse dans une inversion de pôle O est une surface Σ', de quatrième ordre, plus simple que Σ. Un seul candidat a reconnu que Σ est une *surface de translation*. On peut, pour fixer les idées, la définir comme lieu des milieux de segments rectilignes UV, U et V décrivant deux cercles concentriques dont les plans, rectangulaires, sont xOz et xOy.

Comme Σ' a un plan de symétrie, perpendiculaire à Ox au centre commun de ces cercles, Σ est anallagmatique par rapport à une sphère réelle, ce qu'il était possible de voir directement. Celle-ci a pour centre A et passe par O.

La surface Σ possède une ligne de points doubles, inverse de celle de Σ' ; cette dernière est l'hyperbole équilatère de section de Σ' par son plan de symétrie, perpendiculaire à Ox. Pour $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$, l'hyperbole dégénère en deux droites, la ligne double de Σ se décompose donc en deux cercles passant par O, et constituant l'intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax = 0$$

avec les plans $y = \pm z$.

193 copies ont été remises. La moyenne générale est 5,06. L'échelonnement des notes est plus accentué que l'an dernier. 35 candidats atteignent ou dépassent la note 10 : un 17, cinq 16, un 14,5, trois 13,5, cinq 13, deux 12,5, un 12, un 11,5, trois 11, six 10,5, sept 10.

42 notes sont comprises entre 5 et 10 : douze 9,5 ou 9, dix 8,5 ou 8, six 7,5 ou 7, neuf 6,5 ou 6, cinq 5,5 ou 5.

Le nombre des copies qui n'ont pas obtenu la note 5 est malheureusement impressionnant (116) : quatorze 4,5 ou 4, vingt-deux 3,5 ou 3, dix-neuf 2,5 ou 2, trente 1,5 ou 1, trente et un 0,5 ou 0. La conclusion n'est pas douteuse : trop de concurrents à l'Agrégation, cette année, s'apparentent aux débutants les moins entraînés à la géométrie analytique et en déforment tout à fait l'esprit.

Il est affligeant de voir rattacher la notion de droites conjuguées par rapport à une conique à celle d'involution par le principe de correspondance algébrique et biunivoque ; de voir estimer que « les cercles, ne dépendant que d'un seul paramètre, forment un faisceau ». Autre absurdité, plus savante, mais tout aussi répandue : « On sait que toute surface sur laquelle sont tracées deux familles de cercles est une cyclide de Dupin. »

L'insuccès de tant de candidats en cette épreuve tient à la dispersion des procédés de calcul, à leur manque de cohérence et de naturel. Une lecture réfléchie du texte aurait permis de mieux les adapter au but visé. Souvent la diversité des méthodes mène à des contradictions : tel qui a justifié dans la 3e partie la nature des courbes $\psi =$ constante (cercles S) avait trouvé auparavant pour S_E, S_F des paraboles.

C'est une négligence de rédaction que de ne pas situer et interpréter les résultats géométriques. On trouve dans les copies peu de figures nettes servant de contrôle ; on aurait aimé voir l'épure des sections de Σ par ses plans de symétrie xOy, xOz : elle révèle, en même temps que l'analogie déjà signalée, une opposition au point de vue réel, l'une de ces sections étant formée de cercles sécants, l'autre de cercles non sécants ; le point A est le centre d'homothétie négative de chaque couple de cercles.

Les bonnes compositions se sont signalées par la sobriété et la netteté explicative des calculs, ou par d'intéressantes considérations géométriques :

dans l'une d'elles, la disposition évidente des plans isotropes menés par les droites Δ, Δ', dont chacun est tangent à tout cercle T (ou S) est invoquée pour expliquer, sans calcul, le fait que les cônes K_T et K_S sont homofocaux.

De telles observations, marquant un retour de la pensée vers la figure initiale du problème, doivent être encouragées et nous permettent d'être optimiste. Bien des candidats, en faisant à la réflexion autant de part qu'au calcul, en se gardant d'improvisations superficielles, nous semblent susceptibles d'améliorer sensiblement le niveau de leurs épreuves.

Calcul différentiel et intégral (M. Deltheil). — 185 candidats ont pris part à cette épreuve. Le sujet proposé consistait dans la détermination de chacune des trois courbes planes appelées communément *base, roulante* et *roulette* par la connaissance des deux autres. Il comportait ainsi trois problèmes que l'énoncé envisageait dans leur ordre logique, mais en indiquant la possibilité de les aborder dans un ordre arbitraire.

Problème I. A propos du problème direct de la détermination de la *roulette,* trois questions étaient posées ; elles ont fait l'objet des efforts les plus importants, puisque 95 candidats n'ont abordé aucun des deux problèmes inverses.

1° La première question avait pour objet l'étude de la roulette décrite par un foyer d'une ellipse qui roule sur une droite, avec la rectification de cette courbe et le calcul de la courbure moyenne de la surface engendrée par sa révolution autour de la base. Conformément à un théorème de Steiner, la longueur de l'arc correspondant à une révolution complète de l'ellipse est égale à celle du cercle principal, podaire du foyer ; par ailleurs, la courbure moyenne demandée $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ est constante et égale à l'inverse du demi-grand axe.

La rectification n'a été correctement terminée que par 30 candidats, et 10 ont obtenu l'expression exacte de la courbure moyenne. Trop nombreux sont ceux qui ont adopté le rayon du parallèle pour l'un des rayons de courbure principaux, erreur indigne de candidats à l'agrégation.

La moyenne générale pour cette première question a été seulement de 6,5 sur 20 ; 44 candidats ont obtenu 10 ou plus de 10.

2° La deuxième question faisait apparaître, dans le cas du roulement d'un polygone convexe fermé sur une droite, l'aire comprise entre la trajectoire d'un point donné intérieur au polygone, la base du roulement et les positions extrêmes, pour une révolution complète, du rayon vecteur joignant le point donné à l'un des sommets. Le cas limite où le polygone devient une courbe convexe fermée devait faire l'objet d'une étude directe.

Cette partie très élémentaire a été abordée par 120 candidats et la moyenne correspondante pour les 185 compositions a été 7,8 sur 20.

3° En troisième lieu, toujours à propos du problème direct, était demandée l'étude de la courbure de la roulette, et, dans le cas d'une base rectiligne, la détermination des roulantes telles que la roulette soit une courbe de Ribaucour ; ces roulantes sont les courbes connues sous le nom de *spirales sinusoïdes.*

Les expressions :

$$dX = -\rho \sin(\alpha - V)(d\theta + dV - d\alpha)$$
$$dY = \rho \cos(\alpha - V)(d\theta + dV - d\alpha)$$

qui fournissaient tous les éléments de *l'étude directe* demandée, n'ont été obtenues que par un très petit nombre de candidats. Mais la formule et la construction de Savary ont été évoquées et presque exclusivement utilisées par les 70 candidats qui ont abordé cette troisième question.

La moyenne générale a été seulement de 3,4 sur 20 ; pour l'ensemble du problème I, de 6 sur 20.

Problème II. 4° Le problème de détermination de la *roulante* est immédiat si l'on observe que, pour chaque point A de la roulette, le centre instantané I est nécessairement l'un des points où la normale en A coupe la base. La roulante est alors définie en coordonnées polaires par une relation entre le rayon vecteur ρ et l'angle V. Dans le cas simple proposé où la base est la courbe $y = f(x)$ et la roulette l'axe Oy, on est immédiatement ramené à la quadrature $d\theta = \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho$.

33 candidats ont obtenu pour cette quatrième question une note supérieure ou égale à la moyenne. Et bien rares sont ceux qui ont apporté quelque soin aux tracés relatifs à divers cas particuliers, tracés explicitement demandés cependant.

Signalons qu'une dizaine de candidats ont fait intervenir la courbure et les considérations de la 3e question pour résoudre le problème II. Malgré les résultats partiels obtenus, il y a là une erreur de principe, car le problème posé n'est que du premier ordre infinitésimal.

5° La 5e question avait pour objet de reconstituer, par application de la méthode générale de résolution du problème II, les éléments de la double génération classique des épicycloïdes ; 16 candidats ont obtenu pour cette question la note 10 ou une note supérieure, mais c'est surtout en faisant preuve d'érudition plus que d'aptitudes à une étude directe.

6° Pour en terminer avec le problème II, les candidats étaient invités à examiner les particularités de forme de la roulante lorsque la base se réduit à l'axe Ox et que la roulette est un arc simple le coupant en O sous un angle donné. La roulante est alors en général une spirale avec un point asymptotique, mais elle peut présenter diverses autres formes ou même admettre une branche infinie. La discussion, demandée pour le cas où les coordonnées d'un point de l'arc s'expriment en fonction d'un paramètre par des séries entières, n'a été abordée que par 5 candidats, dont 3 ont obtenu une note supérieure ou égale à la moyenne.

Problème III. 7° Enfin la 7e partie de la composition portait sur la détermination de la *base*.

Ce deuxième problème inverse n'a été abordé que par 13 candidats, dont 4 seulement ont obtenu la moyenne ou davantage. Il dépend d'une équation différentielle du premier ordre, qui cesse d'être une véritable équation différentielle (cas exceptionnel qui n'a été reconnu par aucun candidat) seulement si la roulante est une droite issue du point A qui décrit la roulette donnée. La base est alors la *développée* de la roulette, à moins que le mouvement de la droite prise comme roulante ne soit de translation.

Pour l'ensemble de la composition, la moyenne générale est seulement de 4,05 sur 20. Douze candidats, tous admissibles, ont obtenu 10 ou plus de 10 ; ces douze notes sont un 18,5, un 15, deux 12, un 11 1/2, un 11 et cinq 10. La moyenne générale des admissibles est 7,8 sur 20.

On doit regretter qu'une composition aussi facile ait amené près de 100 candidats (98 exactement, dont aucun n'a été admissible) à une note inférieure à 4.

Mécanique rationnelle (M. BOULIGAND). — L'épreuve de Mécanique rationnelle se développait graduellement, à partir de questions cinématiques sur la famille des mouvements que peut prendre un solide S auquel certaines liaisons holonomes (L) laissent subsister deux degrés de liberté. La simplicité donnée à ces questions dispensait d'introduire la théorie générale du déplacement à deux paramètres : cette intention a été comprise assez souvent. De nombreux candidats ont su montrer les aspects géométriques de cette première partie, entre autres :

L'identité de la surface Σ_0 lieu des positions d'une particule M_0 de S pour ψ, θ arbitraires, avec la surface engendrée par la rotation de C_0 ; la génération de cette surface par les courbes $\psi =$ const., en lesquelles le théorème de Lahire permettait de reconnaître des ellipses ; les cas où l'on a une portion de quadrique (que l'ellipse se réduise à un segment ou contienne O_1z_1 en un de ses plans de symétrie) ; l'identité de Δ et de la normale à la surface Σ_0, la génération de la congruence des droites Δ (à un même instant t), le cylindroïde des axes instantanés.

Avec la seconde partie, la Dynamique faisait son apparition. Pour plus d'aisance, on n'envisageait d'abord ni frottement, ni liaisons unilatérales. Abstraction faite d'une demande sur la manière de réaliser les liaisons de l'énoncé, sans les dépasser et tout en leur conférant un caractère bilatéral (demande facile à disjoindre), on pouvait aborder de suite le calcul de la force vive (la fonction de forces découlant spontanément d'une des formules de transformation de coordonnées étayant la première partie). L'énoncé donnait l'ellipsoïde d'inertie du solide relatif à la particule O, en général distincte du centre de gravité. Il est donc regrettable qu'on ait souvent invoqué le théorème de Kœnig en s'imposant le souci de transformer l'ellipsoïde d'inertie. Mieux valait, avec une fraction appréciable des candidats, utiliser les composantes de la vitesse d'une particule suivant les axes fixes, en déduire le carré de cette vitesse, pour passer à la sommation directe des mv^2. J'ai relevé deux erreurs assez fréquentes : elles se ramènent, somme toute, à fixer indûment la particule O ou encore à la confondre, non moins indûment, avec le centre de gravité de S.

En général, l'intégrale première fournie par le théorème des forces vives et celle donnée par la constance du moment cinétique par rapport à O_1z_1 sont proposées sans hésitation pour la solution du problème dynamique. Les candidats savent aussi que l'absence de ψ dans U et dans les coefficients de 2T assurent l'intégrabilité, la variable θ pouvant se déduire d'une équation de la forme $\theta'^2 = f(\theta)$.

C'est le côté analytique du problème. En s'en écartant, on voit peu à peu s'accroître l'embarras provoqué par les indiscrétions, pourtant bénignes, que contenait l'énoncé dans la suite de son développement.

Celle qui terminait la seconde partie concernait le mode de description des trajectoires. L'une d'elles, choisie au hasard, correspond en général à une valeur déterminée de l'énergie totale. Font exception celles qui proviennent de la valeur zéro du moment cinétique par rapport à O_1z_1 : elles sont compatibles avec une infinité de valeurs de l'énergie totale, d'où une infinité d'horaires de description ; ces trajectoires s'obtiennent en particulier quand la force vive initiale est nulle. Il ne s'est guère trouvé plus d'une demi-douzaine de copies donnant à ce sujet des réponses nettes.

La troisième partie mettait en face d'une question d'équivalence dynamique, entre deux problèmes dont les constantes physiques pouvaient être choisies de manière qu'il y eût identité, après changement de signe de θ, d'une part entre les deux forces vives, d'autre part entre les deux fonctions de forces. Chez une quinzaine de candidats, j'ai trouvé à cet égard des réponses satisfaisantes.

La quatrième partie s'attachait à reprendre l'étude du mouvement de S quand ce solide se réduit à une plaque rectangulaire homogène, d'épaisseur négligeable. Quelques candidats, qui avaient éprouvé des difficultés dans la question plus générale posée dans la seconde partie, sont parvenus dans cet endroit à se reprendre. Mais combien sont rares ceux qui réussissent finalement à discriminer les mouvements où la plaque, se trouvant initialement au-dessus du plan d'appui (plan $z_1 = 0$), s'y maintient à tout instant ultérieur ; quatre copies seulement parviennent à établir le caractère commun à ces mouvements : à savoir, le fait de tendre vers une rotation uniforme autour de O_1z_1 : une seule de celles-ci aborde avec succès le calcul de réactions, objet de la cinquième partie où s'introduisait une liaison unilatérale. Par ailleurs, dans la quatrième partie, quelques-uns ont deviné, sans l'établir, le résultat précédent : ils sont peu nombreux.

La sixième partie a été amorcée, çà et là, sans que l'étape de mise en équations se trouve quelque part franchie. Pour multiplier les occasions de succès, j'avais donné à dessein une composition variée, mais un peu longue. J'ai donc coté largement. Voici les notes des premiers : 16 ; 15 ; 14 ; 13.5 ; 13 ; 12.5 ; 12 ; 11.5 ; 11 ; 10.5 ; 10 (quatre fois).

J'ai donné en tout 53 notes atteignant ou dépassant 8, 74 notes allant de 4 à 7.5. Les autres sont celles de licenciés qui feraient mieux de s'accorder encore une année de sérieux travail avant de se présenter à l'Agrégation.

La Mécanique, est-il besoin de le redire, est une partie du programme dans laquelle un effort consciencieux a de grandes chances d'être franchement récompensé.

Epreuves pratiques (1)

Epure (M. Robert). — Le sujet de l'épure était la recherche de l'intersection d'un hyperboloïde H de Hachette avec un cône. H possède deux génératrices verticales A, A_1, et, par conséquent un plan cyclique horizontal. Il en est de même pour le cône, placé de façon à être tangent au plan de A et A_1, suposé de profil.

Cette intersection est donc tangente à A et A_1 et sa projection horizontale a des rebroussements aux traces horizontales de ces verticales. Les tangentes de rebroussement s'obtiennent comme traces horizontales des plans tangents à H, aux points où A et A_1 touchent le cône. Ceci a été justifié dans 11 copies.

Les notices insistent trop sur des indications générales de méthodes évidentes, et ne décèlent pas l'observation raisonnée des données. En coupant le cône par des génératrices ou circonférences particulières de H, on pouvait déterminer de nombreux points de l'intersection, à coordonnées rationnelles. On a même négligé la recherche bien classique des points doubles apparents de la projection frontale de l'intersection ; celui qui est à distance finie s'obtenait par la simple mise en jeu des particularités des données.

Il est parfois nécessaire de construire des intersections de coniques pour préciser certains points, utiles dans la ponctuation des résultats. On demandait d'ailleurs de dessiner la section produite dans le solide commun aux deux corps, par le plan polaire du sommet du cône relativement à H. Ceci permet la construction des génératrices de ce cône tangentes à H, donc à l'intersection. Un seul candidat a compris cette application.

Les intersections de ce plan avec le cône et l'hyperboloïde H, sont respectivement une ellipse et une hyperbole ; les éléments auxiliaires de leur détermination graphique, diamètres ou asymptotes, étaient intéressants et faciles à situer. Le tracé de l'ellipse, notamment, n'a été satisfaisant que dans la meilleure épure.

L'exactitude des résultats et l'emploi de tous ces recoupements ont été largement appréciés pour le classement des épures. Dix candidats dépassent ou atteignent 10 : un 17, deux 15, un 13,5, un 12, deux 11, deux 10,5, un 10. Vingt-deux notes s'échelonnent entre 5 et 10 ; sept notes sont inférieures à 5. La moyenne des résultats est de 7,53 sur 20, bien que cette épure soit notablement plus facile que celle des années précédentes.

Calcul (M. Deltheil). — Le but du calcul était d'obtenir, avec trois décimales exactes, la limite de la différence $OM + OM' - \text{arc}\, MM'$, M et M' désignant deux points de l'hyperbole équilatère $xy = 1$ symétriques par rapport à la droite $y = x$ et s'éloignant indéfiniment sur la branche située dans l'angle des demi-droites Ox, Oy.

(1) Voir les enoncés pages 19 et 20 du *Fascicule Spécial* 1937-A.

En fonction du paramètre u, angle de la tangente avec le rayon vecteur, la limite demandée s'exprime par l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \sin u}\, du$ si l'on utilise la méthode suggérée par l'énoncé. Elle peut aussi se mettre sous la forme moins simple $2\sqrt{2} - \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos u}{\sqrt{\sin^3 u}}\, du$, qui est celle obtenue par la plupart des candidats. Le calcul numérique, qui donne le résultat 1,694, n'a été mené jusqu'au bout par aucun des intéressés ; cependant des résultats partiels exacts et précis ont permis d'attribuer sept notes supérieures à 10 : un 15, un 14, un 13, un 12, et trois 11 : moyenne générale : 7,2 sur 20.

Epreuves orales (1)

La forme traditionnelle des épreuves orales a subi, en ce concours, une légère modification. Précédemment, les deux sujets de leçons, Elémentaires et Spéciales, que doit exposer chaque candidat, étaient séparément déterminées par deux tirages au sort distincts. Il arrivait ainsi que certains pouvaient avoir à développer des leçons de natures voisines, toutes deux d'Algèbre, de Géométrie, ou même de Mécanique, de Descriptive ; le hasard pouvait favoriser les uns ou nuire aux autres, attribuer au premier ou refuser au second deux leçons répondant précisément à leurs aptitudes ; le Jury qui, dans une première épreuve, avait reconnu et apprécié certaines qualités chez un candidat, n'avait pas l'occasion, à la seconde épreuve, de reconnaître si ce candidat restait égal à lui-même dans des disciplines d'un esprit différent. En vue de parer à ces inconvénients, les sujets de leçons ont été cette fois associés, à l'avance, par groupes de deux, le tirage au sort se faisant alors entre les groupes de deux leçons et non plus entre les leçons individuelles. Le Jury s'est appliqué à associer des leçons de natures franchement distinctes, aussi bien que de difficultés complémentaires ; en particulier, il a fait en sorte que l'une des leçons conservant un caractère classique, l'autre fût une leçon dite de composition, demandant soit des applications, soit des rapprochements, soit la résolution, à titre de conclusion d'une théorie classique, d'un problème présentant quelque originalité.

L'innovation paraît avoir donné d'heureux résultats. C'est ce qui apparaît d'abord avec la haute qualité de quelques leçons qui ont été entendues et dont la majorité est faite précisément de leçons de composition. Un concurrent a mérité la note 20 en Spéciales, 19 en Elémentaires. Dans sa première leçon, sur un thème réclamant à la fois des applications, des rapprochements et de la recherche, l'étude analytique et géométrique de la surface de révolution engendrée par la rotation d'une conique autour d'un axe, ce futur maître a dominé immédiatement le sujet, le présentant de haut, tout en le rendant accessible, ordonnant son analyse avec une logique

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1937 peut être demandée au Bureau, 21, Avenue de Châtillon, Paris 14e (joindre 4 francs en timbres poste).

impeccable, le développant avec une aisance et une clarté remarquables, et parvenant à donner la sensation du beau avec une œuvre solidement et harmonieusement construite.

D'autres, dignes émules de leur camarade, ont su également déployer de belles qualités de réflexion, de recherche et d'originalité en présence de thèmes difficiles tels que la continuité d'une fonction et l'étude des fonctions inverses, ou le calcul des fonctions symétriques et son application à un problème particulier ; les uns réussissent à présenter clairement des notions délicates, sachant ne dire que ce qui est accessible aux élèves sans se contenter d'à-peu-près, et laisser entrevoir les problèmes qui se posent mais qu'il n'y a pas lieu de résoudre dans nos classes ; un autre rajeunit un problème classique, celui de la variation d'une fonction, en construisant quelques exemples originaux, nerveux et significatifs. Dans une leçon s'adressant à de jeunes élèves de Première, un concurrent s'applique à rester dans les limites du programme de la classe et, dans un effort personnel et heureux, parvient à dire tout ce qu'il faut sans faire aucun appel à la rotation autour d'un axe.

Si nous examinons maintenant l'ensemble des épreuves orales, et que nous nous reportions à des chiffres, nous constatons que, si la qualité baisse nécessairement, les leçons qui exigent des efforts de construction, qui donnent l'occasion de montrer de l'originalité, de la personnalité, restent encore, au moins en général, plus favorables aux concurrents que celles qui se réduisent au simple développement d'un thème classique. Comparant en effet les notes attribuées aux deux leçons, d'Élémentaires et de Spéciales, on constate que, si leur moyenne générale est sensiblement la même, 13 pour les premières, 12,5 pour les secondes, l'échelle sur laquelle elles se répartissent varie sensiblement de l'une à l'autre, plus restreinte, allant de 19 à 8 en Elémentaires, avec un point de forte accumulation de douze et sept candidats ayant respectivement les notes 14 et 13, mais plus large et plus homogène en Spéciales, se développant de 20 à 7, avec des groupements limités seulement à deux, trois, quatre et cinq candidats, le groupement de cinq ne se rencontrant qu'une seule fois, à la note 10, et l'extrémité inférieure de l'échelle en présentant un de trois à la note 7 et un autre de quatre à la note 8 ; cinq notes seulement, en Elémentaires, sont au moins égales à 16 (un 19, un 17, et trois 16) : il y en a neuf en Spéciales (un 20, deux 18, deux 17, et quatre 16).

Si donc la qualité est manifeste à la tête de ce concours, il apparait malheureusement qu'elle se raréfie dans l'ensemble et qu'une trop forte majorité se contente d'une simple et régulière moyenne. Des faiblesses, des fautes, sont à signaler. Dans les leçons de composition, beaucoup ont cru bien faire en voulant montrer tout ce qu'ils pouvaient connaître sur un sujet déterminé ; d'où un ensemble fait d'une simple succession de détails ; il eût été préférable de se limiter, au gré de ses préférences d'ailleurs, et de développer une idée générale. D'autres, pris sans doute au dépourvu, n'ont pu que présenter une série d'exemples assez maigres, sans arriver à découvrir des liens qui en auraient fait un ensemble significatif. Le principe fécond, qui domine et éclaire une étude, manque trop souvent ;

une circonstance particulière et curieuse l'a montré : dans plusieurs leçons, à propos de l'étude de familles de cercles ou d'applications de l'inversion, divers candidats ont parlé des cercles tangents à deux cercles fixes ; il est surprenant de constater qu'aucun n'ait parlé de quelques qualités essentielles de ces cercles, comme l'alignement des points de contact et d'un centre de similitude des cercles fixes, ou l'invariance de chaque cercle tangent dans l'une des inversions échangeant entre eux les deux cercles fixes.

A l'inverse, d'autres se sont trompés en élevant inutilement le sujet qui leur était proposé, ou en traitant un sujet voisin ; l'un étudie l'intégration et la dérivation des séries entières en traitant rapidement et légèrement de ce qui se passe à l'intérieur de l'intervalle de convergence, alors que le programme spécifie nettement qu'il y a lieu de se limiter à ce seul cas, et cela pour s'arrêter plus longuement, et non sans commettre quelques fautes graves, sur l'étude délicate des extrémités de cet intervalle ; un autre, ayant à parler de la concavité et des points d'inflexion des courbes planes, ne s'abaisse même pas à définir ces notions, et, par une méthode prêtant à de sévères critiques, ne parle que de l'étude de points singuliers.

Certaines faiblesses sont dues à un manque de préparation. La Descriptive, en particulier, semble avoir été négligée et a contribué à l'échec de trois concurrents, alors même cependant que l'un d'eux, déjà professeur, avait laissé percer de sérieuses qualités d'exposition en présentant, à l'appui d'une méthode générale, quelques schémas rudimentaires, mais clairs et expressifs.

L'on ne saurait trop recommander à un maître de penser sa leçon en l'exposant, et non de réciter à haute voix un texte trop bien appris dont on ne perçoit plus l'ordonnance. Un accident regrettable et bien significatif l'a montré ; un candidat s'est trouvé, dans sa leçon de composition, en présence d'un problème qu'il n'avait jamais traité ; en l'analysant correctement, il a réussi à en donner une présentation claire, et, sans le pousser jusqu'au bout, à développer soigneusement un cas particulier ; mais alors que cette première épreuve avait été appréciée par le Jury, le malheureux, sans doute fatigué, a échoué ensuite dans une leçon régulière, classique, mais d'où la pensée était réellement absente.

Pour terminer, signalons quelques questions de forme qui ne sont pas négligeables. D'abord, les candidats s'occupent trop rarement de situer leur leçon, de rappeler, en termes rapides, ce qui a été vu dans les leçons précédentes ; ce souci les aiderait et leur éviterait au moins l'apparence de ce qui pourrait être pris pour un cercle vicieux. D'autres enfin paraissent mépriser totalement les qualités de diction ou n'ont aucun souci de la correction du langage ; il est inadmissible qu'un maître ne paraisse pas préoccupé, en articulant nettement son discours, de se faire entendre et comprendre, ou qu'il use d'un vocabulaire, d'une construction de la phrase, que son collègue de Français réprimanderait sévèrement s'il les surprenait sur les lèvres des élèves.

Le Président du Jury,
A. TRESSE.