

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1937 (1)**

Le sujet proposé aux candidats (2) était une étude partielle et très nettement délimitée du complexe des droites dont les plus courtes distances à deux droites fixes concourantes données sont égales. Le problème comportait quatre parties associées en deux groupes de deux parties chacun. Les candidats étaient prévenus que les deux groupes étaient indépendants et qu'ils pouvaient, à leur gré, examiner en premier lieu, l'un quelconque de ces groupes.

Dans la première partie on demandait d'établir une relation, que l'énoncé fournissait, entre les mesures des diverses longueurs en cause. La méthode même était indiquée. Pour traiter la question, il fallait connaître deux propriétés simples. Il fallait savoir que, pour trouver la plus courte distance de deux droites, il est inutile de placer leur perpendiculaire commune et qu'il suffit de trouver la distance d'un point quelconque d'une des droites au plan parallèle mené par l'autre. Il était également nécessaire de connaî-

(1) Le Jury était composé de MM. TRESSE, Inspecteur général honoraire, président (absent) ; CHENEVIER, Inspecteur général, vice-président ; Mlle BUDON, professeur de mathématiques (Sèvres) au Lycée de Versailles ; MM. LEVAXELAIRE, professeur de Mathématiques Spéciales Préparatoires au Lycée St-Louis ; MARION, professeur de mathématiques (Navale) au Lycée Janson-de-Sailly ; MARTENOT, professeur de mathématiques (Centrale) au Lycée St-Louis ; WEBER, professeur de Mathématiques Spéciales Préparatoires au Lycée St-Louis.

(2) Voir l'énoncé page 4 du *Fascicule Spécial* 1937-B1^{re}.

tre la propriété de la projection orthogonale d'un angle droit sur un plan parallèle à l'un de ses côtés. Ces connaissances ont dépassé les possibilités d'un grand nombre de candidats et on se demande vraiment si ceux qui présentent de telles lacunes sont qualifiés pour prendre part aux épreuves du Concours général. Les maîtres de nos Lycées et Collèges ne doivent désigner que des candidats capables d'y faire figure honorable.

De très nombreux élèves ne savent pas lire l'énoncé. On ne se doute pas, à lire certaines copies, que les nombres a , b , x , δ et h sont essentiellement positifs. La différence des deux nombres x et a intervenait comme mesure d'un segment ; elle était donc la valeur absolue de $x - a$. Les candidats, en très grande majorité, se bornent au cas de figure qu'ils ont dessiné au hasard et prennent $a - x$ ou $x - a$, sans se soucier de la généralité du résultat. La circonstance heureuse, que cette différence ne figurait dans la suite que par son carré, ne peut, en aucun cas, compter à l'actif de ces candidats peu curieux.

Dans la deuxième partie, qui reposait sur le résultat trouvé dans la première, on était amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} ah = \delta \sqrt{h^2 + (x - a)^2}, & (1) \\ bh = \delta \sqrt{h^2 + (x - b)^2}, & (2) \end{cases}$$

par rapport aux inconnues x et h . A une valeur positive de x correspondait un point H ; à une valeur positive de h correspondaient ensuite deux points S symétriques par rapport à H et par rapport au plan xOy . Le calcul le plus simple consistait à tirer des équations la combinaison :

$$\frac{(x - a)^2}{(x - b)^2} = \frac{a^2 - \delta^2}{b^2 - \delta^2} ;$$

qui, dans le cas où a et b sont inégaux, donne la valeur de x . A cette valeur, l'une des deux équations du début faisait correspondre une valeur pour h . La discussion se réduisait à peu de chose. D'après la nature même de la question, le nombre δ , mesure de la plus courte distance de deux droites, était inférieur ou égal à chacun des deux nombres a et b , mesures de segments qui joignaient chacun un point d'une droite à un point de l'autre. Cette hypothèse nécessaire étant faite, on trouvait deux valeurs acceptables pour x , deux valeurs correspondantes pour h , ce qui donnait quatre droites.

Le cas particulier $a = b$ était intéressant ; il conduisait à une indétermination algébrique qui ne correspondait pas à une indétermination géométrique. On trouvait deux droites seulement, au plus.

Tous ces résultats apparaissaient sans calculs, si l'on remarquait que les droites cherchées étaient les tangentes menées par P à deux cylindres de révolution d'axes respectifs Ox et Oy et de rayons égaux à δ .

La première constatation qui résulte de l'examen des copies est que si l'énoncé n'avait pas fourni la relation (1), de nombreux candidats n'auraient

pu aborder la seconde partie. Il s'en trouve qui ne peuvent écrire l'équation (2) déduite de la première par la substitution de b à a . D'autres sont gênés parce que h est une inconnue. Ils considèrent h comme une donnée qui figure dans l'équation qui leur fournit x . La règle du jeu est, pour eux, immuable : les inconnues portent des noms qui les relèguent aux dernières places de l'alphabet. Dans de nombreuses copies, l'équation qui donne x a été débarrassée du facteur $a - b$ sans qu'on se soit préoccupé de sa nullité possible, et on ne revient pas ensuite sur le cas particulier. Celui-ci s'impose pourtant, avec quelque force, à la simple lecture du système à résoudre. Un malheureux, qui n'a qu'une équation, s'efforce d'en tirer à la fois x et h . Deux autres, dans le même cas désespéré, tirent h , le reportent dans l'équation qui l'a fourni et, grâce à une faute de calcul, obtiennent une seconde équation.

Mais que doit-on penser de candidats qui résolvent l'équation :

$$\delta^2 - (a + b)\delta + ab = 0,$$

en appliquant la formule classique et de ceux qui trouvent comme condition de possibilité du problème :

$$\delta > a \quad \text{ou} \quad \delta > b ?$$

Pour ces derniers, l'explication me paraît être la suivante : la plus courte distance, c'est la perpendiculaire commune. Ils substituent au segment minimum qui relie deux points variables sur les droites données, la droite qui porte le segment minimum et, cela fait, ils oublient d'où vient cette droite. L'orthogonalité compte seule ; la propriété de minimum n'intervient plus. Ces candidats sont voués désormais à écrire n'importe quoi.

Dans la troisième partie, les candidats étaient invités à constater que le point O , étant équidistant des deux plans X et Y menés par une droite Δ parallèlement à Ox et Oy , se trouvait dans l'un des bissecteurs des quatre dièdres formés par ces plans. La réciproque était demandée. Les quatre plans envisagés coupaient Ox en trois points, disposition limite d'une division harmonique. La chose pouvait s'établir directement sans faire appel aux propriétés des faisceaux harmoniques de plans.

Se donner la direction de Δ , c'était se donner celles des plans X et Y et, par suite, de leurs bissecteurs. Le lieu des droites Δ parallèles à une direction donnée était donc formé des deux plans menés par O parallèlement à ces bissecteurs. L'énoncé excluant les droites Δ parallèles au plan xOy , la question était résolue.

Les candidats qui ont abordé cette troisième partie — et dont certains n'avaient pas traité les deux autres — ont en général vu plus ou moins simplement que O était équidistant des plans X et Y . La réciproque en a gêné beaucoup. « On l'établirait par l'absurde » écrit l'un ; « On reprendrait le raisonnement en sens inverse », affirme un autre. De telles formules sont des aveux d'impuissance qui ne trompent ni le correcteur ni l'élève qui s'en rend coupable.

On trouve dans certaines copies des distinctions inquiétantes entre les

bissecteurs des dièdres formés par deux plans ; l'un d'eux est dit « intérieur », l'autre « extérieur » ; comme tel, le second est d'ailleurs souvent écarté.

Ceux qui connaissent les propriétés des faisceaux harmoniques de plans ne précisent pas le résultat qu'ils donnent. Quand un point A est le milieu du segment BC, on ne peut pas se borner à dire que les trois points ABC sont alignés et tels que l'un est équidistant des deux autres.

Mais les deux erreurs les plus graves qui reviennent dans un assez grand nombre de copies sont les suivantes : Un plan quelconque coupe X, Y et leurs bissecteurs suivant deux droites et leurs bissectrices ; par une droite quelconque, on peut mener un plan perpendiculaire à l'arête d'un dièdre et obtenir ainsi un angle plan du dièdre. Des candidats au Concours général devraient être à l'abri de telles confusions.

Dans la 4^e partie, on étudiait le cône du complexe ayant pour sommet le point P du plan πOy . Les candidats devaient chercher la directrice de ce cône dans le plan R perpendiculaire en O à OP. Pour une droite Δ passant par P, les plans X et Y avaient pour traces sur le plan πOy deux droites fixes, issues de P et respectivement parallèles à Ox et à Oy. Ces droites coupaient en x_0 et y_0 la trace du plan R sur le plan πOy . Le plan R, perpendiculaire à OP, se trouvait être perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre XY qui contenait O. Il en résultait que si M était la trace de Δ sur R, la droite MO était bissectrice de l'angle $\widehat{x_0My_0}$. La seconde bissectrice MO' passait par le conjugué harmonique O' de O par rapport à x_0 et y_0 . Le lieu de M était donc le cercle de diamètre OO' . Ce cercle devenait une droite dans le cas particulier pour lequel O était le milieu de x_0y_0 , c'est-à-dire dans le cas où PO était bissectrice de l'angle πOy .

Les droites Δ qui correspondaient à une valeur donnée δ_0 de δ étaient dans un plan X (ou Y) tangent à la sphère de centre O et de rayon δ_0 . On était ainsi conduit à mener par Px_0 (ou par Py_0) un plan tangent à cette sphère. La condition de possibilité était que les droites Px_0 et Py_0 soient toutes les deux non sécantes pour cette sphère, c'est-à-dire que δ_0 soit inférieur au plus petit des nombres a et b . Le maximum de δ_0 en résultait aussitôt.

Enfin quand le point P variait sur un segment AB intérieur à l'angle πOy , a et b variaient en sens inverse et le maximum du plus petit de ces nombres était obtenu pour le point P_0 intersection de AB et de la bissectrice de l'angle πOy .

Aucun candidat n'a vu tous ces résultats.

Le Jury a reçu 383 copies dont 7 blanches. 82 candidats n'ont rien dit de satisfaisant sur la première partie. Après une première lecture, le Jury a retenu 39 compositions qui ont été soumises à une deuxième lecture à la suite de laquelle 25 copies ont été à nouveau écartées. Les 14 copies restantes ont été corrigées séparément par trois membres du Jury et revues par deux autres travaillant ensemble. 9 copies seulement ont été récompensées. La meilleure ne contient rien sur la dernière partie et a reçu la

note 11,7. Le premier prix et le second prix n'ayant pas été décernés, cette copie confère à son auteur le troisième prix. La copie qui correspond au premier accessit est notée 11,1 ; la quatrième partie n'y est pas traitée davantage ; la troisième partie est excellente et a valu à l'auteur le maximum des points ; mais on trouve en algèbre une faute grave relative au signe du trinôme du second degré. Pour le deuxième accessit, on trouve deux copies notées 10,9. Dans l'une la quatrième partie n'est pas abordée. Dans l'autre on a attribué pour cette dernière partie le quart des points disponibles, malgré une écriture affreuse, parfois illisible. Pour le quatrième accessit, on trouve encore deux copies notées 10,2. Toutes les deux ont la moyenne pour la quatrième partie, ce qui est la meilleure note attribuée. Dans l'une la première partie est à peine acceptable. Dans l'autre la seconde est à peu près nulle. Pour le sixième accessit, on trouve également deux copies notées 9,9. Dans l'une, la dernière partie n'est pas abordée. Dans l'autre elle est à peine amorcée. Le dernier nommé, huitième accessit, a la note 9,4. C'est le seul candidat qui, parmi ceux dont les copies ont été retenues, a vu les cylindres de la deuxième partie. Sa note a été majorée en conséquence. Les notes des cinq copies non récompensées après la délibération du Jury se placent entre 9 et 7,4.

La forme des copies est, en général, insuffisante. La rédaction est souvent lourde, peu nette et peu claire. L'orthographe est fantaisiste (perpendicularaire, systhème, la droite perse le plan, d'autre par). On trouve encore des abréviations telles que pt, tg, $\perp$, $//$, $\square$. Un candidat ose écrire :

$$\frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Un autre écrit :

$$\overline{PS}^2 = \frac{h^2}{\cos^3 \alpha - 1}$$

Un troisième annonce que le lieu est une conique dont P est le pôle d'inversion.

En résumé, l'impression qui se dégage de la lecture de ces 383 copies est attristante. Si les meilleurs élèves de nos classes de Première sont capables de remettre de pareilles pauvretés, il faut en conclure qu'ils n'ont retenu de ce qu'on leur a enseigné que des mots et qu'ils ne se sont pas élevés jusqu'aux idées. Espérons que l'émotion et la fatigue sont pour eux des circonstances atténuantes. Nous voudrions que les candidats de l'avenir se persuadent qu'il vaut mieux remettre deux parties bien traitées que quatre bâclées et que la présentation extérieure d'une copie ne doit pas être négligée. Nous voudrions enfin que lorsqu'ils trébuchent devant une difficulté véritable, ils conservent leur sang-froid et qu'ils n'écrivent pas, sur des choses simples et familières, des énormités qui ne résistent pas à un examen logique même sommaire.

Le Vice-Président du Jury,
P. CHENEVIER.