

**3. Rapport sur la composition de mathématiques
(classe de Mathématiques)
au concours général des Lycées et Collèges en 1937 (1)**

I. L'un des deux problèmes qui forment le texte proposé en 1937 (2) est relatif à l'Arithmétique. L'expérience pédagogique ainsi tentée a été intéressante.

Indiquons d'abord que l'Arithmétique n'a été abordée que dans le quart des copies (60 sur 246). La proportion devient plus favorable chez les

(1) Le Jury était composé de M. LECONTE, Inspecteur général, président ; Mlle CHAUMONT, professeur de mathématiques (Sèvres) au Lycée Fénelon ; MM. DELCOURT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Henri-IV ; NICOLAS, professeur de mathématiques (Navale) au Lycée St-Louis ; RAMBAUD, professeur de Mathématiques Spéciales Préparatoires au Lycée St-Louis ; THIBERGE, professeur de mathématiques (Navale) au Lycée St-Louis.

(2) Voir l'énoncé page 5 du *Fascicule Spécial 1937 B-1°*.

meilleurs élèves puisque, sur les trente copies retenues après une première lecture, il s'en trouve quatorze dans lesquelles il est question du problème d'Arithmétique. Enfin, parmi ces quatorze, il y en a huit qui appartiennent au groupe des treize copies retenues définitivement pour un prix ou un accessit. Six d'entre ces huit lauréats (les six premiers du Concours) ont obtenu d'honorables résultats en Arithmétique ; mais les deux autres ne lui doivent en rien leur succès. L'un d'eux en effet a écrit « qu'il faut que k soit diviseur de b et de ac pour que $\frac{b+ac}{k}$ soit entier » ; l'autre

a tout simplement résolu en n la relation $x = \frac{an+b}{n+c}$, il a considéré

que la première question était ainsi résolue, et il a commencé l'étude de la seconde partie par ces mots : « La somme des valeurs entières de

$y = \frac{an+b}{n+c}$ est un nombre déterminé, car y se rapproche de 1 quand n

devient très grand ; par conséquent, il y a une limite. »

Pour plusieurs compositions, la moyenne en Arithmétique est atteinte ou dépassée. Il y a une excellente solution, une seule, cependant incomplète puisqu'elle se termine par la phrase suivante : « N'ayant pas de table de nombres premiers et ne pouvant établir les nombres premiers de 594 à 630..., ce qui exige des calculs assez longs, nous ne donnons pas toutes les solutions du problème. D'ailleurs, il est virtuellement terminé. »

Il est permis d'interpréter ces indications en disant que le seul mot *Arithmétique* a suffi à éloigner trop de candidats qu'une lecture même rapide du texte eût pu rassurer, car ce second problème est visiblement élémentaire. On a voulu qu'il le soit et, qu'au lieu de s'élever vers la théorie, il comprenne des applications numériques simples et précises.

La crainte que l'on peut, *a priori*, éprouver en proposant un tel problème, est qu'il ne soit trop facile pour une épreuve de Concours général. En fait, il n'en a rien été et les quelques renseignements qui précèdent montrent déjà au lecteur que les résultats eussent pu être meilleurs.

L'Arithmétique a joué un rôle important dans le classement, c'est manifeste. Le jury est unanime à n'éprouver de ce fait aucun regret, en raison des précautions prises, non seulement dans le choix du problème d'Arithmétique, mais aussi de celui d'Algèbre et de Géométrie qui a été fixé en tenant compte de la détermination prise d'introduire l'Arithmétique dans le texte. Signalons encore, à ce sujet, que dans le barème, un total de 120 points se partage à peu près également entre les trois matières et que, sans toucher à l'Arithmétique, un élève très bien doué aurait pu approcher du maximum 80 et se placer dans les premiers rangs ; en fait, les lauréats dont les rangs de classement sont 7, 9, 10, 11, 13, n'ont pas abordé l'Arithmétique.

L'usage, dans nos classes de Mathématiques, où les professeurs ont actuellement un si lourd effort à accomplir, est de traiter la Trigonométrie, l'Algèbre, la Géométrie avant les autres matières. D'autre part, le Concours

général a lieu très tôt, cette année le 12 mai. Enfin, certains professeurs mènent de front, jusqu'à la mi-juin, l'achèvement du cours avec les révisions et vues d'ensemble concernant les matières qui ont été traitées d'abord. Il semble bien que, dans quelques classes, la divisibilité n'avait pas encore été étudiée le 12 mai. Toute œuvre humaine comporte un aléa. Mais aussi, saisissons l'occasion de dire aux professeurs de la classe de Mathématiques, sans rien oublier de l'étendue et des difficultés de la tâche qui leur est imposée dans les conditions actuelles, combien il importe de rester concis et simple, de tourner le dos résolument à l'érudition, et de se réserver une marge en fin d'année. En particulier, limitons le cours d'Arithmétique à des vues robustes sur les notions simples et essentielles. Qu'un bon candidat au Concours général ne croie pas faire œuvre utile en alignant en vain de nombreuses congruences, ou qu'il hésite à faire intervenir hors de propos, uniquement parce qu'elles sont d'un ordre plus élevé, des propriétés de la divisibilité qui lui ont été enseignées, ou qu'il n'examine pas sérieusement l'hypothèse $b + ac = 0$ (a, b, c sont des entiers positifs), ou n'explique pas qu'il va compléter l'énoncé en étudiant les cas

où la fraction $x = \frac{an + b}{n + c}$ est négative !

Signalons enfin que plusieurs candidats ont heureusement tourné la difficulté provenant de ce que n entrerait au numérateur des fractions x et y . Tout naturellement, les uns ont pris $n + c$ (ou $n - c$) comme inconnue, les autres, comme dans la recherche des diviseurs communs à deux nombres, ont formé la combinaison indépendante de n , $an + b - a(n + c)$.

II. Le texte de 1937 est, comme ceux de 1934 et de 1936, le fruit d'une longue et agréable élaboration poursuivie par deux des membres du jury. Cette année encore, je puis, sans la moindre gêne, louer l'idée sur laquelle repose le problème d'Algèbre et de Géométrie : Si un point M est choisi sur la ligne des centres oo' de deux cercles (c) , (c') , la puissance p de ce point par rapport à un cercle variable (γ) de rayon φ , tangent à (c) et à (c') est une fonction linéaire de φ . Il est demandé aux élèves de retrouver ainsi que (1^{re} partie) pour l'un (ou pour l'autre) des centres d'homothétie H et H_1 , la puissance reste constante, que (2^e partie) pour les points de

Poncelet I et J du faisceau formé par (c) et (c') , le quotient $\frac{p}{\varphi}$ reste constant, et de voir (3^e partie) que pour deux points M et M' inverses dans l'une (ou l'autre) des deux inversions qui transforment (c) en (c') , le quotient $\frac{p}{p'}$ reste constant. Pour chaque partie, des interprétations ou solutions

géométriques sont aussi demandées, et dans la deuxième, il a été ajouté une autre propriété des points de Poncelet.

Il était possible, au lieu d'utiliser le calcul de la puissance en fonction de φ , de prendre le problème sous une forme plus géométrique en remar-

quant que la puissance est aussi une fonction linéaire de l'abscisse, prise sur oo' , du centre ω du cercle (γ) , $\overline{H\omega_1} = x$ par exemple. Les variables φ et x s'associent tout naturellement. Elles sont, dans le cas général, liées par une relation linéaire, puisque ω décrit l'une ou l'autre de deux coniques de foyers o et o' . Cette remarque n'a été faite par aucun élève. La nature du lieu de ω a été fréquemment rappelée, mais n'a pas été utilisée. Par contre, un candidat a senti que la propriété du point H d'avoir une puissance de valeur constante k par rapport à une famille de cercles (γ) permettait de simplifier l'expression de la puissance d'un point M quelconque de oo' par rapport aux mêmes cercles (γ) . Il y a là une autre présentation possible du problème qu'il est intéressant de signaler.

Les égalités $p = \overline{M\omega}^2 - \varphi^2$, $k = \overline{H\omega}^2 - \varphi^2$, donnent par soustraction

$$p = k + \overline{M\omega}^2 - \overline{H\omega}^2 = k + \overline{M\omega_1}^2 - \overline{H\omega_1}^2 = k + \overline{MH} (2x + \overline{MH})$$

Nous voudrions encore faire remarquer que la seconde et la troisième parties peuvent être rattachées à la notion de puissance réduite $\frac{p}{2\varphi}$ d'un point M par rapport à un cercle (γ) . (Voir à ce sujet, dans le tome II de la *Géométrie* de M. HADAMARD, la note sur les propriétés anallagmatiques du cercle). Un élève a su utiliser ses souvenirs et tirer des propriétés de la puissance réduite une solution correcte de la deuxième partie. Il y a là un effort certain de rapprochement et de déduction mais au fond inutile puisque dans le cas simple où l'on se trouve, il s'agit de la puissance par rapport au pôle d'inversion M et que, dans ces conditions, les toutes premières transformations métriques de l'inversion permettent de voir que $\frac{p}{\varphi}$

devient le quotient de la puissance d'inversion par le rayon du cercle transformé. Il importe d'ajouter d'ailleurs que cette relation métrique simple et importante est généralement bien comprise et bien employée.

Nous en aurons fini avec les remarques d'ordre général concernant l'Algèbre et la Géométrie, en disant que, mises à part les vérifications possibles de la propriété qui fait l'objet de la troisième partie, la manière la plus simple (elle a été indiquée par un élève) de démontrer cette propriété est

de considérer d'une part le quotient $\frac{p}{p'}$, des puissances de M et de M' par rapport à un cercle (γ) et d'autre part le quotient $\frac{P}{P'}$, des puissances des mêmes points par rapport à un autre cercle (Γ) de la même famille. L'égalité $\frac{p}{p'} = \frac{P}{P'}$, s'écrit encore $\frac{p}{P} = \frac{p'}{P'}$, ce qui montre que M et M' sont sur un même cercle du faisceau déterminé par (γ) et (Γ) , pour lequel la puissance de H a la même valeur constante que pour les cercles (γ) et (Γ) ,

d'où il résulte immédiatement que les points M et M' sont bien inverses dans l'inversion qui transforme (c) en (c') et laisse invariants les cercles (γ) .

III. Les principales remarques suggérées par la lecture des compositions d'Algèbre et de Géométrie sont les suivantes :

Certes, l'enseignement de l'Algèbre est continuellement en progrès. On s'en rend parfaitement compte si l'on fait appel à des souvenirs vieux de plusieurs dizaines d'années. Mais qu'il reste donc difficile d'obtenir des calculs dirigés, interprétés, conduisant, comme cela doit être, à une étude complète de la question traitée ! Bien que l'unité du problème soit soulignée dans l'énoncé, trop souvent p n'est pas ordonné par rapport à q . Des cas particuliers dont l'étude se rencontre logiquement, comme celui dans lequel on a $r = r'$, ne sont que rarement indiqués. On connaît par cœur l'abscisse du pied de l'axe radical ou on la retrouve avec peine, au lieu de former tout simplement l'équation du premier degré qui la donne. Des calculs comme celui de la troisième partie et même de la seconde apparaissent souvent comme de considérables travaux. L'initiative laissée aux élèves pour le choix des signes dans le cas des cercles (γ_1) les a bien gênés. Il en est qui admirent ou critiquent les conventions de l'énoncé relatives aux cercles (γ) et ne peuvent se résoudre à exercer eux-mêmes un choix. Sont très rares ceux qui optent pour une convention unique et savent en déduire l'existence d'un seul point H_1 . Signalons encore que, malgré l'exemple donné par l'énoncé, l'aversion des candidats pour une convention dans laquelle le rayon d'un cercle (γ_1) variera de $-\infty$ à $+\infty$ est à peu près générale.

Plus que les années précédentes, nous avons trouvé chez les élèves la tendance à ne pas suivre d'une manière assez serrée les directives et les suggestions de l'énoncé, et à ne pas toujours bien en saisir l'originalité propre. Trop souvent les résultats sont devinés et non obtenus régulièrement. Comme ces résultats sont simples et qu'ils concernent des éléments connus, on est heureux de revenir aux sentiers battus et, ce faisant, on s'éloigne de l'esprit du problème. Sans doute ces constatations s'expliquent-elles aussi par le fait que la valeur du Concours se situe sensiblement moins haut que l'an passé. S'il y a beaucoup moins de copies blanches ou mauvaises, parce que le sujet est facile, les bonnes copies sont aussi moins nombreuses et les échelons qui les séparent sont plus marqués. Aussi le classement définitif, laborieux les années précédentes, s'est-il opéré très rapidement cette année.

Les progrès déjà constatés dans la présentation et la rédaction se maintiennent. Pourtant il y a recrudescence de fautes d'orthographe.

Il ne nous reste plus, pour terminer, qu'à signaler quelques erreurs méritant d'être relevées : « Les cercles (γ) forment un réseau. » « Pour que les contacts puissent être de natures différentes, il faut que les deux cercles (c) et (c') ne se coupent pas. » « L'un des centres d'homothétie disparaît lorsque les deux cercles sont sécants. » « Pour que $\frac{A + Bq}{A' + B'q}$

soit indépendant de φ et égal à k , il faut et il suffit que $B = B'k$. » Enfin, pour apporter une précision à une remarque précédemment faite, notons encore que dans la plupart des compositions, après avoir trouvé dans la première partie le point H à puissance constante, on ne calcule pas la valeur de cette puissance. C'est pour cette raison que les candidats qui ont pu montrer que $\overline{HM} \cdot \overline{HM'}$ reste constant, dans la troisième partie, n'ont pu cependant achever de caractériser l'inversion dans laquelle M en M' restent inverses l'un de l'autre.

IV. Une conclusion peut paraître inutile, car les remarques d'ordre général ont été incorporées aux trois parties de ce rapport.

Cependant, nous ne voudrions pas laisser le lecteur sur cette seule impression que le Concours de 1937, sur un sujet beaucoup plus facile, a donné nettement de moins bons résultats qu'en 1936. Après tout, cela pouvait être prévu en se reportant aux constatations faites aux Concours généraux de la classe de Première. Il n'en reste pas moins, si l'on se place au-dessus des particularités de telle ou telle année, que le labeur accompli dans nos classes de Mathématiques mérite de vifs éloges et que le jury éprouve une véritable satisfaction d'être appelé à en témoigner.

Le Président du Jury,
Th. LECONTE.