

---

## **V. Document officiel**

---

### **9. Rapport sur le Concours, en 1936, de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)**

Le présent compte rendu pourrait se réduire à un mot : tout s'est passé, à l'Agrégation de Mathématiques, en 1936, dans des conditions régulières et normales. Quelques particularités, néanmoins, peuvent être relevées ; ce sont elles seulement qui nous retiendront.

(1) Le Jury était composé de MM. TRESSE, inspecteur général, président ; LECONTE, inspecteur général, vice-président ; BÉGIN, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; BOULIGAND, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers ; ROBERT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

La première frappera immédiatement ceux qui lisent habituellement ces lignes, venant y recueillir des principes pour la préparation du concours ou la pratique de l'enseignement. Ils auront la surprise, la déception, de rencontrer, au terme de ces lignes, une signature nouvelle, et ne plus y trouver le nom auquel ils étaient accoutumés. Atteint par les années, M. BLUTEL n'a pas voulu qu'un semblant de privilège, que tous auraient cependant tenu pour légitime et justifié, lui permit de conserver plus longtemps la présidence du Jury ; son activité toujours égale l'y autorisait ; la haute qualité des services qu'il aurait ainsi continué à rendre à l'Enseignement semblait lui en faire une obligation ; nos sollicitations pressantes ont dû s'incliner devant un profond sentiment du devoir ; en obéissant à la règle commune, notre Président ajoutait un nouvel et noble exemple à tous ceux qu'il a donnés dans une longue carrière. M. BLUTEL était entré, pour la première fois, au Jury de l'Agrégation, en 1893, au titre de Professeur de l'Enseignement secondaire ; il en a fait partie pendant plus de 30 ans, le présidant pendant près de 20 ans ; il a sans cesse donné à ses collaborateurs, placés en face d'une tâche souvent pénible et délicate, l'exemple du dévouement, de la conscience, de l'équité, leur apportant les riches et multiples observations d'une pédagogie éprouvée et d'une science avertie. Ceux qui lui succèdent espèrent que l'activité du pédagogue et du savant, en s'exerçant sous d'autres formes, ne se ralentira pas, que ses conseils, ses remarques, continueront toujours à les aider, à les soutenir.

La seconde particularité de ce concours est la poussée ascendante dans le nombre des candidats : 214 se sont fait inscrire : 194 ont pris part aux compositions. Ces chiffres étaient de 185 et 168 en 1935, de 157 et 143 en 1934, de 90 et 83 en 1926 ; en deux ans, l'effectif s'accroît de 36 pour 100 ; en dix ans, la proportion est de 130 pour 100 ! L'accroissement doit avoir ses répercussions dans l'échelle des valeurs ; l'effet s'en fait sentir à tous les étages, mais, surtout, malheureusement, aux étages inférieurs.

L'admissibilité, qui retient 33 noms, s'établit sur un total de 29,5 points, correspondant à une moyenne de 7,5 : c'est la moyenne la plus élevée de la période d'après-guerre ; en 1935, il y avait 34 admissibles, avec 28,5 points ; en 1934, 38 avec 29 ; en 1928, année de faible moyenne, 39 avec 22,5. Sur ce point, il y a donc progrès.

Mais, à l'extrémité inférieure de l'échelle, le progrès s'établit en sens inverse. 50 concurrents, en effet, n'atteignent pas une moyenne supérieure à 3, soit un total de 12 points ; il y en avait 38 en 1935, 36 en 1934. Ces chiffres sont excessifs ; trop de jeunes gens affrontent le concours sans avoir les moyens d'y prendre une participation honorable. Plusieurs sont coutumiers du fait ; le renouvellement d'une expérience de ce genre devrait être interdit à tout sujet qui n'a rien fait ou rien pu faire, d'une année à l'autre, pour élever sa préparation et ses moyens. Cette situation anormale est soulignée, dans les lignes qui vont suivre, à propos de chacune des compositions écrites ; elle est contraire aux lois générales de la probabilité ; elle signifie que les 50 concurrents dont nous parlons, ne

peuvent pas, sauf exceptions accidentelles, être comptés au nombre des concurrents réguliers. Une autre observation, relative aux anciens admissibles, vient confirmer cette conclusion ; 33 de ces derniers participaient au concours ; 9 sont admissibles, 6 reçus ; mais tous, sauf un seul, obtiennent un total d'au moins 20 points et se classent à l'écrit dans les 100 premiers rangs ; le véritable terrain de culture de l'Agrégation ne s'étend pas beaucoup au delà de ces limites.

En revanche, si nous passons à l'autre extrémité de l'échelle, nous y rencontrons, dernière particularité de ce concours, une qualité exceptionnelle avec ceux qui se sont classés dans les premiers rangs. La première place s'est disputée, dans une brillante émulation, entre deux candidats que le Jury a été dans l'impossibilité de séparer, et qui sont arrivés tous deux à une moyenne générale de 17, atteinte quatre fois seulement en ces dix dernières années. Et ces jeunes gens avaient des émules ; le 10<sup>e</sup>, et non le 4<sup>e</sup>, comme l'an passé, atteint la moyenne générale de 12,5. Une mention spéciale doit concerner les candidats normaliens ; ils étaient 9 à se présenter ; tous sont admis ; tous arrivent en un peloton compact, se partageant les 9 premiers rangs. Ce fait ne s'est peut-être jamais rencontré dans les Annales de l'Agrégation ; il fait honneur à l'Ecole Normale, à l'esprit qui anime ses élèves et les fait travailler dans une saine et féconde collaboration.

La moyenne générale de 10, au-dessous de laquelle il avait fallu descendre antérieurement, a été obtenue par 23 concurrents (dont un classé hors rang, au titre des Colonies). C'est à ce chiffre que le Jury a fixé le nombre des Agrégés nouveaux, dépassant ainsi le nombre prévu de 18 sans pouvoir être taxé d'indulgence, tout en maintenant la qualité qui doit rester attachée au titre d'Agrégé.

Les pages qui suivent vont donner séparément, sur les diverses épreuves du concours, les observations des membres du Jury.

### Epreuves écrites (1).

*Mathématiques élémentaires* (M. LÉCONTE). — Le problème proposé est relatif, dans les parties I et II, aux trièdres (T) dont la somme des faces est égale à  $\pi$ . Mais, en vue de ménager l'effort des candidats, la question n'est pas abordée directement et l'on a reporté à la fin de II l'étude de la relation entre les faces.

Dans la partie I, l'attention des candidats est d'abord appelée sur le lieu (cône de Hachette) de la droite d'intersection de deux plans rectangulaires passant par deux droites données, en vue de la recherche des droites  $x'Sx$ ,  $y'Sy$ ,  $z'Sz$ , rectangulaires deux à deux, et telles que les plans  $y'Sz$ ,  $z'Sx$ ,  $x'Sy$  contiennent respectivement trois droites données  $u'Su$ ,  $v'Sv$ ,  $w'Sw$ . Il peut y avoir deux systèmes de solutions, un seul, ou zéro. La discussion de l'existence des solutions est demandée, ainsi que la démonstration du fait qu'une solution  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$  est double (la condition

(1) Voir les énoncés pages 11, 12, 14 et 16 du *Fascicule Spécial* 1936-A.

est nécessaire et suffisante) si les plans  $uSx$ ,  $vSy$ ,  $wSz$  ont une droite commune. Viennent enfin quelques questions complémentaires faciles qui permettent de vérifier que tous les préliminaires ont été suffisamment fouillés.

Cette première partie a généralement été traitée en étudiant la figure obtenue dans un plan perpendiculaire à l'une des droites données,  $u'Su$  par exemple. Deux des cônes de Hachette ont dans ce plan, pour bases, des cercles dont les centres d'homothétie interviennent simplement et jouent des rôles différents.

Des essais ont été tentés pour montrer directement le rôle important que possèdent dans cette question les bissecteurs des dièdres formés par les plans  $S\tau w$ ,  $S\tau u$ ,  $S\tau v$ , par exemple, en utilisant l'axe de la rotation qui permet d'amener en coïncidence deux trièdres trirectangles de même sommet ; quelques résultats ont été obtenus ; mais aucune solution n'a été, dans ce sens, poussée jusqu'au bout.

Dans la partie II, la figure est précisée ; on n'envisage plus que des demi-droites. A l'intérieur de chacune des faces d'un trièdre trirectangle  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$ , on considère trois demi-droites  $Su$ ,  $Sv$ ,  $S\tau$ , telles que les plans  $uSx$ ,  $vSy$ ,  $\tau Sz$  aient une droite commune  $Sk$ . La figure est coupée ensuite par un plan (P) qui donne sur  $Sk$  un point O, sur le trièdre  $Sx$ ,  $Sy$ ,  $Sz$  un triangle ABC, sur le trièdre  $Su$ ,  $Sv$ ,  $S\tau$  un triangle DEF.

Tout d'abord deux questions classiques sont rappelées : 1° Pour quels plans P le point O est-il centre de gravité de DEF ? (on peut, dans cet énoncé, remplacer DEF par ABC sans modifier les résultats, mais trop souvent, cette remarque n'a pas été faite) ; 2° Pour quels plans (P) le point O est-il orthocentre de ABC ? Dans le premier cas, le tétraèdre SDEF a ses quatre faces égales ; dans le second, les trois triangles SDE, SEF, SFD sont semblables. Ces deux cas se correspondent dans une inversion de pôle S. Dans chacun d'eux, le trièdre  $Su$ ,  $Sv$ ,  $S\tau$  est un trièdre (T). Il est alors possible de prouver que seuls les trièdres (T) peuvent d'une manière générale être coupés par un plan DEF de telle façon que les triangles SDE, SEF, SFD soient semblables ; on retrouve ainsi les solutions déjà obtenues, par une analyse qui a été conduite assez loin dans quelques copies, mais qui n'a été irréprochable dans aucune.

La partie III utilise à nouveau la figure de la partie II, mais dans l'hypothèse où le plan (P) est perpendiculaire à la droite  $Sk$ . Successivement, on se place dans deux cas différents, où certains des éléments de la figure restent fixes, les autres pouvant varier.

Le premier cas se ramène assez vite à un problème de géométrie plane et à la recherche d'une parabole qui se déduit aisément d'une autre parabole dont l'existence et l'importance ne peuvent échapper dès que la figure a été bien comprise.

Dans le second cas, qui revient, au fond, à l'étude des propriétés les plus simples de la surface lieu de la droite EF, la vue de l'espace reste plus longtemps nécessaire ; aussi les résultats véritables trouvés dans les compositions deviennent-ils plus rares ; dans aucune copie, en particulier,

l'enveloppe par laquelle se termine le problème, et qui conduit à un arc d'ellipse, n'est abordée.

197 copies ont été remises. La moyenne générale est 5,3 ; la moyenne des admissibles est 9,4 ; celle des reçus dépasse 10. Une note supérieure ou égale à la note moyenne, 10 sur 20, a été obtenue par 22 candidats : un 18, un 16, un 14,5, deux 14, un 13,5, deux 13, trois 12,5, un 12, un 11, trois 10,5, six 10. Viennent ensuite 75 notes comprises entre 9,5 et 5 ; sept 9,5, cinq 9, sept 8,5, dix 8, trois 7,5, quinze 7, deux 6,5, huit 6, dix 5,5, huit 5. Enfin, ce n'est pas sans regret que nous signalons le nombre beaucoup trop grand (100) des copies qui n'obtiennent pas la note 5 : quatre 4,5, seize 4, cinq 3,5 vingt-six 3, sept 2,5, seize 2, quatre 1,5, dix 1, neuf 0,5, trois 0.

Nous avons tenu à donner toutes les notes parce que, si la progression du nombre de candidats se maintient (82 compositions d'élémentaires en 1926, 92 en 1927, 144 en 1934, 169 en 1935, 197 en 1936), il pourra devenir raisonnable d'interpréter statistiquement des résultats de plus en plus abondants. Déjà il est intéressant de tracer, relativement à ces notes, le polygone de fréquence, dont la lecture vient préciser l'impression que le concours d'Agrégation se trouve actuellement alourdi par des éléments qui se trompent de voie. Il est d'ailleurs de l'intérêt de ces jeunes gens de les mettre en garde contre une poursuite de l'Agrégation qui restera vaine.

Est-il normal que plus de la moitié des notes, dans une composition d'extrême importance pour de futurs professeurs de l'enseignement secondaire, soient inférieurs à 5, alors que les deux premières parties commençant par des questions classiques dont le rappel constitue une aide précieuse pour la méthode à suivre ? N'est-il pas à remarquer que 75 candidats ont remplacé l'étude précise du dièdre droit qui conduit aux sections circulaires du cône de Hachette, par de vagues considérations, ou même par des erreurs ? Des pages de géométrie analytique ou de calcul vectoriel ne donnent pas de résultat, ou ne donnent pas d'autre résultat que la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique dans un cas particulier. Le mot homographie est souvent confondu avec le mot involution. Il est question assez fréquemment de « l'axe du cône de Hachette ». Plus précisément, on nous a appris que « le cône décrit par  $Sx$  est un cône de révolution contenant  $Sv$  et  $Sw$  ; ce résultat est d'ailleurs une application classique de l'homographie », et aussi « qu'un dièdre droit n'est coupé suivant un angle droit que par un plan de section droite ». Enfin, un candidat annonce que les trois plans bissecteurs des dièdres d'un trièdre ont une droite commune et nous prie de nous reporter à ce sujet à un ouvrage spécialisé dans l'étude géométrique du tétraèdre.

Il serait d'ailleurs profondément injuste de ne pas insister d'autre part sur les valeurs véritables que révèlent ces compositions de géométrie. Les candidats sont moins érudits qu'autrefois. Ils apportent dans leur travail moins de réminiscences, et bien plus de spontanéité et d'esprit de réflexion. Ces marques des progrès considérables réalisés dans notre enseignement font pardonner des gaucheries dont l'âge et l'expérience

viendront vite à bout. Des candidats qui ne découvrent pas directement les plans de section circulaire du cône de Hachette ne se tiennent pas pour battus ; ils trouvent une directrice parallèle à un plan principal et coupent alors par des plans perpendiculaires à l'un ou à l'autre des deux autres plans principaux. Les trièdres trirectangles circonscrits à un trièdre donné sont parfois obtenus trigonométriquement ; quelquefois avec des fautes de signes, de même que dans l'utilisation de l'inversion à puissance *négative* ainsi définie : Soit un plan (P), un point O de ce plan, un point S tel que OS soit perpendiculaire à ce plan ; au point M du plan (P), on fait correspondre le point M' tel que le plan MSM' contienne SO et que les droites SM et SM' soient rectangulaires. Quelques candidats ont été arrêtés parce qu'ils ne dominaient pas ces éléments, ni la transformation par polaires réciproques qui fait correspondre dans le plan (P) la perpendiculaire à OM' en M' au point M.

Nous devons un encouragement aux candidats qui n'ont pu être déclarés admissibles et qui ont remis des compositions de géométrie dont les qualités représentent un espoir, en particulier aux onze d'entre eux qui ont obtenu une note supérieure à la moyenne des notes des admissibles.

La rédaction, les soins matériels sont en progrès, très nettement. Toutefois, il n'est pas inutile de rappeler à de futurs professeurs qu'il est tenu compte des négligences graves (manque d'alinéas ou de numérotages pour passer d'une question à une autre ou même d'une partie à une autre, absence de figures, figures illisibles, etc...).

*Mathématiques Spéciales* (M. ROBERT). — 194 candidats ont pris part à l'épreuve de mathématiques spéciales.

Une composition a été notée 16 ; une 14,5 ; une 14 ; une 13,5 ; une 12 ; deux 11,5 ; une 11 ; six 10,5 ; dix 10. Vingt-quatre notes atteignent ou dépassent la moyenne.

Les autres comprennent six 9,5 ; onze 9 ; huit 8,5 ; douze 8 ; vingt-neuf 7,5 ou 7 ; vingt-huit 6,5 ou 6 ; vingt-et-un 5,5 ou 5 ; neuf 4,5 ou 4 ; seize 3,5 ou 3 ; dix 2,5 ou 2 ; onze 1,5 ou 1 ; trois 0,5.

La moyenne générale 6,26 est supérieure à celle (6,1) de 1935.

Vue dans son ensemble, la question proposée était l'étude d'une figure formée par une quadrique Q sans point double et cinq points en configuration particulière relativement à cette quadrique. On faisait ensuite intervenir les cubiques gauches passant par ces cinq points et dont la propriété essentielle est d'être « harmoniquement circonscrites » à Q.

La première partie présente la figure avec la donnée des quatre points A, B, C, D, sommets d'une tétraèdre effectif. En l'utilisant comme tétraèdre de référence, on demandait de déterminer les quadriques Q pour lesquelles la droite conjuguée de chaque arête du tétraèdre rencontre (au sens projectif) l'arête opposée de ce tétraèdre. Les conditions ainsi imposées à Q se réduisent à deux seulement.

L'obtention des conditions visées a été très généralement bien conduite. Ce premier succès a été exploité, par contre, avec trop de hâte. Pour mettre l'équation de Q sous la forme, indiquée dans le texte.

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + (a'x + b'y + c'z + d't)^2 = 0$$

on a trop usé du procédé d'identification, c'est-à-dire de la connaissance du but à atteindre. Lorsqu'on pose six nombres donnés égaux à des produits contenant comme facteurs quatre nouveaux paramètres, il y a lieu de fixer l'existence logique de ceux-ci ; se borner à décompter relations et paramètres, c'est une négligence.

Les rares candidats qui ont accordé quelque attention au système d'équations

$$\begin{array}{ll} a'b' = C & c'd' = C' \\ b'c' = A & a'd' = A' \\ c'a' = B & b'd' = B' \end{array}$$

où les données sont supposées telles que

$$AA' = BB' = CC' = \varphi$$

n'ont pas tous indiqué que le cas de  $\varphi = 0$  est singulier ; en fait la considération de ce cas peut s'écarter grâce aux indications fournies par l'énoncé. La résolution du système par le calcul séparé de  $a'^2$ ,  $b'^2$ ,  $c'^2$  est un léger manque de méthode, une ébauche, ne tenant pas compte du nombre des solutions.

Les six plans formés par une arête du tétraèdre ABCD avec la droite conjuguée de l'arête opposée sont concourants en un même point E ; pour le vérifier on a pris fréquemment ces plans trois à trois ou quatre à quatre, d'où des longueurs qui ont contribué à l'essoufflement des concurrents : il semble plus simple de mettre en évidence quatre coordonnées homogènes vérifiant les équations de tous ces plans. Une observation analogue concerne la propriété corrélatrice qui fait découvrir six points dans un même plan. Tout ceci pouvait se résumer en disant que le tétraèdre ABCD et son tétraèdre polaire par rapport à Q sont homologues.

Les coordonnées homogènes de E sont proportionnelles à  $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}, \frac{d'}{d}$ .

Le système des cinq points ABCDE peut être choisi arbitrairement et l'adjonction, à ABCD, du nouveau point E comme donné, impose à la quadrique Q de nouvelles conditions. Les coordonnées homogènes tétraédriques  $x, y, z, t$  ne sont autres que des premiers membres d'équations cartésiennes ordinaires qui, lorsqu'on les égale à zéro, représentent les faces BCD, CDA, DAB, ABC ; il est donc loisible de substituer à chaque coordonnée son produit par un facteur numérique non nul. On demandait d'utiliser un choix complet du système des coordonnées tétraédriques au mieux des conditions de notre étude.

$$\text{En posant } x = \frac{a'}{a}X \quad y = \frac{b'}{b}Y \quad z = \frac{c'}{c}Z \quad t = \frac{d'}{d}T$$

ce qui rend égales les coordonnées nouvelles XYZT pour le point E, l'équation des quadriques Q prend une forme où n'interviennent plus que quatre paramètres A, B, C, D (tous différents de zéro) :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DT^2 + (AX + BY + CZ + DT)^2 = 0.$$

Les propriétés des coordonnées tétraédriques homogènes semblent bien connues de la plupart des concurrents ; il est des exceptions qui croient devoir situer E au centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre ABCD.

Dans beaucoup trop de copies, en négligeant toute explication, on « fait »  
 $a' = a, b' = b, c' = c, d' = d$ .

On demandait le calcul de l'équation tangentielle de  $Q$  : cette recherche montre que le nombre  $H = A + B + C + D + 1$  doit être non nul (puisque  $Q$  n'est pas un cône) et aboutit à

$$\frac{U^2}{A} + \frac{V^2}{B} + \frac{W^2}{C} + \frac{R^2}{D} - \frac{(U+V+W+R)^2}{H} = 0$$

Les candidats qui ont préféré, pour ce calcul, l'étude directe des équations linéaires à l'emploi de leur déterminant sont en majorité ; aussi trente d'entre eux ont obtenu l'équation tangentielle d'une manière très satisfaisante.

Plus d'un concurrent a essayé d'étudier géométriquement la figure formée par les points ABCDE et leurs plans polaires ; la fantaisie des notations ( $A'B'$ , par exemple, pour la droite conjuguée de AB, sans définition de  $A'$  ni de  $B'$ ) a rendu pénible la lecture de ces études. Une remarque essentielle n'a pas été faite : les cinq points ABCDE ont par rapport à  $Q$  un rôle symétrique ; le pôle du plan défini par trois de ces points est sur la droite définie par les deux autres.

La moyenne, pour cette première partie, est atteinte dans cent trente-deux copies. Huit notes dépassent 8 sur 10.

La deuxième partie était indépendante de tout le reste du problème, elle provenait cependant d'une question à laquelle il a fallu renoncer en raison de sa difficulté et qui se liait au sujet d'ensemble.

Cette partie, facile encore, a été assez bien réussie.

On y demandait de trouver les quadriques  $S$  autopolaires par rapport à une quadrique donnée  $K$  et passant par deux droites données  $\Delta, \Delta'$ , conjuguées par rapport à  $K$ , et non coplanaires.

En vue d'une solution analytique, on avait suggéré de prendre comme tétraèdre de référence  $\mathfrak{T}$  un tétraèdre conjugué à  $K$ , ayant  $\Delta$  et  $\Delta'$  comme arêtes opposées. Il existe une double infinité de tels tétraèdres, leurs sommets étant deux points de  $\Delta$  conjugués et deux points de  $\Delta'$  conjugués, par rapport à  $K$ .

L'équation générale des quadriques  $S$ , rapportées à  $\mathfrak{T}$ , a été trouvée exacte dans beaucoup de copies. Mais on a trop délaissé son interprétation, indispensable ici, puisque le tétraèdre  $\mathfrak{T}$  n'est qu'un élément accessoire dont les résultats géométriques ne dépendent pas.

On a tenu grand compte des calculs corrects n'escamotant pas des transformations intermédiaires, mais jugé plus sévèrement ceux qui, par exemple, donnent d'emblée le résultat du développement d'un déterminant du cinquième ordre !

Deux chercheurs ont heureusement signalé que la quadrique définie par  $\Delta, \Delta'$  et une génératrice rectiligne arbitraire de  $K$ , soit par trois droites, répond visiblement à la question ; il n'est pas évident que ce procédé donne toutes les quadriques  $S$ , comme l'a reconnu l'un d'eux.

On aurait pu aussi observer, sans calcul, que dans toute quadrique  $S$ , les génératrices s'appuyant sur  $\Delta$  et  $\Delta'$  se correspondent deux à deux par cor-

rélation réciproque (polarité par rapport à K) ; cette correspondance est évidemment involutive et les éléments doubles sont des génératrices de S qui sont aussi génératrices de K.

$\Delta$  coupe la quadrique K en deux points (distincts) M et N,  $\Delta'$  coupe K en M' et N'. De ce qui précède résulte que toute quadrique S contient, outre  $\Delta$  et  $\Delta'$ , deux droites fixes (MM' et NN' ou MN' et NM') ; le quadrilatère gauche MM'NN' a ses côtés situés sur K.

Inversement, toute quadrique indécomposée passant par  $\Delta$ ,  $\Delta'$  et deux droites telles que les précédentes (pour fixer les idées MM' et NN') coupe la quadrique K suivant les droites non coplanaires MM', NN' et deux génératrices de l'autre système, celui de MN', NM' ; appelons-les  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ . D'après la remarque présentée plus haut, cette quadrique, contenant les droites non coplanaires  $\Delta$ ,  $\Delta'$ ,  $\Gamma_1$ , est une quadrique S.

Les quadriques demandées forment donc deux faisceaux (à la fois ponctuels et tangentiels) et définis, l'un par le quadrilatère gauche MM'NN', l'autre par le quadrilatère gauche MN'M'N.

Il y a encore correspondance involutive entre les génératrices, conjuguées par rapport à K, qui appartiennent sur S au système de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Les éléments doubles sont  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . On voit donc que  $\Delta$  et  $\Delta'$  ont, sur S, avec  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , un birapport égal à  $-1$ . En résumé, l'intersection avec K d'une quadrique S passant par MM' et NN' est formée de ces deux droites et de deux génératrices  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  de K, du système de MN', M'N, en birapport harmonique avec ces dernières.

Cent cinquante-quatre compositions ont abordé cette deuxième partie, quatre-vingt-dix d'entre elles ont atteint la moyenne. Les meilleures notes sur 10 sont 9 (une), 8 (deux), 7,5 (cinq).

Un raisonnement trop superficiel a fait croire à beaucoup qu'en chaque point commun à K et S, les deux quadriques se touchent. En fait il existe des quadriques autopolaires par rapport à K qui sont circonscrites à S, le long d'une conique. Leur considération était étrangère à la question posée, qui fait intervenir une espèce toute autre de quadriques autopolaires, parce que  $\Delta$  et  $\Delta'$  étaient précisées non coplanaires.

Les réminiscences sont parfois plus fâcheuses qu'utiles. « On sait », écrit un candidat, « que deux droites quelconques données et leurs conjuguées par rapport à une quadrique, sont quatre génératrices de même système d'une autre quadrique ». Cet énoncé est faux dans le cas général.

Dans la troisième partie, il s'agissait :

1° d'une cubique  $\Gamma$  passant par les quatre sommets d'un tétraèdre  $\mathfrak{T}$  conjugué à une quadrique ; il était à établir qu'il existe une infinité de tétraèdres analogues, conjugués à la quadrique et ayant leurs sommets sur  $\Gamma$  ;

2° en revenant à la première partie du problème, il fallait prouver que toute cubique passant par les cinq points ABCDE est circonscrite à une infinité de tétraèdres conjugués à Q.

Indiquons sommairement les calculs :

1<sup>re</sup> question : K étant rapportée à  $\mathfrak{T}$  par l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

et la cubique  $\Gamma$ , gauche, unicursale, par la représentation rationnelle (homogène)  $x = \frac{A}{\theta - \alpha}$   $y = \frac{B}{\theta - \beta}$   $z = \frac{C}{\theta - \gamma}$   $t = \frac{D}{\theta - \delta}$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  sont les  $\theta$  des sommets de  $\mathfrak{C}$ ) pour que deux points  $(\theta')$   $(\theta'')$  de  $\Gamma$  soient conjugués par

rapport à  $K$ , il faut et il suffit que  $\sum \frac{A^2}{(\theta - \alpha)(\theta' - \alpha)} = 0$

ou en multipliant les deux membres par  $\theta - \theta'$  supposé non nul :

$$\sum A^2 \left[ \frac{1}{\theta' - \alpha} - \frac{1}{\theta - \alpha} \right] = 0$$

Posons  $R(\theta) = \frac{A^2}{\theta - \alpha} + \frac{B^2}{\theta - \beta} + \frac{C^2}{\theta - \gamma} + \frac{D^2}{\theta - \delta}$ , la condition de conjugaison s'écrit  $R(\theta) = R(\theta')$ .

Il s'ensuit que les quatre racines de l'équation  $R(\theta) = \lambda$ , où  $\lambda$  est un paramètre arbitraire, donnent des points de  $\Gamma$  deux à deux conjugués par rapport à  $K$ , d'où un tétraèdre inscrit à  $\Gamma$  et conjugué à  $K$  pour chaque valeur de  $\lambda$ . A  $\lambda$  infini correspond le tétraèdre  $\mathfrak{C}$ .

2<sup>e</sup> question :  $Q$  ayant ici l'équation

$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + (ax + by + cz + dt)^2 = 0$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  étant les  $\theta$  des points  $A, B, C, D$  dans une représentation paramétrique rationnelle (homogène) telle qu'à  $\theta$  infini corresponde  $E$ , la cubique  $a$ , pour cette représentation :

$$x = \frac{1}{\theta - \alpha} \quad y = \frac{1}{\theta - \beta} \quad z = \frac{1}{\theta - \gamma} \quad t = \frac{1}{\theta - \delta}$$

condition de conjugaison pour les points  $(\theta)$ ,  $(\theta')$  :

$$\frac{a}{(\theta - \alpha)(\theta' - \alpha)} + \frac{b}{(\theta - \beta)(\theta' - \beta)} + \frac{c}{(\theta - \gamma)(\theta' - \gamma)} + \frac{d}{(\theta - \delta)(\theta' - \delta)} + \varphi(\theta)\varphi(\theta') = 0$$

en posant  $\varphi(\theta) = \sum \frac{a}{\theta - \alpha}$ .

Comme  $\frac{\varphi(\theta) - \varphi(\theta')}{\theta' - \theta}$  s'écrit  $\sum \frac{a}{(\theta - \alpha)(\theta' - \alpha)}$ , la condition s'écrit, pour  $\theta - \theta' \neq 0$

$$\varphi(\theta) - \varphi(\theta') + (\theta' - \theta)\varphi(\theta)\varphi(\theta') = 0, \text{ soit}$$

$$\frac{1}{\varphi(\theta)} + \theta = \frac{1}{\varphi(\theta')} + \theta'$$

condition encore de la forme  $R(\theta) = R(\theta')$  ; même démonstration de la propriété visée que plus haut. L'équation aux  $\theta$  des sommets des tétraèdres inscrits à la cubique et conjugués à  $Q$  est

$$\frac{1}{\varphi(\theta)} + \theta = \lambda \text{ (constante arbitraire), soit}$$

$$\frac{a}{\theta - \alpha} + \frac{b}{\theta - \beta} + \frac{c}{\theta - \gamma} + \frac{d}{\theta - \delta} + \frac{1}{\theta - \lambda} = 0 \text{ elle est encore du quatrième degré.}$$

Cette partie a été traitée à peu près complètement par deux candidats

(7 sur 10, 6 sur 10). Beaucoup d'autres se sont bornés à indiquer une représentation paramétrique de la cubique et ont été arrêtés devant la condition de conjugaison. Deux candidats traitent la première question en citant le théorème de Hesse sur les quadriques circonscrites à un tétraèdre conjugué à une quadrique, puis établissent correctement son corollaire relatif aux cubiques.

La moyenne des notes de la troisième partie est, pour les quatre-vingt-six compositions où il en est question, de 1,4 sur 10.

La quatrième partie n'a été abordée que par trois concurrents et dans les improvisations de la dernière heure. Il nous a semblé juste de ne pas en faire état dans l'appréciation de l'ensemble.

Il est très significatif que les candidats classés en tête pour cette épreuve sont, contrairement à un préjugé courant, des provenances et des catégories les plus diverses ; ceci atteste de beaux efforts, qui méritent le succès ; nous pensons que cette homogénéité est encourageante pour l'avenir.

*Composition de calcul différentiel et intégral* (M. BOULIGAND). — La composition, qui brassait des notions variées du programme, a révélé chez beaucoup de candidats des connaissances sérieuses, dont le rendement se fût accru avec une part plus grande faite à la réflexion.

La première partie présentait, par l'intermédiaire d'un système différentiel, linéaire quant aux deux fonctions  $x, y$  de la variable  $z$ , une congruence de droites. Il n'était donc pas indiqué de passer en coordonnées semi-polaires. A côté de cette tendance, il en sévit une autre plus fréquente : s'accrocher, avec l'énergie du désespoir, aux génératrices rectilignes des quadriques. Était-il donc si difficile de reprendre dans l'espace le calcul bien familier pour l'équation de Clairaut dans le plan, et qui réussit de même pour tout système différentiel tel que

$$z \frac{dx}{dz} - x = f\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) \quad z \frac{dy}{dz} - y = g\left(\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right);$$

On a souvent échoué devant les points focaux, localisés sur les droites isotropes  $y = ix, z = i$  et  $y = -ix, z = -i$ , sur lesquelles on avait  $U = V = W = 0$ . A noter encore cet état d'esprit : les cotes focales ayant été reconnues imaginaires, on se désintéresse du lieu des points focaux. Loin de manquer d'intérêt, il donne d'utiles renseignements pour la suite. Les réglées dont on va chercher les asymptotiques sont extraites d'une congruence linéaire, ce qui permettra d'avoir ces courbes sans symbole de quadrature : ce qu'on n'a guère expliqué. Le même mode de génération de la congruence permettait aussi d'en distinguer les quadriques, dont chaque section  $z = \text{const.}$  était circulaire ou rectiligne. Jamais famille ne se trouva plus décimée.

Les questions de la troisième partie ont reçu dans plusieurs copies des réponses raisonnables. On ne souligne pas assez, toutefois, qu'en supposant l'existence et la continuité de  $f''(u)$ , on valide le calcul des lignes asymptotiques, en tant que lignes tangentes en chaque point à une direction asymptotique de la surface (annulation de  $da \, dr + \dots$ ). Cela ne suffit pas à garantir,

pour une de ces lignes, l'unicité du plan osculateur, laquelle reparait si l'on suppose à  $f$  une dérivée troisième continue. Sur ce point qui correspond à des remarques très immédiates, et cependant peu connues, je m'étends davantage dans un article de *l'Enseignement Scientifique*, rédigé concurremment au présent rapport.

J'ai par contre le plaisir de signaler qu'un candidat, le premier de la composition, dont la copie se signale par sa clarté, a reconnu que le résultat de l'intégration précédente garderait un sens, si  $f'$  existait, sans que  $f$  eût nécessairement une dérivée seconde. C'est là un des points qui avaient le plus retenu ma propre attention en préparant la composition (1).

L'étude des deux exemples  $f(u) = u^2 \cos \frac{1}{u}$  et  $f(u) = \int_0^u u \cos \frac{1}{u} du$

ainsi que des particularités afférentes a été bien conduite par quelques candidats.

La IV<sup>e</sup> partie comportait l'étude d'ensemble des asymptotiques non rectilignes pour une trace sur le plan  $z = 0$  réduite à un contour convexe à courbure continue. Deux candidats ont nettement exposé la recherche de l'asymptote, en déduisant sa trace du centre de courbure de  $v = f(u)$  : le cas d'une branche parabolique n'avait lieu que si ce centre était rejeté à l'infini. J'ai rencontré dans maintes copies des confusions regrettables : par exemple, celle de l'asymptote avec la position limite de la génératrice menée par le point s'éloignant indéfiniment sur l'asymptotique non rectiligne.

Tous se ressaisissent à la V<sup>e</sup> partie. Pas mal de copies tentent l'explication géométrique de l'invariance de (E). On s'est aperçu assez souvent que la corrélation  $K(h)$  est celle d'un complexe contenant la congruence du début et, par suite, conserve individuellement chaque droite de cette congruence, d'où la possibilité de décomposer  $w(t)$  (transformation empruntée au groupe engendré par la transformation infinitésimale  $Udt, Vdt, Wdt$ ) sous la forme  $K(h') K(h'')$ .

La VI<sup>e</sup> partie n'a pas été délaissée. Les tentatives eussent été plus heureuses si l'on s'était mieux appliqué à retenir les conditions géométriques du problème, et en première ligne, l'existence des deux directrices imaginaires conjuguées de la congruence. Leurs points de rencontre avec l'axe des  $z$  et la droite à l'infini du plan  $z = 0$  étaient les points doubles des transformations demandées. Pour justifier cette assertion, fallait-il écarter une éventualité : celle d'une permutation des deux directrices de la congruence. Elle s'excluait de suite, grâce à l'hypothèse imposant à la cote du point transformé d'être fonction croissante de la cote du point originel. Parmi les transformations cherchées figuraient les transformations  $w(t)$  : il était aisé de composer avec elles des transformations  $H$  linéaires (donc partout continues) et redonnant le groupe total, à trois paramètres, ou, suivant l'énoncé, la famille  $F$ .

Au même titre que le groupe  $X = ax, Y = by, Z = cz$  des transforma-

(1) Cf. *Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège*, 1936, fasc. 5, p. 119.

tions homographiques conservant le tétraèdre obtenu en coupant le trièdre des coordonnées par le plan de l'infini, la famille F gagnait à se reporter à son tétraèdre fondamental :  $(x, y, z, t)$  représentant les coordonnées homogènes d'un point, il était indiqué de recourir aux coordonnées tétraédriques  $x + iy, x - iy, z + it, z - it$ . Elles se transformaient par des formules telles que

$$X + iY = (h + ik)(x + iy) \quad Z + iT = (m + in)(z + it)$$

$h, k, m, n$  étant réels. Il y avait encore similitude à un groupe de translations : c'était celui auquel ramenait le changement de variables donné dans la VII<sup>e</sup> partie. Un candidat en a reconnu la dite propriété. D'après cela, il était aisé de résoudre les diverses questions concernant des équations aux dérivées partielles non linéaires, questions qui terminaient le problème. Mais nul ne s'est aventuré jusque-là.

J'ai donné aux six premiers les notes : 16, 14,5, 12, 11,5, 11, 11. Il s'est trouvé 14 candidats pour atteindre ou dépasser la note 10. Un peu plus de 30 atteignent ou dépassent la note 8.

*Mécanique rationnelle* (M. BÉGHIN). — 181 candidats ont pris part à l'épreuve de mécanique. Les notes se répartissent de la manière suivante :

13 notes 0 et 0,5 ; 34 notes 1 et 1,5 ; 33 notes 2 et 2,5 ; 18 notes 3 et 3,5 ; 18 notes 4 et 4,5 ; 21 notes 5 et 5,5 ; 7 notes 6 et 6,5 ; 11 notes 7 et 7,5 ; 7 notes 8 et 8,5 ; 4 notes 9 et 9,5 ; 4 notes 10 et 10,5 ; 3 notes 11 et 11,5 ; 2 notes 12 et 12,5 ; 2 notes 13 et 13,5 ; 1 note 14,5 ; 2 notes 17 ; 1 note 18.

En dehors de trois très bonnes compositions et d'une douzaine de compositions convenables les résultats sont donc extrêmement faibles, la moyenne générale est de 4,3.

Le nombre important de compositions presque nulles montre que trop de candidats manquent de la correction la plus élémentaire vis-à-vis du jury en se présentant au concours sans avoir fait le moindre effort dans cette matière du programme.

Le sujet proposé, tout à fait classique, comportait l'étude d'une sphère pesante roulant sans glisser dans une gouttière cylindrique, à génératrices horizontales, fixe ou animée d'une translation le long de ces génératrices. La mise en équations se fait très simplement à l'aide des théorèmes généraux, en utilisant les axes de coordonnées conseillés dans l'énoncé. Les calculs sont très simples, les résultats aboutissent à des courbes simples, droites, cycloïdes, sinusoïdes, mouvements sinusoïdaux ou uniformes.

Les équations de Lagrange avec multiplicateurs ne sont pas à conseiller car elles nécessitent l'emploi de paramètres géométriques, tels que les angles d'Euler, pour définir la position de la sphère ; or, lorsqu'il s'agit d'une sphère homogène dont tous les diamètres interviennent au même titre, l'utilisation de paramètres qui particularisent l'un de ces diamètres (paramètre  $OZ_1, OZ = 0$ ), introduit toujours un élément de complication masquant la simplicité des résultats. Cette méthode est donc toujours à rejeter dans cette catégorie de problèmes.

L'emploi des angles d'Euler, au lieu de l'introduction des composantes de

la rotation de la sphère a arrêté un très grand nombre de candidats. Il est cependant inadmissible qu'un candidat ne connaisse pas les deux méthodes classiques qu'il a à sa disposition et ne soit pas au moins en état de comparer les mises en équation correspondantes afin d'adopter celle qui donne les résultats les plus simples, s'il ne connaît pas les raisons *à priori* du choix qu'il a à faire.

Les liaisons n'étant pas holonomes, l'emploi des équations de Lagrange exige l'introduction de multiplicateurs. Certains candidats n'ont pas introduit ces multiplicateurs, ce qui revient à étudier une sphère glissant sans frottements. D'autres ont réduit le nombre de paramètre en utilisant les équations non holonomes avant d'écrire les équations de Lagrange, ce qui conduit à des résultats complètement erronés. Ce sont des points délicats mais classiques que doivent mettre en évidence les professeurs chargés de la préparation des candidats à l'agrégation.

Certains candidats n'ont même pas su définir correctement les angles d'Euler, les uns se contentent de deux angles sous prétexte que la position du centre de la sphère introduisait déjà un paramètre angulaire  $\theta$ , les autres prenant trois angles de rotation autour des 3 axes GX, GY et GZ, indiqués dans l'énoncé, ce qui est manifestement absurde.

Dans l'application des théorèmes généraux, bon nombre de candidats moyens ont écrit le théorème du centre de gravité et le théorème du moment cinétique en projetant sur les axes fixes  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ . Cette méthode est correcte, elle a seulement l'inconvénient d'allonger les calculs. D'autres plus habiles ont projeté sur les axes mobiles GX, GY, GZ, conseillés dans l'énoncé.

D'assez nombreux candidats ont écrit ces équations correctement en tenant compte du mouvement de ses axes de coordonnées.

Quelques-uns ont utilisé le théorème du moment cinétique pris par rapport au point de contact de la sphère et de la gouttière. Cette méthode particulièrement délicate présente l'avantage d'éliminer automatiquement les composantes de la force de liaison. Son emploi correct montre chez le candidat une connaissance parfaite des méthodes de la dynamique du solide, j'en ai tenu le plus grand compte.

Je signale ceux qui ayant étudié cette méthode de calcul au cours de leur préparation n'en ont pas compris l'application, confondant dans l'expression du terme correctif dû à la mobilité du point de contact la vitesse du point géométrique de contact avec la vitesse de l'élément de matière qui coïncide avec lui à l'instant considéré.

Je signale également ceux qui ont considéré, ce qui est tout à fait inexact, qu'on pouvait sans précaution spéciale, appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à ce point, la vitesse de glissement y étant nulle, ainsi que ceux qui ont appliqué les équations toutes faites dites « équations d'Euler » établies pour des axes de coordonnées invariablement liés au solide mobile en utilisant les axes mixtes GX, GY, GZ, indiqués dans l'énoncé.

Ces équations sont à proscrire de l'enseignement sous la forme particulière à laquelle je fais allusion.

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) \omega r = L.$$

Il faut au contraire insister sur la détermination de la vitesse du moment cinétique comme somme d'une vitesse relative et d'une vitesse d'entraînement, lorsque l'on veut utiliser un système de coordonnées mobiles.

Certains candidats ont appliqué le théorème du moment cinétique par rapport au point fixe, n'ayant d'autre propriété que d'être l'origine d'un système d'axe fixe  $ox$ ,  $oy$ ,  $oz$ , ce qui donne évidemment des équations compliquées. Il y a là vraiment un manque d'expérience qui met en lumière l'insuffisance de la préparation.

Les méthodes vectorielles sont très en honneur actuellement ; je suis forcé de signaler que ceux qui en ont abusé n'en ont pas tiré grand profit, ne s'apercevant pas, en s'éloignant ainsi du concret, des erreurs grossières qu'ils commettaient dans l'application des théorèmes de la dynamique.

Plusieurs candidats ont considéré comme intuitif que la sphère pouvait s'assimiler à un point matériel glissant sans frottement, il y a là un vieux souvenir de certains cours élémentaires où le mouvement du moind matériel sans frottement sur un point incliné est illustré par le roulement d'une bille sur ce plan, ce qui est tout à fait absurde.

Un très grand nombre de candidats ont pris comme sens positif des rotations dans le plan de coordonnées ZGX le sens de GX vers GZ ; on ne devrait pas avoir à rappeler que les formules classiques de la mécanique sont établies en prenant comme sens positifs dans les plans de coordonnées les sens GY, GZ ; GZ, GX ; GX, GY. Il en est résulté des erreurs importantes.

Je signale la locution « force centrifuge » utilisée constamment au lieu de « force d'inertie d'entraînement » Cette locution est à rejeter : dans le cas d'une translation rectiligne, elle est manifestement ridicule.

Je termine par un certain nombre de citations assez décourageantes.

Je lis dans une composition qu'une sphère qui roule sans glisser sur une surface est soumise à une réaction normale et à un couple s'opposant au glissement et tendant à faire tourner la sphère dans le sens du mouvement, couple représenté par deux forces appliquées à la sphère aux deux points de vitesse nulle...

Dans une autre composition, la sphère est soumise : 1° à son poids ; 2° à la réaction X, Y, Z de la surface fixe ; 3° au pivotement  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $P_z$ , issu du point de contact, la résistance au pivotement étant négligée, et c'est le vecteur  $X + P_x$ ,  $Y + P_y$ ,  $Z + P_z$ , qui figure dans les équations...

Tel autre indique dans le cas du roulement sans glissement que la composante tangentielle de la réaction est opposée à la vitesse du point de contact. Un autre se contente d'une réaction normale en indiquant que l'action du poids est, elle aussi, normale à la surface...

Un candidat désigne la masse et le poids par la même notation  $m$ ,

Dans plusieurs compositions les composantes de la vitesse du point G suivant les axes GX, GY, GZ, sont désignées par des expressions de la forme  $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ ; que sont donc  $x, y, z$  ?

Le moment d'inertie de la sphère par rapport à un diamètre est indiqué par l'un des candidats sous la forme

$$I = \frac{2}{3} \int_0^a mr^2 dr = \frac{2}{3} \frac{ma^3}{3} !...$$

Je répète ce que j'ai dit au début de ce rapport ; un trop grand nombre de candidats se présentent au concours, soit avec des dispositions vraiment insuffisantes, soit sans avoir fait un effort constituant un minimum de décence.

### Epreuves pratiques (1).

*Épure* (M. ROBERT). — La première partie de la question comportait l'étude, puis la représentation d'une surface de révolution, qui n'est autre qu'un tore.

1° Pour définir cette surface S l'énoncé faisait intervenir un tétraèdre régulier ABCD et un cercle  $\Gamma$ , centré en G, centre de gravité du tétraèdre, dont le plan est parallèle aux arêtes opposées AB, CD ; son diamètre est supposé égal à AB. S est engendrée par la rotation du cercle  $\Gamma$  autour de l'arête AC du tétraèdre.

De par la mise en place, AB était vertical et AC de front. Une étude géométrique, en marge des tracés de l'épure, s'imposait donc relativement à la nature de S.

La considération d'un cube associé au tétraèdre et obtenu en menant par chaque arête de celui-ci un plan parallèle à l'arête opposée, est commode pour voir les données du problème dans l'espace ; elle est utilisée dans la théorie des symétries du tétraèdre régulier, qu'on voudrait voir mieux connue. Il apparaît que  $\Gamma$  passe par les milieux de quatre arêtes parallèles du cube et que AC est diagonale d'une des faces parallèle à cette direction d'arêtes. L'angle de AC et du plan  $\Gamma$  est donc de  $45^\circ$ .

Il en résulte, en cherchant les éléments de l'ellipse projection du cercle  $\Gamma$  sur le plan perpendiculaire à AC en son milieu O, que G est centre de cette

ellipse, et que son foyer est le point O, car  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . D'après ce dernier

résultat, il est classique que S est un tore dont  $\Gamma$  est un cercle de Villarceau. Le rayon des cercles méridiens est la demi-arête du cube ; le cercle médian du tore est égal au cercle  $\Gamma$ . Le plan de  $\Gamma$  est bitangent à S aux points de  $\Gamma$  situés sur la corde de ce cercle perpendiculaire en O à OG. Avec l'épure actuelle, ces points sont le point le plus haut et le point le plus à droite de  $\Gamma$ .

{1} Voir les énoncés page 18 du *Fascicule Spécial* 1936-A.

Le tiers seulement des compositions décèle la connaissance du théorème d'Yvon Villarceau et des faits simples qui s'y rattachent. Plusieurs concurrents ont semblé voir pour la première fois cette question et ont pensé, à faux, que la rotation d'un cercle quelconque autour d'une droite donne toujours un tore. Trois justifications sont tout à fait claires et correctes.

2° La représentation du tore  $S$ , à la suite du tracé des projections du cercle  $\Gamma$ , donne lieu à celui du contour apparent horizontal. C'est une courbe  $l$ , d'ordre huit, parallèle à la projection horizontale du cercle méridien du tore.

Le plan  $P$  du cercle  $\Gamma$  est vertical et touche le tore  $S$  aux points le plus haut et le plus à droite de  $\Gamma$  ; il coupe  $S$  selon  $\Gamma$  et un autre cercle  $\Gamma_2$  symétrique de  $\Gamma$  par rapport à  $O$ , qui croise  $\Gamma$  en ces deux points. Ils sont sur la ligne  $L$  de contour apparent horizontal de  $S$  dans l'espace, car  $\Gamma$  ou  $\Gamma_1$  a une tangente verticale en un tel point. La construction générale de la tangente à  $L$  à l'aide de l'indicatrice de  $S$  au point de contact met en évidence pour ces points des tangentes à  $L$  elles-mêmes verticales, tangentes inflexionnelles pour  $S$ . Le plan osculateur à  $L$  est confondu avec le plan tangent  $P$  au tore. D'où, sans recherche spéciale, deux des rebroussements apparents de la courbe  $l$  projection horizontale de  $L$ , et leurs tangentes, confondus avec la trace de  $P$ .

Cette particularité a été aperçue, graphiquement, dans quinze épreuves. Onze candidats n'ont pas tracé la ligne  $l$  de manière complète.

3° On demandait de déterminer un hyperboloïde  $H$  passant par les deux cercles bisécants  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  (symétriques par rapport au plan de front  $F$  de  $AC$ ) qui soit osculateur au tore  $S$  au plus élevé ( $\varepsilon, \varepsilon'$ ) des points d'intersection de  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ .

Toute quadrique passant par  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  est tangente à  $S$  en ces deux points ; il est nécessaire et suffisant, pour notre objet, que sa section par  $F$  soit de plus, osculatrice à la section méridienne du tore passant par ( $\varepsilon, \varepsilon'$ ).

Deux plans principaux pour toutes ces quadriques sont en évidence : le plan de front  $F$  et le plan horizontal qui contient les axes des cercles  $\Gamma, \Gamma_1$ , c'est celui du point  $G$ . Les sections de  $H$  par ces plans sont donc contours apparents frontal et horizontal de  $H$ . Leur détermination conduisait à des problèmes simples sur les faisceaux de coniques. D'ingénieuses solutions en ont été données par certains. La section par  $F$  est donnée par un axe, un point et le cercle osculateur en celui-ci ; la section par  $H$ , une fois connu le centre de la section par  $F$ , est définie par les supports des axes et quatre points. On a donné aussi ses directions asymptotiques d'après un procédé employant l'indicatrice commune à  $S$  et à  $H$  au point ( $\varepsilon, \varepsilon'$ ).

4° Pour représenter enfin un solide commun à  $S$  et  $H$ , il restait à trouver l'intersection de ces surfaces. Le point ( $\varepsilon, \varepsilon'$ ) est triple sur cette intersection, qui contient *a priori*  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  ; le restant de l'intersection est une quartique, projetée sur le plan de symétrie  $F$  commun à  $S$  et  $H$  selon une conique  $E'$ .

Une détermination directe des points communs à  $S$  et  $H$  semble pénible.

Mais le fait que les points à l'infini du tore sont doubles sur S montre aisément que la quartique cherchée a mêmes points à l'infini que l'ensemble des cercles  $\Gamma, \Gamma_1$ . Il en résulte que  $E'$ , en projection frontale, est une ellipse homothétique à la projection frontale commune de  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$ ; le rapport d'homothétie est  $\pm 1$ , puisque ces deux ellipses ont deux tangentes communes parallèles en évidence, selon les traces frontales des plans des parallèles limites de S.

Donc la courbe E se déduit de la projection frontale de  $\Gamma$  par une translation, perpendiculaire à AC, qu'on détermine aisément d'après la connaissance des points de l'intersection de S et H situés dans le plan de front F.

La quartique à déterminer, ayant des points à l'infini situés sur l'ombilicale est : 1° une biquadratique, car elle est commune à l'hyperboloïde H et à un cylindre elliptique  $E'$ ; 2° une biquadratique sphérique (l'une des quadriques du faisceau qu'elle détermine coupe le plan de l'infini selon l'ombilicale). Il est intéressant de déterminer la sphère qui la contient : une petite étude graphique montre que son centre est le symétrique du point A par rapport à la verticale de O. On peut, désormais, obtenir la projection horizontale de la quartique cherchée en rappelant horizontalement les points d'une courbe d'une sphère donnée, dont les projections frontales sont connues.

Ce tracé met en évidence deux points doubles nouveaux de l'intersection complète des surfaces S et H. La ponctuation du solide demandé s'ensuit et ne demande qu'un peu d'attention.

Un seul candidat est parvenu à apercevoir les formes des deux projections de la quartique, qui sont *grosso-modo* exactes. Il lui aurait fallu plus de temps pour obtenir un tracé précis et le résultat déjà obtenu nous a paru hautement satisfaisant.

Le sujet de cette composition, plus difficile que celui de l'an dernier, a mis en relief la valeur du concours de 1936; une discrimination délicate et peut-être trop rigoureuse a dû être effectuée pour le classement de l'épreuve : neuf notes atteignent ou dépassent la moyenne : un 16, un 14, un 13,5, un 13, un 12,5, un 12, deux 10,5, un 10. La moyenne des notes est de 7,33 sur 20.

*Calcul* (M. BOULIGAND). — Pour la composition de calcul, ont été décernés un 19, un 18, un 17, deux 16, quatre 15, etc... Il s'agissait, ayant fait un croquis d'ensemble des intégrales de l'équation

$$(E) \quad y' = e^y - x$$

de préciser celle de ces courbes passant au point (0, 1) en y déterminant le rayon de courbure et situant l'asymptote parallèle à Oy. Le premier résultat s'obtenait en évaluant la valeur numérique de la fonction

$$(x+1)^{3/2} (x-1)^{-1}$$

pour  $x = e^2$ . On n'a guère songé à remarquer qu'autour de cette valeur, le diagramme a une pente  $< 0,1$ , ce qui facilite le calcul de la valeur demandée  $R = 3,80$  à moins de 0,01 près par défaut.

L'équation (E) se réduisant à une équation linéaire par le changement de variables  $e^{-y} = u$ , on obtient aisément la représentation de ses inté-

grales. L'asymptote de celle qui passe au point (0,1) a son abscisse donnée par l'équation

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{e}$$

Le recours aux deux premiers termes du développement représentant le premier membre fournissait l'approximation demandée (erreur absolue < 0,02), c'est ce qu'on n'a pas en général montré d'une manière satisfaisante.

### Epreuves orales (1).

Les épreuves orales, auxquelles ont participé 33 candidats admissibles, chacun d'eux exposant deux leçons, l'une de Mathématiques élémentaires, l'autre de Spéciales, ont été, en général, satisfaisantes. Chacune des notes 19, 18, 17 a été attribuée une fois en Spéciales, deux ou trois fois en Élémentaires ; huit notes seulement sont inférieures à 10, deux (9 et 7) en Élémentaires, six (trois 9, deux 8 et un 6) en Spéciales ; la moyenne des notes est de 13,7 en Élémentaires, 13,5 en Spéciales.

En thèse générale, nos jeunes gens pensent et construisent leurs leçons, les développent autour d'une idée directrice. A côté de thèmes classiques où il ne s'agit guère, pour le candidat, que de distraire avec discernement, de l'ensemble de ses connaissances, certaines pages déterminées, le Jury a augmenté cette année le nombre des sujets de composition. Une étude particulière est proposée ; le candidat doit l'ordonner, y souligner l'application de principes généraux, en dégager l'esprit d'une méthode. Bien que disposant d'une certaine latitude pour diriger la leçon dans des sens divers, sa tâche paraît plus difficile. Elle l'est, en effet, et le Jury ne peut réclamer alors l'aisance, l'habileté apportées dans des circonstances plus habituelles. Mais la tâche exige de la réflexion, et l'effort nécessaire ainsi imposé a toujours été récompensé. Une étude sur les analogies entre trièdres et triangles, sur les propriétés des plans bissecteurs, plans hauteurs, etc., a été fort bien conçue, non pas comme une succession de propriétés intéressantes et curieuses, mais dans un excellent esprit d'analyse et d'observation. Un candidat invité à donner des principes sur la résolution trigonométrique des triangles dans les cas non classiques, a commis la maladresse, en débutant, de débayer rapidement, sans s'y intéresser, des exemples simples, bien choisis cependant, qui se seraient très bien prêtés à l'exposition d'une méthode, à la présentation d'un ou plusieurs exemples de discussion ; mais il s'est arrêté longuement, avec originalité et succès, sur l'analyse de la configuration formée par les trisectrices des angles d'un triangle, pour aboutir à la découverte récente du Géomètre américain MORLAY. Un autre auquel était proposée l'étude du quadrilatère convexe dont deux angles opposés sont droits, n'a pu, dans le temps limite qui lui était accordé, décou-

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1936 peut être demandée au Bureau (joindre 3 francs en timbres poste)

virer toutes les ressources apportées par ce problème ; il est resté simple ; il a mis en évidence les éléments numériques constitutifs de la figure ; il a établi les conditions qui les relient, traité quelques cas simples de résolution, et développé un exemple numérique ; sa franchise, son honnêteté, ont été appréciées et récompensées.

Au reste, sans qu'il soit besoin de leur demander, les candidats comprennent bien que l'une des qualités essentielles d'un Professeur de Mathématiques est d'aimer la recherche et de la faire aimer par leurs élèves. Certains sujets classiques ont été renouvelés avec originalité. Ainsi, la décomposition des fractions rationnelles et sa solution unique ont été rattachées à un système d'équations linéaires, système de Cramer, en raison de cette circonstance qu'il n'admet que la solution banale lorsque les constantes sont nulles. La théorie des formes linéaires a été présentée indépendamment de celle des équations linéaires ; le principe est de connaître seulement l'existence de solutions non toutes nulles d'un système d'équations linéaires homogènes ayant plus d'inconnues que d'équations, la dépendance des formes linéaires étant définie et établie par les relations linéaires entre les formes ; ce point de vue n'est pas sans offrir de sérieuses difficultés ; le candidat les a surmontées sans accident, en y apportant de la finesse, de la distinction ; peut-être ne s'y exposera-t-il plus devant des élèves ; mais il sera de ceux qui estiment que la difficulté, abordée de front, puis complètement résolue, est sensiblement plus éducatrice que l'habileté qui consiste à la tourner.

L'étude élémentaire des coniques a été l'objet, en ces derniers temps, de discussions nombreuses et étendues de la part d'illustres savants qui ont renouvelé la matière et ne sont pas diminués en apportant leur contribution à une théorie de géométrie élémentaire. Leur action a exercé une heureuse influence sur plusieurs leçons, influence qui se prolongera, il faut l'espérer, dans l'enseignement. L'étude des trois coniques, à partir de leur définition commune au moyen d'un foyer et de sa directrice, a pu même être poussée assez loin, et dans un esprit tout nouveau, tout en restant dans le cadre des éléments. Comment se fait-il que le candidat n'y ait vu qu'une succession de particularités et de problèmes ingénieusement traités, et qu'il n'ait jamais mentionné l'idée directrice de sa méthode, à savoir que toute conique peut être définie comme la projection d'une section plane d'un cône de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe du cône ? C'est mal enseigner que de se condamner à explorer minutieusement un terrain à l'aide d'une lanterne sourde, alors que l'on dispose d'un phare qui permet d'éclairer et de dominer tout l'ensemble.

Parmi les bonnes leçons, inspirées constamment par la pensée agissante, et bien faites pour apprendre aux élèves à penser, le Jury a eu le plaisir d'entendre celles des deux premiers candidats du concours, qu'il s'agisse du calcul des fonctions symétriques entières, exposé avec nerf et sobriété sans sortir du simple domaine du calcul algébrique des polynômes entiers, ou des plans tangents au paraboloïde hyperbolique, traités en menant de front les idées générales et leurs applications particulières, de l'étude des

trièdres, de leur sens, de leurs cas d'égalité ou de symétrie, étude développée avec une élégance captivante sans sacrifier en rien la netteté, ou d'une leçon sur la simple résolution de l'équation trigonométrique classique, linéaire en  $\sin x$  et  $\cos x$ , leçon remarquable où le sens pratique et concret s'associe à une science solide.

Des autres leçons, moins heureuses, quelques indications ou conseils se dégagent à l'adresse des futurs candidats. Le dogmatisme, dont la plupart se défendent heureusement, perce encore ici et là ; nous venons d'en citer un exemple, à propos de l'étude élémentaire des coniques. Un autre s'est rencontré, qui concerne la résolution de l'équation du second degré : les élèves qui auraient suivi la leçon entendue au concours ne soupçonneraient pas que cette résolution exige une extraction de racine carrée, ou, tout au moins, n'en comprendraient pas la nécessité.

Certaines leçons sont trop copieuses et comprennent, en fait, deux leçons en une seule. A propos des applications géométriques du calcul intégral, il y a lieu de parler soit du calcul de grandeurs définies ailleurs, aires, volumes, moments, etc., soit de la définition de grandeurs nouvelles, les longueurs d'arc en particulier ; il faudrait plutôt se limiter à un seul sujet, le premier de préférence.

D'autres leçons, inversement, sont trop brèves, qu'il serait bon de compléter par des exercices d'application : telles les leçons sur les poles et polaires par rapport à un cercle ou une sphère, sur les déplacements en Géométrie plane, sur l'égalité des trièdres.

Enfin et surtout, à l'Agrégation aussi bien que devant des élèves, un maître doit être franc et sincère. Il ne faut pas glisser rapidement, incomplètement, sur le sujet principal de la leçon, pour s'étendre longuement, habilement, sur un sujet voisin, négliger la démonstration élémentaire de la composition des vitesses en déterminant la limite d'un vecteur sans s'occuper du déplacement simultané du système auquel est rapporté ce vecteur, pour développer avec virtuosité des calculs vectoriels sur la composition des déplacements. Vers la fin d'une leçon, surtout d'une leçon fortement pensée, la fatigue peut survenir ; une conclusion peut échapper alors qu'elle est immédiate, que tous les éléments en ont été cependant bien préparés ; le maître qui aura dirigé cette leçon en s'appuyant sur l'activité de la classe, trouvera généralement et naturellement le secours nécessaire auprès de ses élèves ; sinon il aura la franchise de reporter l'explication nécessaire au début de la prochaine séance. C'est bien ce qu'a fait un candidat, un des meilleurs, auquel le Jury n'a tenu nulle rigueur de ce que l'on ne peut pas appeler une défaillance ; c'est ce que n'a pas compris un de ses camarades, qui a voulu conclure quand même, et a terminé une bonne leçon par une lourde maladresse.

En résumé, ces épreuves laissent espérer que le concours nous aura donné des maîtres cultivés, qui seront appréciés en raison de leur science, leur application, leur caractère.

*Le Président du Jury,*  
A. TRESSE.