

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1936**

Le thème de la composition (1) est une étude des projections coniques, sur un même plan fixe, d'un même point ou d'une même droite, les projections étant prises à partir de trois points de vue A, B, C, sommets d'un triangle équilatéral ABC dont le plan est perpendiculaire, et la base BC parallèle, au plan de projection.

La recherche des qualités caractéristiques d'un triangle T_M formé par les projections d'un point variable M, et de la configuration formée par les projections d'une droite variable Δ , la détermination des triangles T_M semblables ou égaux à un triangle donné ou des configurations de grandeur invariable, constituent deux parties de Géométrie du problème ; la variation du volume limité par les triangles ABC et T_M et par les projetantes de M lorsque M parcourt une partie de droite passant par A, forme une troisième partie, réservée à l'Algèbre.

Ainsi que l'épreuve l'a démontré, ce sujet reste dans les moyens de nos élèves. Contrairement aux précédentes, les copies nulles ou médiocres ont été, en effet, en nombre fort restreint, de quelques unités à peine. Toutes les parties du sujet ont été, ou traitées avec plus ou moins de succès, ou au moins abordées par tous. Cette circonstance nous dispensera de donner ici quelques indications sur les moyens que des élèves de Première devaient ou pouvaient utiliser pour traiter certaines parties de la composition.

Le Jury, d'autre part, a été heureux de relever des progrès sensibles dans la tenue générale du Concours. Les copies bien présentées sont plus nombreuses ; l'orthographe, l'écriture, sont plus soignées ; les figures sont dessinées avec soin et généralement claires ; certaines même sont très complètes, trop complètes, car des figures séparées, réservées à des points particuliers, sont préférables à une figure d'ensemble et plus expressives.

Malheureusement, cette première impression, impression d'ensemble et d'honnête uniformité, ne s'affirme plus lorsqu'on cherche à distinguer les meilleurs. La moyenne est sérieuse ; les élèves possèdent incontestablement les matières de leur programme ; mais l'élite se distingue difficilement ; les qualités de jugement, d'observation, celles qui révèlent une personnalité, ne se manifestent pas ; une seule copie fait exception qui se distingue nettement par son intelligence alerte, qui sait attaquer un problème par ses caractères essentiels, le résoudre rapidement et non sans élégance.

Les faiblesses les plus nombreuses, celles qu'il y a intérêt à signaler, se rattachent en thèse générale à trois catégories : ignorance de la Géométrie plane, étudiée dans la classe de Seconde ; difficulté de traduire une idée, de présenter un raisonnement, en termes simples, expressifs et complets ; abus, en Algèbre, du mécanisme.

L'étude de la division harmonique, de ses caractères, est un chapitre sur

(1) Voir l'énoncé page 4 du *Fascicule Spécial 1936 B1°*.

lequel les maîtres insistent longuement, et avec raison, en Seconde, en Troisième. Nombreux sont cependant les élèves qui, en Première, en ont une méconnaissance totale ; ayant à déterminer, dans l'espace, le lieu des points dont les distances à deux plans parallèles sont dans un rapport constant, ils ignorent l'existence des deux points qui partagent additivement ou soustractivement un segment de droite dans un rapport donné ; ils reproduisent péniblement, incomplètement, avec des hypothèses de position mal définies, un calcul connu ; beaucoup ne trouvent qu'un seul point, ou en trouvent deux sous prétexte qu'une distance à une origine détermine deux points sur une droite ; inversement, ils ignorent que la comparaison du rapport à l'unité permet de caractériser les diverses parties de la droite séparées par les repères fixes.

A propos des angles inscrits et du segment capable, étudiés en Quatrième, puis en Seconde, les connaissances des élèves ne vont pas au delà de l'angle inscrit proprement dit, formé par deux cordes d'un même cercle ; l'extension aux angles dirigés, dont les côtés sont des droites illimitées, est une notion qui, en raison de la généralité qu'elle apporte, mériterait d'être connue, au moins par les bons élèves : elle aurait tiré d'embarras ceux qui, se trouvant en présence de trois droites illimitées, passant respectivement par trois points fixes B, C, F d'un même cercle, et concourant en un point mobile J de ce cercle, n'osent pas affirmer que la configuration de ces trois droites conserve une grandeur invariable quelle que soit la position de J par rapport à B, C, F.

La difficulté de traduire en termes corrects une pensée ou un raisonnement est encore plus frappante. Les élèves semblent concevoir une démonstration comme une succession d'affirmations légitimes, sans qu'il soit nécessaire, ni de justifier ces affirmations, ni de développer les liens qui les enchaînent : les qualités nécessaires d'un triangle T_x viennent d'être établies (elles étaient énoncées dans le texte) ; pour démontrer qu'elles sont suffisantes, on ne les énonce plus, ou, ce qui est plus grave, on n'en fait pas mention au moment où elles interviennent dans le raisonnement ; on parle, par exemple, du plan déterminé par les 4 points A, B, M_a , M_b sans établir pourquoi ces points sont dans un même plan, sans dire que ce fait est conséquence d'une hypothèse, de ce que M_a , M_b sont alignés avec B', point appartenant à la droite AB.

Lorsque ce silence n'est que dans le discours, il est digne de quelque indulgence et pourrait être qualifié de concision. Mais il est parfois aussi dans la pensée, et, s'il n'aboutit pas à des conséquences inexacts ou absurdes, le moindre mal est qu'il prive alors une démonstration de toute valeur : tel croit établir un parallélisme, celui de $B'C'$ et M_bM_c , en partant de la similitude des triangles BMC et M_bMM_c ; mais il ne donne pas la raison de cette similitude, et comme cette raison tient dans le parallélisme de BC et M_bM_c , la démonstration, outre qu'elle est pesante, s'apparente étroitement au cercle vicieux.

La pensée qui ne s'énonce pas, risque de rester confuse, sans précision. Elle est à l'origine de nombreux détours, comme ceux qui ont lourdement

pesé sur la démonstration d'un premier fait, très simple, l'alignement de trois points M_a, M_b, B' , alors que ceux-ci sont les intersections avec un même plan des trois côtés du triangle BAM. Elle conduit à des omissions comme celles qui se sont rencontrées dans la recherche des triangles BCM_a dont le plan et les deux sommets B, C sont donnés et qui sont semblables à un triangle donné T. La construction, presque immédiate, consiste, en thèse générale, soit à mener par B et C deux droites faisant respectivement avec BC des angles égaux à deux angles de T, soit à construire un triangle ayant pour premier côté BC, et dont les deux autres ont des longueurs déterminées, proportionnelles à deux côtés de T, BC étant proportionnel au troisième côté. Les élèves donnent bien l'une de ces constructions ; mais, en dépit de l'invitation du texte, ils ne fouillent pas les diverses manières de l'appliquer ; les uns affirment qu'il y a seulement une, ou deux solutions ; ce sont ceux qui, inconsciemment, considèrent B et C comme les homologues de deux sommets déterminés de T ; les autres, sans faire mieux, en annoncent quatre, correspondant à quatre positions du sommet M_a opposé à BC, positions deux à deux symétriques par rapport au centre et à la médiatrice de BC ; ce sont ceux qui considèrent M_a comme l'homologue d'un sommet déterminé de T. Faute d'analyser leur observation, de préciser leur pensée, les uns et les autres ne constatent pas qu'il y a 6 ou 3 manières de faire correspondre B et C à deux sommets de T, ou M_a à un seul, et que le nombre de solutions est égal à 2×6 ou 4×3 .

Nous arrivons à une dernière observation, le mécanisme qui commande l'activité des élèves dans la discussion d'un problème du second degré. La recherche de certain solide ayant un volume déterminé V se ramenait à la recherche d'une valeur de x satisfaisant simultanément à l'équation et aux inégalités :

$$x^2 + bx + 2b^2 - \frac{3V}{a} = 0, \quad 0 \leq x \leq b$$

a, b étant des longueurs données.

Le problème est d'une espèce à laquelle sont rompus nos élèves de Première. Or, la plupart ne le traitent que par des procédés purement mécaniques. Ils apportent d'abord leur matériel, un matériel pesant et encombrant, consistant dans le calcul préliminaire de diverses expressions et de leurs zéros, discriminant, résultats de substitution, coefficient de x^2 , sans oublier ou en oubliant (l'un ne vaut pas mieux que l'autre) les différences entre la demi-somme et les valeurs limites de x . Aucune conséquence n'est tirée de ces premiers calculs, isolés les uns des autres ; et cependant ces conséquences, que l'on ne peut éviter, qu'il faudra bien donner par la suite, seraient immédiates ; elles s'éclaireraient mutuellement, donneraient des avertissements, signaleraient des erreurs, et, dans la plupart des cas, abrégeraient la recherche. Le but semble être, non pas la discussion d'un problème, mais seulement la construction d'un tableau dans lequel s'inscrivent automatiquement des résultats et conclusions. Les maîtres qui recommandent ce mécanisme répondent à nos objections que c'est par ce seul moyen qu'ils mettent leurs élèves en mesure de résoudre pareils problèmes en toute

sécurité ; ils ne nous expliquent pas toutefois pourquoi il est plus facile de tirer les conséquences d'un calcul, du signe du discriminant, par exemple, lorsque ce calcul est mêlé à plusieurs autres, plutôt que lorsqu'il est isolé. Or, dans l'épreuve de ce concours, avec les meilleurs de nos élèves, le mécanisme n'a pas été particulièrement heureux. Certains en omettent un rouage, et combien nous sommes enclins à les excuser : l'oubli ne serait pas commis si, dans une construction progressive, la reconnaissance du terrain acquis indiquant celui qui reste à découvrir, venait précisément avertir de l'instrument qu'il convient alors de choisir. D'autres, par suite d'une faute légère de calcul, qui se corrigerait spontanément, n'arrivent pas à sortir de leurs contradictions. Enfin, fort souvent, même chez ceux qui aboutissent, les conclusions ne sont pas énoncées : c'est au lecteur à les déchiffrer dans le tableau qu'il a sous les yeux.

Dans ces discussions d'Algèbre, nous voudrions voir l'édifice se construire progressivement, chaque pierre apportée venant immédiatement se mettre à sa place et jouer son rôle. L'ordre de la recherche, la prépondérance à accorder au discriminant, ou au résultat de substitution, ne doit pas être rigide, et dépend des circonstances. Au cours de la recherche, certains éléments peuvent prendre une importance qui n'était pas prévue ; le chercheur doit s'en apercevoir et l'ordre qu'il suivra dans la rédaction de la solution ne sera plus celui qu'il avait adopté, avec logique, pour ses premiers essais. C'était le cas ici, en ce qui concerne le rôle de la somme des racines, qui est toujours négative. De cette remarque, prise pour point de départ, il apparaissait de suite qu'il ne pouvait y avoir deux valeurs positives de x , et qu'il n'y en avait qu'une, que si le produit est négatif ; restait à examiner dans quelles conditions cette racine était inférieure à b . Un tableau de discussion était bien inutile ; deux élèves seulement, dont celui qui s'est classé le premier, ont donné cette simple et élégante réponse.

D'autres de ses camarades en eussent sans doute fait autant s'ils n'avaient été soumis à une discipline étroite et rigide, s'ils avaient été formés en esprits libres et souples. Le mécanisme pourrait se comprendre si tous nos élèves de Première des Lycées et Collèges, de garçons et de jeunes filles, de France et des Colonies, étaient tous appelés à classer 10 ou 20 fois par jour, par rapport à un ou deux nombres donnés, les racines d'une équation du second degré dépendant linéairement d'un paramètre ; le mécanisme n'est pas acceptable s'il s'agit seulement de mettre les élèves en mesure de traiter un problème de Baccalauréat, même si tous doivent être placés en face de ce problème. C'est la valeur et la signification de l'outil que nos élèves ont à connaître, pas davantage ; c'est son usage intelligent et réfléchi qu'ils ont à pratiquer. Nos concurrents d'aujourd'hui l'ont démontré, beaucoup plus par leurs échecs que par leurs trop rares succès.

Ils l'ont démontré également en étant généralement plus heureux dans les deux parties de Géométrie que dans la partie d'Algèbre ; le thème qui ne demandait que l'application de méthodes régulières a eu moins de succès que ceux qui réclamaient davantage à l'observation personnelle et l'initiative. Ce fait est curieux, intéressant ; il est encourageant, il semble indi-

quer une réaction spontanée de la libre intelligence contre l'abus du mécanisme autoritaire.

Des 323 compositions qui ont été soumises au Jury, une première lecture en a retenu 36 qui avaient traité avec plus ou moins de succès tout le problème, la dernière partie exceptée, compositions présentant toutes de sérieuses qualités ; 12 de ces dernières ont été jugées dignes d'une récompense.

En raison de l'honnête uniformité de l'ensemble, les parties qui ont décidé de leur classement ont été principalement la détermination du nombre de triangles BCM_a semblables à un triangle T , la discussion de l'équation du second degré, et la recherche des droites Δ dont les projections forment une figure de grandeur invariable.

Une seule composition, qui se place nettement au-dessus des autres, a traité ces trois points avec succès ; elle est bien présentée ; elle révèle un esprit alerte et clair ; elle ne pêche que par quelques longueurs dans les considérations de Géométrie de position ; elle se chiffre par la note 18.

Deux autres, auxquelles ont été attribués les 2^e et 3^e prix, et les cotes 15,5 et 15 ont faibli sur la première des trois parties discriminatoires ; l'une a montré de la lourdeur, particulièrement dans la discussion du second degré où les conditions successives ne sont pas reliées les unes aux autres ; l'autre a du désordre en Géométrie surtout.

Les neuf compositions suivantes, couronnées par des accessits, se suivent de très près, et leurs notes, qui s'échelonnent de 14 à 12, ne sont séparées que par des intervalles d'un quart de point ; les diverses parties du problème y sont traitées ou au moins abordées ; les solutions sont généralement aperçues, si ce n'est acquises ; la lourdeur, le désordre, les lacunes s'accroissent.

Enfin, le Jury a écarté une composition, qui aurait mérité un dernier accessit, en raison de son désordre et surtout des libertés incessantes et fantaisistes qu'elle se permet en orthographe, de sorte que, en empruntant son vocabulaire, elle ne satisfait pas « au condition » d'un Concours dont l'ensemble a été d'une moyenne, mais non d'une qualité supérieure.

L'Inspecteur Général, Président du Jury,

A. TRESSE.