

3. Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1936

Le sujet proposé en 1936 (1) pourrait être considéré comme une sorte de préparation à l'étude de la *parataxie*. La richesse de ce sujet permettait de prévoir qu'on en aborderait aisément les préliminaires dans un texte simple et suffisamment original. Mais il reste toujours de l'inquiétude aux auteurs d'un problème, jusqu'à l'examen des résultats, même si ce problème est bien conçu (j'ai toute liberté pour le dire), même s'il a été longuement médité et plusieurs fois remanié. Cette inquiétude a aujourd'hui entièrement disparu.

Les candidats ont pu, en étudiant le texte, montrer des qualités variées, puisqu'il était fait appel à leur sens de l'algèbre, de la trigonométrie et de la géométrie.

Nous attachions de l'importance à ce que les classes dans lesquelles des applications sur les *focales d'un cercle* ont été traitées, ne fussent pas favorisées ; il semble bien que les précautions prises à cet égard aient été opérantes. Une seule copie renferme le mot « focales », le mot seulement, prononcé par un candidat d'esprit vigoureux que ses connaissances, fait assez rare, n'égarent pas, et qui reste strictement dans la ligne du problème.

Les notes attribuées aux treize compositions qui ont mérité les trois prix et les dix accessits sont (sur un maximum de 100) les suivantes : 82, 80, 74, 72, 69, 68, 60, 59, 56, 54, 53, 51, 50.

L'année 1936 est bien meilleure que les deux précédentes pour ce qui concerne la tête, notamment les six premières copies, et plus particulièrement les deux premières, lesquelles ont donné au jury une véritable satisfaction que je suis heureux d'avoir à exprimer.

La première partie est, comme la rédaction l'indique nettement, une question d'algèbre.

Le premier alinéa apporte aux candidats l'outil nécessaire pour aborder géométriquement toutes les autres parties du problème, au prix d'un calcul fort simple qui conduit à écrire qu'une fonction homographique reste constante ou qu'un polynôme du premier degré est identiquement nul. Trop souvent, le résultat est deviné plutôt que démontré, parce que ce résultat est annoncé dans le texte ; mais l'inconvénient était, ici, inévitable. Il est

(1) Voir l'énoncé page 5 du *Fascicule Spécial* 1936 B1°.

arrivé qu'au lieu d'employer l'un ou l'autre des deux procédés purement algébriques qui viennent d'être indiqués, on écrive que la dérivée de la fonction homographique est constamment nulle ; c'est moins bien ; mais surtout, ce procédé a été l'occasion d'assez nombreuses fautes.

Nos élèves de la classe de Mathématiques ont grand besoin de réfléchir à la notion d'angle sous lequel se coupent deux courbes, deux surfaces, ou une courbe et une surface. Le jury a lu que « deux droites parallèles font le même angle avec une sphère » et aussi que « si une sphère coupe sous l'angle θ la droite D, et que D fait l'angle α avec la droite Δ , la sphère coupe Δ sous l'angle $\theta + \alpha$ » ; citons encore l'affirmation suivante : « La sphère est tangente au cône puisqu'elle est tangente à une génératrice. » De telles erreurs, qu'on rencontre aussi à la deuxième et à la troisième parties, se retrouvent, plus graves encore, lorsque les deux éléments qui servent à déterminer l'angle sont des droites ou des plans : « Il existe un plan passant par H et faisant avec D l'angle $\pi - \theta$; on le tracera et on cherchera son intersection avec Δ » ; « les plans perpendiculaires aux droites qui font avec D l'angle θ sont parallèles entre eux » ; « l'angle de deux droites est égal à l'angle de deux droites qui leur sont perpendiculaires » ; « un angle quelconque se projette sur un plan parallèle à un de ses côtés suivant un angle égal ».

Le second alinéa de la première partie propose la discussion d'une équation du second degré, en sorte que la première partie tout entière pourrait être un exercice à l'usage des élèves de Première, si les premiers rudiments de la trigonométrie devenaient familiers aux élèves à partir de la Seconde, comme cela serait si utile pour l'étude géométrique des figures et, en particulier, pour l'enseignement de la physique. Il est important de constater que, dans l'état actuel des choses, ce maniement du sinus, du cosinus,

de la tangente d'angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, n'est pas sans gêner encore de

bons élèves de Mathématiques, d'où des erreurs assez nombreuses, ou des gaucheries fréquentes, comme celle qui consiste à garder $1 - \cos^2 \alpha$ jusqu'au bout, dans des calculs qui, dès lors, ne pourront ni se simplifier ni s'interpréter. Il y a eu pour les candidats une autre gêne : La formation de l'équation du second degré nécessitait qu'on sût voir une figure de l'espace, en la représentant dans une position familière, et en utilisant des projections bien choisies. Un tel effort, qu'il serait souhaitable de rendre aisé dès la classe de Première, semble lourd encore en Mathématiques. Aussi, beaucoup d'élèves, pour éviter ces difficultés, ont cherché dans la voie géométrique, soit qu'ils aient, dès la première partie, utilisé le lieu des points I

tels que $\frac{IH}{IA} = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$, soit, ce sont les plus nombreux, qu'ils aient cherché l'intersection de la droite Δ avec le cône de révolution de sommet H et de demi-angle au sommet $\frac{\pi}{2} - \theta$. Bien que l'énoncé spécifiât que l'on cherchait

$\overline{\omega I} = x$, il a été tenu compte aux uns et aux autres des résultats qu'ils ont

pu obtenir géométriquement ; aucun d'eux, d'ailleurs, n'a pu achever une discussion pourtant possible par voie géométrique.

La fin de cette première partie présentait, pour la suite du problème, un intérêt véritable, puisqu'elle permettait de distinguer les trois cas qui résultent de la comparaison de $\theta + \alpha$ avec $\frac{\pi}{2}$.

Signalons enfin qu'il n'y a de condition pour que l'équation en x admette des racines que si $\theta + \alpha > \frac{\pi}{2}$, et qu'alors cette condition peut prendre la forme très simple $h^2 \geq a^2(\operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{cotg}^2 \alpha)$, bien vue par les meilleurs élèves.

La seconde partie met en œuvre géométriquement la propriété démontrée au début de la première, dans des conditions très simples destinées à préparer la troisième. On pouvait craindre que le début n'en fût trop facile. En fait, la recherche des conditions d'indétermination se traduit souvent par un effort réel et parfois par une grande imprécision : « Il faut que la sphère se confonde avec la droite Δ » ; « Il faut que la sphère coupe Δ en une infinité de points » ; « Si, par hasard, la sphère devient un plan passant par Δ ... ». D'autres contournent ce qu'ils croient être un écueil en opérant tout de suite une inversion, ou, au lieu d'introduire un point P du cercle C_1 et d'écrire l'égalité $\frac{IP}{IA} = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$, préfèrent utiliser le centre Q du cercle C_1 et écrire l'égalité

$$\overline{IA}^2 \sin^2 \alpha = (\overline{IQ}^2 + r^2) \cos^2 \theta \quad (r \text{ est le rayon de } C_1),$$

qui conduit à l'emploi de la formule de Stewart, le cas du plan étant, sans doute, considéré comme moins inquiétant dans le second lieu que dans le premier. Ces hésitations se manifestent encore de la manière suivante : P est un point quelconque du cercle C_1 ; A peut être remplacé par un point quelconque du cercle C ; un changement du couple de points ne donne-t-il pas de nouvelles solutions ?

L'étude de la disposition de C et de D a souvent manqué de netteté.

La dernière propriété annoncée dans la deuxième partie est classique. Elle a été indiquée parce qu'elle permet une solution simple de la fin de la quatrième partie. Un assez grand nombre de candidats ont su inverser la figure, le pôle étant A , la puissance d'inversion $\overline{AO} \cdot \overline{AB}$. Signalons qu'un élève a pu démontrer directement que l'angle de C et d'un plan quelconque passant par D reste constant. Félicitons-le, tout en regrettant qu'il n'ait pas économisé sa peine en plaçant la figure dans une position plus simple, suivant les vues que nous avons exposées plus haut. Bien des erreurs au sujet des angles sont, ici encore, à déplorer : « Il est visible qu'il y a deux plans perpendiculaires à un plan donné et coupant un cercle donné sous un angle donné » ; « l'angle d'un plan et d'un cercle est l'angle du cercle avec la trace du plan sur le plan du cercle ».

La troisième partie comprend d'abord l'étude des droites D' qui coupent

sous le même angle toutes les sphères S_1 définies par ces conditions : elles ont leurs centres sur Δ et coupent D sous l'angle θ' .

Les droites D' obtenues sont telles que leur plus courte distance (de longueur a') avec Δ est toujours dans le plan perpendiculaire à Δ mené par ω . En plus, les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha' \cos \theta = \sin \alpha \cos \theta' \\ \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{a'}{\sin \alpha'} \end{array} \right.$$

permettent aisément d'en étudier la disposition. La comparaison du nombre $\frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$ avec 1, c'est-à-dire de $\theta + \alpha$ avec $\frac{\pi}{2}$, joue un très grand rôle.

Lorsque $\theta + \alpha > \frac{\pi}{2}$, θ' peut varier de $\frac{\pi}{2}$ à un minimum θ'_1 donné par la relation $\cos \theta'_1 = \frac{\cos \theta}{\sin \alpha}$, α' pouvant prendre toute valeur, a' variant de 0 à $\frac{a}{\sin \alpha}$. Pour $\theta' = \theta'_1$, $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, $a' = \frac{a}{\sin \alpha}$, les droites D' particulières ainsi obtenues enveloppent le cercle de diamètre AB dont le plan est perpendiculaire à Δ .

Lorsque $\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}$, les droites D' forment l'ensemble des droites focales du cercle C .

Lorsque $\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$, il existe des droites D' particulières tangentes aux sphères S_1 ; ces droites sont telles que $\theta' = 0$, $\sin \alpha' = \frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$, $a' = \frac{a}{\cos \theta}$; on passe de deux d'entre elles, choisies dans un plan parallèle à Δ à une distance de Δ égale à $\frac{a}{\cos \theta}$, à toutes les autres, par rotation autour de Δ . (Cette dernière remarque vaut, dans tous les cas, pour toutes les droites D' qui correspondent à une valeur choisie de θ' ou de α').

Pour $\theta + \alpha < \frac{\pi}{2}$, les droites D' occuperaient tout l'espace, comme dans les deux premiers cas, si la condition de couper effectivement les sphères S_1 ne leur était pas imposée ; mais cette condition existe ; à ce dernier point de vue, il y a intérêt à choisir $\cos \theta'$ pour inconnue lorsqu'on exprime qu'une droite D' passe par un point donné.

Dans cette dernière question, on rencontre à nouveau l'enveloppe des sphères S_1 qui déjà jouait un rôle à la fin de la première partie et aussi, bien entendu, dans l'interprétation de l'existence des droites D' tangentes aux sphères S_1 .

Cette enveloppe se ramène presque immédiatement à l'enveloppe d'un cercle dont le centre I décrit Δ et dont le rayon R est donné par la relation $R = IA \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \theta}$. (Bien entendu, on pose la question sous la forme d'une

enveloppe de cercles). Ce problème est devenu classique ; la courbe cherchée est la conique de foyers A et B et d'excentricité $\frac{\cos \theta}{\sin \alpha}$. Nous avons

beaucoup hésité avant d'explicitier dans l'énoncé la recherche de l'enveloppe des cercles de section des sphères S_1 par un plan fixe passant par Δ , et de faire intervenir une fois encore la propriété des cercles bitangents à une conique qui ont leurs centres sur l'axe non focal. Mais il importe de remarquer : 1° que cette propriété fera de plus en plus partie de l'enseignement puisque l'étude commune de l'ellipse et de l'hyperbole par un foyer et sa directrice la met en évidence davantage encore ; 2° que l'enveloppe des sphères S_1 s'introduit tout naturellement dans le problème comme point de réunion de plusieurs remarques faites en cours de route ; 3° que nous n'avons accordé que peu d'importance numérique à l'enveloppe elle-même, sur laquelle aucune question précise n'est posée ; 4° qu'avec le barème adopté, avant même qu'il n'ait été question de l'enveloppe, et par suite que les coniques ne jouent un rôle, le total des points que pouvait obtenir un candidat s'élevait à 65 sur 100.

Le début de la quatrième partie est facile. La surface Σ a son axe de révolution parallèle à D. Son centre C est sur la perpendiculaire menée de F à D. Le demi axe porté par CF a pour longueur $a \cos \theta$. La méridienne de Σ est d'ailleurs définie immédiatement par le foyer F, la directrice D,

l'excentricité $\frac{1}{\cos \theta}$. Bornons-nous, pour ce qui concerne la suite, à ajouter que les droites G sont des focales du cercle Γ de centre C, passant par F, dont le plan est perpendiculaire à D, et que, par suite, le plan passant par F et par une droite G variable fait un angle constant avec la tangente en F au cercle Γ , en vertu de la propriété par laquelle se termine la seconde partie.

Comme il fallait s'y attendre, les deux dernières parties du problème n'ont été convenablement traitées que par quelques élèves. Ce n'est pas qu'elles soient difficiles ; mais elles contiennent, surtout la troisième, d'assez nombreuses questions qui appellent une analyse attentive et ce don de rapprochement d'idées éparées à quoi l'on reconnaît le très bon esprit en mathématiques et même le très bon esprit tout court.

La quatrième partie n'a été abordée jusqu'à la fin que dans la copie classée la première, ce qui représente sa principale supériorité sur la seconde, dans laquelle on trouve par ailleurs plus de don pour la vue directe et géométrique. En définitive, ce sont deux copies assez voisines et, nous le redisons volontiers, excellentes.

Quelques erreurs ou imprécisions un peu grosses sont à citer au sujet de ces deux dernières parties, parce qu'elles sont le fait de bons élèves :

« L'égalité $\frac{\sin \alpha}{\cos \theta} = \frac{\sin \alpha'}{\cos \theta'}$ entraîne $\frac{\alpha}{\theta} = \frac{\alpha'}{\theta'}$ » ; « la surface lieu de D' affecte une forme hélicoïdale » ; « le lieu des points à égale distance de deux droites de l'espace est le plan perpendiculaire au milieu de la perpendicu-

laire commune » ; « le lieu dans l'espace s'obtient en faisant tourner l'ellipse autour de son foyer » ; cette dernière citation nous conduit à faire remarquer que nous ne saurions exiger des élèves de la classe de Mathématiques qu'ils aient une notion parfaitement nette du degré d'indétermination d'une courbe puisque l'appui analytique leur manque ; mais ce n'est pas trop leur demander que de prouver qu'ils ont senti géométriquement le degré d'indétermination des droites D' , ni attendre trop d'eux que de critiquer les fautes suivantes : « un lieu de cercles inégaux dans des plans parallèles ne peut être qu'une surface de révolution » ; « un lieu de cercles ayant même axe est nécessairement un tronc de cône ».

Les remarques d'ordre général à présenter sur l'ensemble des compositions sont plus favorables que les années précédentes. Il y a plus de soin, un respect plus grand du français et de l'orthographe (bien que l'on rencontre encore « cilindre », « efectuant », « répondand », faisons « subire »,... et que les figures soient généralement mauvaises). L'abus de la géométrie analytique est moins marqué ; et à ce point de vue, on se tient davantage dans les limites qui correspondent à l'esprit du programme de la classe de Mathématiques ; pourtant un candidat sait, comme on sait un résultat familier, que le genre de la conique $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0$ se détermine en examinant le signe de $AC - B^2$. Quelques copies, après la treizième, se tiennent d'assez près ; leurs notes sont 48, 47, 47, 46, de sorte que l'établissement définitif de la liste a nécessité un examen serré ; deux de ces quatre copies ont été éliminées, malgré leur netteté, parce qu'une partie fondamentale s'y trouvait trop faible, la seconde partie pour l'une, la troisième partie pour l'autre ; par contre, les deux copies dont il nous reste à parler ont été écartées en raison de fautes de méthode, d'erreurs de calcul, de rédactions compliquées ou illogiques, et aussi parce qu'elles laissaient à désirer en ce qui concerne l'ordre matériel, l'orthographe,...

Le moment est venu de conclure. Il est vrai que la qualité du concours général de 1936 mérite d'être soulignée, et nos professeurs complimentés des beaux résultats auxquels ils sont parvenus, d'autant plus que leur travail s'effectue dans des conditions difficiles. Chaque nouvelle année révolue nous laisse davantage assurés que nous demandons trop actuellement aux élèves de la classe de Mathématiques, en mathématiques. D'où un manque certain de développement pour de très belles qualités naturelles, des lacunes excessives dans les connaissances, une mauvaise assimilation de notions nouvelles trop nombreuses, et une insuffisance de moyens de réalisation qui sont frappants. D'où aussi une tendance constante à chercher dans la mémoire la solution de questions qui se résolvent aisément par un examen direct, une tendance aussi à se contenter de mots qui n'ont jamais pu remplacer l'effort personnel nécessaire. Je puis aujourd'hui répéter avec plus de force ce que j'ai écrit l'an dernier : Dans le cadre actuel, l'unique remède est de soulager le travail présentement exigé des classes de Mathématiques, au moyen d'additions qui, d'ailleurs, pourraient rester légères, aux programmes de Seconde et de Première.

L'Inspecteur Général, Président du Jury,
Th. LECONTE.