

**7. Rapport sur le Concours, en 1936
de l'Agrégation de l'Enseignement secondaire des jeunes filles
Section des Sciences Mathématiques (1)**

Le nombre des candidates, qui avait doublé en dix ans, a enfin presque cessé de s'accroître de 1935 à 1936. Il y a eu, en 1936, cent onze candidates inscrites (cent sept en 1935) ; cent cinq (cent en 1935) ont pris part à la première épreuve. Quinze d'entre elles ont été déclarées admissibles (douze en 1935). Enfin, par application des instructions données par M. le Ministre, le nombre des Agrégées a pu être augmenté ; il est passé de sept (1935) à dix (1936).

Quatre des nouvelles agrégées ne se sont présentées qu'une fois, une seule deux fois, deux trois fois, une quatre fois, une cinq fois, une six fois.

Les trois anciennes admissibles, déclarées de nouveau admissibles, ont été reçues. Signalons que l'une d'elles avait été classée 61^e à l'écrit en 1935, en vue d'apporter un encouragement aux dix anciennes admissibles qui ne l'ont pas été cette année et dont les rangs par ordre de mérite s'échelonnent du 20^e au 72^e.

L'écrit avait été meilleur en 1935 qu'en 1936. Les indications suivantes le montreront : En 1935, la douzième (et dernière admissible) avait 328 points, la quinzième 324, la vingtième 312, la trentième 279, la quarantième 255. En 1936, la douzième obtient 283 points, la quinzième (et dernière admissible) 280, la vingtième 275, la trentième 261, la quarantième 236.

Par contre, les leçons ont été meilleures cette année puisque la moyenne des notes est passée de 12,8 à 13,5.

(1) Le Jury était composé de MM. LECONTE, Inspecteur général, président ; TRESSE, Inspecteur général ; GARNIER, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; Mlle LEROY, professeur au Lycée Fénélon, et de M. MOUY, professeur au Lycée Jules-Ferry, adjoint pour l'épreuve de morale et de pédagogie.

Les totaux des candidates reçues avaient été plus homogènes ou mieux soudés en 1935 qu'en 1936. Mais si cette remarque est généralement en faveur de l'année précédente, il importe de noter que l'année 1936 nous a apporté, pour les totaux de la première reçue, des chiffres qui n'avaient pas encore été atteints : à l'écrit, 482, c'est-à-dire 16 sur 20 de moyenne ; dans l'ensemble 1.007, c'est-à-dire 16,8 sur 20 de moyenne.

Signalons encore, avant de passer aux remarques relatives aux diverses épreuves du concours, que 32 candidates, après échec en 1935, ne se sont pas présentées en 1936. L'importance de ce chiffre n'échappera pas aux nombreuses jeunes filles qui, préparant la licence de mathématiques, songent à l'Agrégation et les conduira à bien s'assurer que leurs moyens sont suffisants ainsi que leur vocation.

Epreuves écrites (1).

Arithmétique, Algèbre et Géométrie (Mlle LEROY). — Le problème de géométrie proposait l'étude de quelques propriétés de la figure obtenue en faisant pivoter un trièdre trirectangle autour de son sommet S, ses arêtes rencontrant une sphère fixe, généralisation des propriétés bien connues de la figure plane correspondante. Cette étude pouvait être conduite en se plaçant à des points de vue très différents. Aussi les copies présentent-elles des solutions très variées et souvent intéressantes des questions proposées.

On pouvait par exemple utiliser principalement la relation vectorielle : $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} = 3\vec{SG}$, G étant le point de concours des médianes du triangle ABC. Appliquée au cas particulier où le trièdre SABC est trirectangle, cette propriété démontrait immédiatement la question II, puisque la résultante des vecteurs $\vec{SA}$, $\vec{SB}$, $\vec{SC}$ est alors le vecteur $\vec{SR}$ ayant pour extrémité R le point diamétralement opposé à S sur la sphère circonscrite au tétraèdre SABC.

Quelques candidates ont appliqué les propriétés des tétraèdres orthocentriques. Mais le cas où un tétraèdre est orthocentrique parce qu'un de ses trièdres est trirectangle est tellement particulier qu'une étude directe est préférable.

La façon dont le texte était présenté invitait les candidates à faire largement usage de l'inversion. Quelques-unes l'ont très bien vu. Pour les deux premières questions en particulier on a donné dans plusieurs copies des solutions élégantes et homogènes basées sur l'inversion, ce qui a été d'autant plus apprécié que dans beaucoup d'autres les solutions étaient lourdes ou manquaient d'unité.

Dans la question II on se place dans le cas particulier où le trièdre trirectangle SABC a son sommet fixe S sur la sphère (ω), que les arêtes rencontrent aux points variables A, B, C. On démontre alors que le point de rencontre G des médianes du triangle ABC est fixe et tel que $\vec{SG} = \frac{2}{3}\vec{S\omega}$,

(1) Voir les énoncés pages 8, 9 et 10 du *Fascicule Spécial* 1936 A.

cette propriété entraînant la réciproque. La dernière partie de la question II était destinée à mieux mettre en évidence ce qu'a de remarquable le fait qu'il *suffit* que le triangle ABC ait pour point de rencontre des médianes le point G qui vient d'être défini pour que le trièdre SABC soit trirectangle ; dans ce but, était donné un exemple d'une propriété dont la réciproque n'est pas exacte : Lorsque la droite BC passe par un point fixe K, le point A décrit le cercle intersection de la sphère (ω) et du plan perpendiculaire en S à la droite SK. Mais il est aisé de voir que si réciproquement le point A décrit ce cercle, la droite BC ne passe pas par un point fixe. Trop de candidates se sont laissées entraîner à répéter sans réfléchir la formule facile et dangereuse... « un raisonnement inverse du précédent montrerait que si A décrit ce lieu, BC passe par un point fixe. »

Lorsque les points ABC sont astreints à se déplacer sur un cercle de la sphère (ω) dont le plan passe par G, on peut construire une infinité de triangles ABC ayant G pour point de rencontre de leurs médianes. Il existe donc une infinité de trièdres SABC trirectangles dont les 3 arêtes sont des génératrices du cône défini par le point S et le cercle donné (cône équilatère). Lorsque les arêtes du trièdre engendrent le cône, ses faces enveloppent le cône supplémentaire dont il est facile de déterminer la section par le plan du cercle.

Inversement, un cercle (O) (de centre O et de rayon r) étant donné, comment faut-il choisir S pour que le cône défini par S et (O) soit équilatère ? (question III).

On démontre que la relation $\overline{OH}^2 + 2\overline{HS}^2 = r^2$ est nécessaire et suffisante pour que le point S réponde à la question. Le lieu de S est donc l'ellipsoïde de révolution aplati, déduit de la sphère de centre O et de

rayon r en multipliant par $\frac{\sqrt{2}}{2}$ les cotes de chaque point rapportées au plan du cercle donné. Le point S se projette nécessairement à l'intérieur du cercle (O) et le triangle ABC a tous ses angles aigus puisque la projection de S est l'orthocentre H de ce triangle.

Si on se donne le point H, il existe une infinité de triangles ABC inscrits dans le cercle (O) ayant H pour orthocentre. Il était très facile d'achever la construction du triangle connaissant l'angle $\hat{A}$. Dans la plupart des copies, on utilise soit le cercle des 9 points du triangle, soit le fait que AH est double de la distance du centre du cercle circonscrit au côté BC. Signalons toutefois, pour engager les candidates à réfléchir à ce qu'est une *construction géométrique*, la malencontreuse idée de quelques-unes qui prennent l'intersection du cercle des 9 points avec la podaire du cercle enveloppe de BC !

Une question de trigonométrie avait été introduite sur ce même sujet : la résolution trigonométrique du triangle ABC dans les conditions déjà indiquées pour sa construction géométrique. Aucune candidate ne l'a traitée de façon satisfaisante et il semble qu'un réel effort soit nécessaire pour arriver à mieux conduire une résolution trigonométrique et aussi une dis-

cussion algébrique. Dans quelques copies seulement on est parvenu à une équation donnant $B - C$ ou $\frac{B - C}{2}$, soit en utilisant le fait que $a^2 + b^2 + c^2$ est constant et peut se calculer facilement, soit, plus simplement, en remarquant que l'angle $\widehat{HAO}$ est égal à $\widehat{B} - \widehat{C}$. Mais personne ne se soucie de trouver les conditions nécessaires et *suffisantes* pour que les solutions des équations indiquées pour la résolution correspondent à un triangle cherché. On ne se soucie pas davantage de chercher à rendre les formules calculables par logarithmes. Il faut encore signaler de grosses maladresses, des calculs qui ne peuvent mener à rien, par exemple si l'on prétend calculer les éléments inconnus sans se servir de H . Dans plusieurs copies on oublie que la relation $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ n'est pas indépendante du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ A + B + C = 200^\circ \end{array} \right.$$

et on espère trouver une équation donnant $B - C$ en utilisant les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A \\ A + B + C = 200^\circ \end{array} \right.$$

avec des fautes de calcul masquant le fait qu'on devrait nécessairement arriver à une identité.

Dans la question IV, on revient au cas général où le sommet S du trièdre trirectangle $SABC$ n'est pas situé sur la sphère (ω) ($\omega S = d$).

Le lieu de l'orthocentre H du triangle ABC a été dans bon nombre de copies assez nettement déterminé comme lieu des points tels que $2\overline{HS}^2 + \overline{H\omega}^2 = \varphi^2$. Mais là encore on n'a aucun souci vrai des réciproques et on ne s'inquiète pas de savoir si cette condition nécessaire est suffisante. Trop souvent on ne cherche pas la condition pour que le lieu existe ($3\varphi^2 > 2d^2$) et on ne précise pas ses éléments. Signalons une façon intéressante de présenter ce lieu en le considérant comme lieu des points tels que le rapport de leurs puissances par rapport à la sphère ω et à la sphère-point S soit égal à -2 . Cette solution a l'avantage de mettre en évidence que la sphère (Σ) lieu de H fait partie d'un faisceau linéaire de sphères, dont S est l'un des points de Poncelet.

Quand on a bien précisé la position du centre Σ de la sphère lieu de H , on voit immédiatement que $\Sigma H = \Sigma G$; donc le point de concours G des médianes du triangle ABC appartient à cette sphère. Ceci peut également se voir de façon intéressante en utilisant l'inversion et les propriétés des faisceaux de sphères. La réciproque montre qu'en général, à tout point G de la sphère (Σ), correspond un point H . Mais dans le cas particulier où le point S est sur la sphère (ω), il est également sur la sphère lieu de H ; par suite seul le point qui lui est diamétralement opposé sur (Σ) convient comme point G et il lui correspond une infinité de points H , à savoir tous les points de la sphère (Σ). L'étude de la réciproque permettrait donc

d'expliquer la contradiction apparente que présentent les résultats des questions II et IV concernant le point G.

Bon nombre de candidates ont bien vu que si on désigne par $A'B'C'$ les points où les prolongements des arêtes du trièdre $SABC$ coupent la sphère (ω) , le lieu de la droite d'intersection des plans ABC et $A'B'C'$ est le plan polaire de S par rapport à (ω) . On retrouve d'ailleurs ici que le point S ayant même plan polaire par rapport à la sphère (ω) et à la sphère (Σ) , ce point est un des points de Poncelet de ces 2 sphères. On a bien vu aussi que les points de concours des médianes des 8 triangles analogues à ABC obtenus suivant qu'on choisit A ou A' , B ou B' , C ou C' , sont les sommets d'un parallélépipède rectangle. Assez peu de copies indiquent que le point fixe appartenant à toutes les droites HH' n'est autre que le conjugué harmonique de Σ par rapport à S et au 2^e point de Poncelet du faisceau (ω) (Σ) .

Très peu de candidates ont abordé la dernière partie de la question IV. Une seule l'a traitée de façon complète et satisfaisante malgré une petite erreur dans la discussion. On aurait pu s'aider pour cette étude du fait que le plan ABC enveloppe la quadrique de révolution ayant pour foyer S et pour sphère principale (Σ) .

On pouvait évidemment poursuivre l'étude de la figure. Mais il ne pouvait être question de proposer un texte trop long. Nous avons même renoncé à une dernière question tout d'abord prévue : « enveloppe de Δ , lorsque les 2 plans ABC menés par Δ étant toujours rectangulaires, Δ est assujettie en outre à rester dans un plan fixe P ».

Sur les 105 candidates qui ont participé à l'épreuve de géométrie 23 atteignent la moyenne, 38 sont notées de 10 à 5 sur 20, 45 de 5 à 0. La proportion des mauvaises copies est donc trop considérable. On ne peut que s'étonner une fois de plus d'ignorances et de fautes de raisonnement aussi fréquentes. Par contre, il y a d'assez nombreuses compositions satisfaisantes et en particulier trois copies vraiment bonnes. La 1^{re}, notée 17,5, contient une vue presque complète du problème ; la partie trigonométrique a été négligée et les premières questions auraient pu être traitées de façon plus intéressante ; mais l'ensemble du devoir, et surtout la dernière question, dénotent une puissance de vue, une rigueur et une clarté d'esprit tout à fait remarquables. La suivante a 15,5 ; le devoir est moins complet, mais les solutions ont à la fois beaucoup d'élégance et de rigueur. Dans la 3^e copie, notée 15, on trouve un effort louable pour concentrer tout le problème autour de deux conditions nécessaires et suffisantes mises en relief au début, pour que le trièdre $SABC$ soit trirectangle : le point S se projette sur un plan quelconque à l'orthocentre du triangle de section ABC et la puissance de S par rapport à la sphère $SABC$ est égale à $-2SH^2$.

Les idées intéressantes ne manquent pas dans les copies suivantes notées 14, 14, 13 13, 12,5, 12,5 ; 12, 12, dans les douze copies qui, venant après, ont encore la moyenne, ou même dans les dix-huit copies dont les notes, de 8 à 10, approchent de la moyenne.

Algèbre, Trigonométrie et Analyse (M. GARNIER). — La composition portait sur l'étude de la courbe (C) du quatrième degré, circulaire, à point triple, connue sous le nom de trèfle de G. de Longchamp.

La première partie avait pour objet la construction de la courbe, d'après son équation polaire

$$\rho = 2 \cos \omega \cos 2 \omega,$$

Cette étude ne comportait aucune difficulté théorique ; accessible à toutes les candidates, elle devait leur permettre de manifester des qualités pédagogiques. Or, à ce point de vue, les résultats ne sont pas toujours parfaits. Dans la détermination des points à tangente horizontale, beaucoup de candidates écrivent l'équation $\operatorname{tg} V = \operatorname{tg} \omega$, à moins que ce ne soit $\operatorname{tg} V = \pm \operatorname{tg} \omega$; les points à tangente verticale sont déterminés plus d'une fois par $\operatorname{tg} V = -\cot \omega$ ou $\operatorname{tg} V = \pm \cot \omega$. Parmi les candidates qui ont procédé correctement, il en est peu qui aient trouvé les angles polaires, soient ω_1 , des points à tangente horizontale. Les unes arrivent à

$$\operatorname{tg}^2 \omega_1 = 3 \pm 2\sqrt{2},$$

sans remarquer que le second membre est le carré de $\sqrt{2} \pm 1$; d'autres obtiennent cette dernière expression, ou celle des cosinus correspondants,

sans reconnaître les valeurs $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \dots$ de ω_1 — et, pourtant, quelques-unes

ont eu recours aux tables de logarithmes. Bien peu ont songé à étudier

l'extremum de $y = \rho \sin \omega = \frac{1}{2} \sin 4\omega$; et, en général, celles qui en ont

eu l'idée ne l'ont pas exploitée jusqu'au bout : une seule candidate a remarqué que les tangentes horizontales étaient aussi des bitangentes ; c'était pourtant un trait caractéristique de la physionomie de la courbe. Le calcul des valeurs de x, y, ρ correspondant aux points remarquables a été entièrement laissé de côté : le classement des valeurs correspondantes de ω est souvent trop sommaire. Après toutes ces remarques, on ne s'étonnera donc pas que la représentation graphique de la courbe, très négligée dans beaucoup de copies, ne laisse que trop rarement une impression entièrement satisfaisante.

J'ai fait allusion tout à l'heure à la faiblesse des compositions dans le domaine de la trigonométrie. A ce point de vue, voici plus grave encore. Un trop grand nombre de candidates n'utilisent pas assez les formules fondamentales, ou même, semblent ignorer qu'on peut remplacer des produits tels que $\cos p \cos q, \sin p \cos q, \dots$ par des sommes algébriques de cosinus ou de sinus. Et pourtant ces transformations jouaient dans les trois parties du problème un rôle essentiel ; les négliger conduisait à des calculs longs ou impraticables. Par exemple, il s'est trouvé des candidates qui, dans le calcul des aires, n'ont pas craint d'employer $\operatorname{tg} \omega$ comme variable auxiliaire pour intégrer $\cos^2 \omega \cos^2 2\omega$. Les formules précitées leur auraient montré encore, et sans grands calculs, que

$$x'y'' - y'x'' = \rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho'' = 4(4 + 3 \cos 2\omega - \cos 6\omega),$$

quantité manifestement positive, quel que soit ω .

La seconde partie débutait par l'établissement de la relation

$$(1) \quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

entre les angles polaires des trois points d'intersection mobiles M_1, M_2, M_3 , de la courbe (C) par un cercle (Γ) passant par O. Cette relation a été obtenue dans presque toutes les copies ; mais beaucoup n'ont pas su l'utiliser. Quelques candidates, oubliant que (Γ) passait par O, ont exprimé les propriétés caractéristiques du triangle $M_1M_2M_3$ par des relations entre les longueurs des côtés. Le cas du triangle rectangle a été le plus favorisé ; le lieu du centre de (Γ) a été obtenu fréquemment ; l'enveloppe (cardioïde) a été trouvée soit analytiquement, soit géométriquement, la cardioïde étant introduite comme l'homothétique d'une podaire de circonférence par rapport à l'un de ses points. Parmi les candidates, assez nombreuses, qui ont trouvé l'équation différentielle des cercles (Γ) correspondants, un très petit nombre l'ont intégrée correctement. Posant

$$\varphi + \cos \omega = u,$$

on transformait l'équation différentielle en

$$u'^2 + u^2 = 1 ;$$

or, cette équation admettait non seulement l'intégrale générale

$$u = \cos(\omega - \omega_0),$$

avec la constante arbitraire ω_0 , mais aussi les solutions singulières $u = \pm 1$ qui définissaient une autre courbe, la cardioïde enveloppe. Une candidate a intégré élégamment, par différentiation de l'équation.

Les triangles $M_1M_2M_3$ équilatéraux ou isocèles n'ont bénéficié que d'un succès moindre. Pourtant, en vertu de (1) il était immédiat que les angles ω_i coïncidaient dans leur ensemble, et à des multiples près de π , avec les valeurs $\pm \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ce résultat devait faciliter l'étude des triangles isocèles

qui se caractérisaient par une relation telle que $2\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + k\pi$; cette relation jointe à (1) montrait que ω_1 avait nécessairement l'une des trois valeurs précédentes. Parmi les copies qui ont obtenu ce résultat, aucune n'a remarqué explicitement que le sommet M_1 était situé sur l'axe de symétrie du triangle.

La courbe (E) de la troisième partie était l'enveloppe de la droite

$$(2) \quad x \cos \omega + y \sin \omega = \cos 3\omega,$$

c'est-à-dire une hypocycloïde à trois rebroussements, comme il était possible de le déduire géométriquement de la définition de la courbe (C) donnée au début de l'énoncé. Quelques candidates ont reconnu l'hypocycloïde, mais n'ont pas toujours apporté de preuves suffisantes. Le lieu (L) (trèfle oblique) était la podaire de (E) par rapport à un point P du cercle tritangent et avait pour équation polaire

$$\varphi = \cos 3\omega + \cos(\omega - \alpha),$$

le pôle étant en P. Géométriquement, il était aisé de voir que P, point triple évident de (L), était son seul point multiple : car (E) n'a aucune tangente multiple à distance finie. La détermination des tangentes en P était immé-

diates ; deux étaient rectangulaires, ce qui vérifie une propriété connue des droites de Simson d'un triangle, issues d'un point du cercle des neuf points de ce triangle.

A priori l'enveloppe des courbes (L) comprenait nécessairement (E).

La condition $\frac{D(X, Y)}{D(\omega, z)} = 0$ se décomposait, en effet, en deux :

$$3 \sin 3\omega + \sin(\omega - z) = 0 \quad \text{et} \quad \cos(\omega - z) = 0,$$

et la première définissait (E). La seconde, négligée par les candidates qui ont fait le calcul, définissait une seconde composante, soit (D), de l'enveloppe. Au sujet de la courbe (D) dont l'étude n'était d'ailleurs pas demandée, je signalerai les propriétés suivantes dont la vérification pourra intéresser de futures candidates.

Tout d'abord, on remarquera que les courbes (L) ont entre elles un contact d'ordre 2 en chacun des points cycliques ; deux courbes infiniment voisines s'y coupent donc en 6 points ; elles se coupent en 6 points voisins du point triple de l'une de ces courbes et en trois points de (E) : il reste donc $16 - 6 - 6 - 3 = 1$ point caractéristique mobile ; c'est celui qui décrit (D). Cette courbe, représentée paramétriquement par

$$2x_1 = \cos 4z - \cos 2z - 2 \cos z,$$

$$2y_1 = \sin 4z + \sin 2z - 2 \sin z,$$

admet O_1 pour centre de répétition d'ordre 3. On fera varier z de 0 à $\frac{\pi}{3}$;

on étudiera le cas où z est infiniment petit ; on résoudra graphiquement les équations $x_1 = 0, x'_1 = 0, y_1 = 0, y'_1 = 0, z_1 = 0$, en prenant, suivant le cas, $\sin z$ ou $\cos z$ pour inconnue auxiliaire, et l'on classera les racines. En posant $\lambda = 2 \cos 3z$ on trouvera que l'équation aux points d'inflexion est

$$4\lambda^2 - 9\lambda + 22 = 0.$$

Cette équation n'admet pas de racine réelle. Ces résultats permettront de construire la courbe. On pourrait reprendre les mêmes questions avec les coordonnées symétriques $x_1 \pm iy_1$.

Ajoutons, pour terminer, que 105 candidates ont participé à la composition ; la note 7,5 (sur 20) obtenue ou dépassée dans 52 copies n'a pu être atteinte par les 53 restantes. La moyenne des notes est 7,8 ; elle n'a été dépassée que dans 46 copies. 28 candidates ont obtenu une note au moins égale à 10 et 6 d'entre elles, dont 5 admissibles, une note au moins égale à 12,5.

Géométrie, Géométrie Analytique et Mécanique (M. TRESSE). — La composition a été traitée par 102 candidates, sur 111 inscrites. La moyenne a été atteinte par 4 d'entre elles seulement, avec les notes 14, 13,5 et deux 11,5. Leur succèdent ensuite deux groupements, l'un de 10, l'autre de 13 copies, les premières cotées de 9 à 8, les secondes de 7,5 à 6,25. Le gros contingent comprend 53 concurrentes, soit plus de la moitié de l'effectif, avec des notes variant de 5,75 à 2,5 et une moyenne générale de 4. Enfin, à l'extrémité de l'échelle, 24 copies, d'une faiblesse excessive, sont encore inférieures aux précédentes.

Exception faite pour les 14 premières, chez qui se sont révélées des qualités d'intelligence et de jugement, et parmi lesquelles se recruteront sans doute les Agrégées de ce concours, la composition est donc de qualité inférieure, voire même médiocre.

Son thème essentiel, consistant dans la détermination et l'étude des asymptotiques, puis des lignes de courbure de la surface réglée engendrée par le support de l'accélération d'un mobile animé d'un mouvement connu, était bien cependant dans les moyens des candidates. Toutes ont manifesté qu'elles possédaient, nous ne disons pas qu'elles comprenaient, les connaissances nécessaires ; toutes, sauf peut-être les 24 dernières, se sont montrées aptes à établir ou tout au moins à suivre le développement de la question, circonstance qui nous dispensera d'entrer dans les détails de la solution ; mais, en thèse générale, leurs connaissances ne vont pas au-delà des formules et ne s'étendent pas assez à l'intelligence des faits ; leur science est plus superficielle que profonde. Invitées à parler de lignes asymptotiques ou de lignes de courbure, la majorité des concurrentes donnent une formule et l'appliquent ; elles ne s'inspirent pas des circonstances pour faire un choix entre diverses formules, elles adoptent aveuglément la première, la seule peut-être qui se présente à leur esprit ; trop rares sont celles qui invoquent une simple définition géométrique et vont ainsi à la solution la plus directe, la plus simple et la plus expressive.

Dans la seconde partie du problème, intervient un mobile se déplaçant dans un plan d'un mouvement uniforme ; le texte demande de faire intervenir le rayon de courbure r de la trajectoire et l'angle α formé par la vitesse et l'axe Ox . L'essentiel était avant tout de traduire l'uniformité du mouvement, et l'appel à l'angle α , à l'intensité v de la vitesse, était fait pour avertir que la traduction la plus simple se trouvait dans les composantes rectangulaires, $v \cos \alpha$ et $v \sin \alpha$, de la vitesse, les composantes de l'accélération, qui interviennent dans la recherche, se formant alors par dérivation, et mettant en jeu le rayon de courbure $r = \frac{ds}{dx}$ par

l'intermédiaire de la dérivée $\frac{dx}{dt} = \frac{v}{r}$. Au lieu de suivre cette voie, de traduire d'abord les hypothèses, les maladroites, entendant parler d'accélération, de courbure, de mouvement uniforme, y répondent sans réflexion

par des formules, $v = \frac{v^2}{r}$, $r = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - y'x''}$, $r = \frac{(\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}'^2)^{\frac{3}{2}}}{\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\varphi}\dot{\varphi}' - \dot{\varphi}\ddot{\varphi}}$, puis,

des combinaisons de calcul, souvent habiles et ingénieuses, les amènent par de longs détours au résultat demandé. Les données du problème ont-elles été ainsi fidèlement traduites ; exprime-t-on bien que le mouvement est uniforme et de vitesse v en écrivant $\sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{v^2}{r}$; autant de préoccupations dont l'acquisition du résultat dispense totalement.

Les formules sont connues ; mais les faits significatifs sont ignorés,

Les méthodes d'intégration des équations différentielles classiques sont régulièrement appliquées ; mais les relations existant entre les intégrales de chacune ne sont pas utilisées. Les asymptotiques d'une surface réglée sont intégrales d'une équation de Riccati et, comme telles, tracent sur les génératrices rectilignes des divisions homographiques ; les connaissances des candidates comprennent le premier point, mais ne s'étendent pas au second ; trop peu d'entre elles ont su remarquer que, dans les hypothèses du problème, on connaît l'une des asymptotiques, la trajectoire du point en mouvement M ; une seule a vu en outre que, lorsque l'accélération de M est parallèle à un plan fixe, la droite de l'infini de ce plan constitue une seconde asymptotique de sorte que, dans ce cas, $\frac{MP_1}{MP_2}$ reste constant, P_1 et P_2 étant deux points, placés sur le support de l'accélération de M, et décrivant deux asymptotiques quelconques. Cette qualité comporte sa réciproque, qu'il fallait établir ; mais la recherche en a été rarement entreprise, la signification de cette réciproque n'étant généralement pas comprise.

Nous rencontrons ici l'un des trois points capitaux qui ont donné aux concurrentes l'occasion de se différencier les unes des autres et aux meilleures de se distinguer. La condition pour qu'il existe deux asymptotiques répondant à la relation $\frac{MP_1}{MP_2} = \text{const.}$ s'exprime analytiquement en

annulant un déterminant du 3^e ordre, ou, pour les adeptes du calcul vectoriel, un produit mixte de trois vecteurs ; en langage géométrique, cette condition signifie que le vecteur accélération et ses deux premières dérivées géométriques restent parallèles à un même plan, et c'est à ces termes que se sont arrêtées les quelques concurrentes ayant traité cette question. Il fallait aller plus loin, et conclure en montrant que l'accélération reste parallèle à un plan fixe ; une seule candidate en a eu l'intuition ; il suffisait, pour aboutir à cette conclusion, de reconnaître ou d'appliquer une condition classique exprimant que trois fonctions d'une même variable sont linéairement dépendantes. Notons, à ce propos, que le calcul des déterminants est peu pratiqué, qu'un déterminant n'est employé, le plus souvent, que pour lui substituer immédiatement son développement ; il y a peut-être là une réaction excessive contre l'abus des déterminants dans la résolution pratique des équations linéaires. Cette observation s'applique également au calcul vectoriel, dans lequel les candidates ne voient guère qu'une simple notation, sans aller jusqu'à l'application des propriétés de ce calcul.

Le second des trois points ayant établi des différences sensibles a été la recherche d'une surface algébrique contenant une asymptotique quelconque de certaine surface particulière, cette courbe étant déterminée et représentée par les expressions des trois coordonnées rectangulaires de l'un de ses points en fonction d'un angle ω . La méthode consistait dans l'élimination des transcendentes figurant dans ces expressions, soit donc

de l'exponentielle e^{ω} d'une part, et des fonctions circulaires de ω d'autre part ; elle était immédiate en ce qui concerne e^{ω} qui était fonction linéaire de la cote z ; pour les secondes, elle est apparue le plus souvent comme la conséquence d'une heureuse inspiration consistant à former $x^2 + y^2$ sans donner d'autre raison à cette opération que son succès ; la justification pouvait cependant se trouver dans cette circonstance que x et y étaient fonctions linéaires de $\sin \omega$ et $\cos \omega$ se déduisant l'une de l'autre par la transformation de ω en $\omega + \frac{\pi}{2}$ et pouvaient donc se mettre sous la

$$\text{forme } x = A \sin(\omega - \alpha), \quad y = A \sin\left(\omega + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = A \cos(\omega - \alpha).$$

Le troisième et dernier point capital, qui n'a été traité complètement par personne, concerne l'étude des lignes de courbure de certaine surface particulière rencontrée au cours du problème. Les deux familles de lignes de courbure répondent ici à deux valeurs d'une dérivée $\frac{d\rho}{dt}$, données en fonction de la variable t et de la fonction ρ par une équation du second degré, et valeurs restant constamment l'une positive, l'autre négative. La candidate classée la première est la seule qui soit arrivée jusqu'à cette observation et à conclure que chaque ligne de courbure est représentée par une fonction ρ , constamment croissante ou décroissante (selon qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des deux familles) de la variable t . Le texte demandait d'aller plus loin et d'étudier les valeurs asymptotiques de ρ pour t tendant vers zéro ou l'infini en montrant que, dans chaque cas, il existe une constante m telle que ρt^m tende vers une limite finie non nulle. Le moyen consistait à effectuer d'abord la substitution $\rho = \sigma t$ qui convient avec une équation homogène, à substituer ensuite à la valeur de $t \frac{d\sigma}{dt}$ en fonction de σ sa valeur principale, de la forme $\sigma\sigma$, au voisinage de $\sigma = \pm \infty$, l'approximation se justifiant en tenant compte de la forme des quadratures qui pourraient s'effectuer complètement à l'aide seulement des fonctions élémentaires.

Nous excusons les candidates, y compris les meilleures, de n'avoir pu, dans un temps limité, développer ces dernières considérations.

Nous les excusons d'autant plus qu'une difficulté supplémentaire leur avait été imposée, bien involontairement. Le texte, en effet, désignait par la même lettre ρ , dans deux alinéas distincts, deux éléments distincts ; accident dû à un excès de précautions établies en vue d'uniformiser les notations imposées dans les deux compositions d'Analyse et de Mécanique. Heureusement, les éléments distincts, désignés tous deux par ρ , n'avaient pas à intervenir simultanément, de sorte que, sans même apporter aux notations la correction nécessaire, aucune confusion n'était possible. Les concurrentes l'ont compris ; quelques-unes, néanmoins, en ont été gênées, au début de la seconde partie, où on leur demandait d'établir une relation entre ρ et r , ou plutôt d'appliquer à un cas particulier une

relation obtenue dans le paragraphe précédent ; à celles-là, le bénéfice de la solution a été accordé du seul fait qu'elles annonçaient cette transformation et qu'elles en apportaient les éléments.

Pour conclure, nous ne saurions trop recommander aux candidates, et particulièrement à de futurs Professeurs, de ne pas limiter leurs horizons, en Mathématiques, à la seule technique ; celle-ci ne peut être écartée totalement, mais, avant tout, le jugement doit l'inspirer, la guider, la simplifier.

Morale et Education (M. MOUY). — Le sujet choisi était le suivant :

Claude Bernard écrit : « *Je pense que la croyance aveugle dans le fait qui prétend faire taire la raison, est... dangereuse pour les sciences expérimentales... Dans la méthode expérimentale comme partout, le seul critérium réel est la raison.* »

Que pensez-vous de cette opinion ? Pouvez-vous expliquer comment elle s'applique à la méthode expérimentale ? A-t-elle encore, comme le suggère Claude Bernard, une valeur dans d'autres domaines ?

Le texte était emprunté à l'*Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, 1^{re} partie, ch. II, § VII. En écrivant ces lignes, Cl. BERNARD a pensé évidemment surtout à la médecine. Il a visé surtout ses adversaires les vitalistes, qui pensent, comme le chirurgien GERDY, que « toutes les fois que la vie intervient dans les phénomènes, on a beau être dans des conditions identiques, les résultats peuvent être différents » (*ibid.*, III^e partie, p. 293). L'opinion de GERDY est conforme aux apparences, et si l'on a dans le fait une croyance « aveugle », on sera vitaliste en médecine. Mais alors, il n'y aura jamais de « médecine expérimentale », la médecine ne sera jamais une science. Pour que la science existe, il faut « croire » en elle, il faut croire « au déterminisme, au rapport absolu et nécessaire des choses » (I^{re} partie, p. 58). Mais dans ces conditions, il pourra arriver qu'on refuse de croire à un fait : « Si un phénomène se présentait dans une expérience avec une apparence tellement contradictoire qu'il ne se rattachât point d'une manière nécessaire à des conditions d'existence déterminées, la raison devrait repousser le fait comme un fait non scientifique » (I^{re} partie, p. 87). Nous trouvons, dans les travaux scientifiques de l'auteur tels qu'il nous les rapporte, trois ou quatre exemples illustrant cette règle (III^e partie, pp. 276-287). On y voit tantôt un effet produit indifféremment par sa cause ou par une autre circonstance très différente ; tantôt la même cause engendrant indifféremment un effet ou demeurant stérile, toutes choses égales d'ailleurs. La raison nous ordonne alors de trouver dans les antécédents qui paraissent différents, un élément semblable, ou dans les circonstances qui paraissent semblables, un élément différent.

On ne demandait évidemment pas aux candidates de commenter le texte proposé avec d'autres textes du même auteur. Mais on a pensé qu'elles pouvaient fort bien découvrir, soit dans les ouvrages qui leur étaient indiqués, soit dans leur expérience des sciences expérimentales, de quoi illustrer l'idée de Cl. BERNARD.

Ces exemples ont été, d'ailleurs trouvés aisément. Ceux qui ont eu le plus de succès sont : le problème de cristallographie posé par MITSCHERLICH et résolu par PASTEUR ; la découverte de Neptune par LE VERRIER. Et, au sujet de ce dernier exemple, il importe de répéter que c'est bien Neptune qui a été découvert par LE VERRIER, et non Uranus ou Pluton, comme l'ont prétendu diverses candidates. Il importe aussi de ne pas laisser s'accréditer cette idée que LE VERRIER s'est refusé à une vérification expérimentale qu'il aurait estimée inutile : il n'a pas pu la faire lui-même, voilà tout.

Nous avons trouvé aussi beaucoup d'autres exemples excellents empruntés à l'histoire de l'optique, à celle de la théorie atomique (mouvement brownien, etc.), aux premières découvertes sur la radioactivité, etc...

La vraie difficulté était de définir le mot *raison*. Traduire par *raisonnement* était évidemment insuffisant : il est facile de montrer que la méthode expérimentale est un raisonnement, mais ce n'est pas tout le sujet, car Cl. BERNARD appelle la raison un critérium (ou un *critère*, et non pas *criter*, comme l'a écrit itérativement une candidate). Or, le raisonnement est un instrument du jugement. On a souvent résolu la question en disant que la raison, c'est l'esprit critique ; ce n'est pas faux, et, à la rigueur cela peut suffire, mais on pourrait exiger l'explication de l'expression *esprit critique*. Ce que Cl. BERNARD appelle ici *raison*, selon nous, c'est l'aptitude à saisir ou même à établir des relations entre les faits, les expériences, les sensations, etc. Une candidate (physicienne) a très bien montré ce travail d'intégration opéré par la raison : elle a pris un unique exemple, celui de la réfraction de la lumière, et a montré sur cet exemple comment la raison a, si l'on peut dire, absorbé et digéré successivement les faits que l'expérience apportait. Une mathématicienne a procédé de la même façon sur un autre exemple, celui de la cryoscopie. Une physicienne, poussant l'idée plus loin et plus haut, a conclu, du primat de la raison, à une « philosophie de la conscience » qui, sans être parfaite dans tous ses détails, est intelligemment exposée. Enfin une autre physicienne a montré que le prétendu conflit entre le fait et la raison ne pouvait être qu'un conflit de l'intelligence avec elle-même, le fait scientifique étant toujours interprété, donc rationalisé.

Claude BERNARD invite lui-même à généraliser son idée. On a généralement bien vu qu'elle devait s'appliquer aux sciences morales (psychologie, sociologie, histoire), à la morale et à la pédagogie. Beaucoup de candidates ont été orientées par le titre de l'épreuve : « morale ou éducation » ; c'était juste, surtout pour la morale, et on a dit sur le rationalisme moral des choses parfois fort intéressantes. L'application à la pédagogie s'imposait moins. Toutefois, nous avons recueilli avec plaisir certaines remarques faites par une candidate, professeur de physique, sur la nécessité de lutter contre l'empirisme absurde et étourdi des élèves qui « manipulent »

Il se trouve que l'épreuve a été nettement meilleure chez les physiciennes que chez les mathématiciennes. Les secondes ont été plus scolaires,

plus étroitement asservies à leurs cours ou aux livres qu'elles ont lus. Les physiciennes disposaient évidemment d'exemples plus nombreux, mieux connus et même vécus.

Mais nous devons dire que, dans l'ensemble, l'épreuve est très satisfaisante. Le sujet qui avait été choisi de façon à pouvoir être traité par toutes, et à des niveaux différents, a paru intéresser les candidates.

Nous avons relevé les fautes matérielles coutumières qu'il est pourtant, peut-être, utile de signaler : outre les accords de participes incorrects, les erreurs habituelles dans la conjugaison de *résoudre*, de *conclure* (ce verbe est souvent conjugué comme si c'était *concluer*) les fantaisies variées dans l'orthographe de *concomitant*. Le mot *véracité* est employé souvent pour *vérité*, alors qu'il est à peu près synonyme de *sincérité* et ne s'applique qu'aux personnes. Une candidate a écrit *véricacité*. Il faut dire, d'ailleurs, qu'une autre a parlé d'un *strabiste* (personne atteinte de strabisme) et aussi d'un *daltonisme* (pour *daltonien*). Nous signalons une tendance (observée ailleurs, mais dans les milieux scientifiques) à tirer de l'adjectif *erroné* un verbe *erroner* qui signifierait « induire en erreur ». Enfin, nous croyons utile de rappeler ce fait indéniable, et qui s'explique, peut-être, à la rigueur : on doit écrire *rationnel* et pourtant *rationalisme* *rationnaliste*, *rationaliser*.

Epreuves orales.

Nous avons dit déjà que les leçons ont été notées d'une manière plus élevée cette année que l'an passé. Mais les notes en arithmétique et en algèbre sont numériquement comparables en 1935 et en 1936, en sorte que l'élévation de la moyenne est presque uniquement due aux notes de géométrie et s'explique sans doute par cette circonstance qu'en 1935 les leçons de géométrie portaient toutes sur les applications et qu'en 1936, elles étaient toutes relatives à la géométrie pure.

En *Arithmétique*, nous n'insisterons pas sur les faiblesses manifestes d'une leçon sur la division des nombres entiers ; les rapports d'agrégation ont souvent signalé les fautes à éviter, que nous avons entendues à nouveau, par suite d'un manque de préparation sans doute, car la candidate a prouvé en géométrie qu'elle pouvait bien faire.

Mais nous ne nous lasserons pas de dire que la leçon sur la recherche du p.g.c.d. de deux nombres entiers doit être dominée par l'idée que ce problème est un simple cas particulier de la recherche de tous les diviseurs communs.

Rappelons encore que, dans la théorie des fractions décimales périodiques, il est fâcheux et inutile de donner intuitivement et *a priori* un sens à une expression comme la suivante : 0, 53131...

En *Algèbre*, nous avons pu constater une fois de plus que la leçon sur la résolution de deux équations linéaires à deux inconnues est rarement bien faite. On se débarrasse trop souvent de certaines conditions d'inégalité sans scrupule et, par exemple, on affirme que le système $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$ est un système indéterminé si $ab' - ba'$, $ac' - ca'$ sont

nuls tous deux ; cet énoncé n'est exact que si a et a' ne sont pas nuls tous deux.

Dans une leçon sur l'équation du second degré, il y a lieu d'insister sur les faits nouveaux rencontrés : Irrationalité, racine double. Cela ne veut pas dire qu'on développera sur ces sujets des considérations savantes mais, pour préciser un point, que l'on fera remarquer tout simplement que les équations $x = 0$, $x^2 = 0$ sont différentes.

Dans une leçon sur l'équation du second degré et celles qui s'y ramènent, il importe de conduire l'étude de l'équation du second degré en fonction de l'étude prévue des équations bicarrées et des équations réciproques.

Lorsqu'on demande l'étude des courbes dont l'équation est résolue par rapport à l'une des coordonnées : tangente, normale, concavité, points d'inflexion, il n'y a lieu d'aborder l'étude des branches infinies pour lesquelles x et y sont tous deux infinis qu'après avoir traité avec suffisamment de détails toutes les questions explicitées dans le titre.

L'énoncé de la « Première leçon sur les nombres complexes et leur représentation géométrique, opérations » invite les candidates à donner à la représentation géométrique l'importance qu'elle doit avoir. Mais il faut éviter d'être trop systématique, et de présenter arbitrairement des conventions qui peuvent se justifier. Il n'est pas inutile, d'autre part, de faire remarquer, à propos de la multiplication, que les triangles construits sont non seulement semblables, mais qu'ils le sont directement.

Le leçon de *géométrie analytique* sur la réduction de l'équation des courbes du second ordre dans le plan a été traitée par deux candidates. L'une a bien compris le sujet ; elle a su opérer très simplement, sans calculs inutiles. L'autre, qui se présentait pour la première fois et dont le jeune âge excluait l'hypothèse qu'elle eût pu suivre un cours de mathématiques spéciales avant les profonds changements de 1904, nous a présenté une archaïque leçon, critiquable dans la conception et la réalisation. Que la mauvaise herbe repousse donc rapidement ! Il est à éviter de reprendre la forme générale de l'équation (après avoir fait disparaître le terme $2Bxy$) pour chercher le centre, et de discuter les équations $Ax + By + D = 0$, $Bx + Cy + E = 0$, surtout pour affirmer que si l'on a $AC - B^2 = 0$, $AE - BD = 0$, il y a toujours une ligne droite de centres. Ces égalités ne sont-elles pas satisfaites pour les équations de la forme

$$Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Dans le détail, il est fâcheux de résoudre l'équation linéaire

$$(A - C) \operatorname{tg} \alpha = 2B,$$

dans laquelle $\operatorname{tg} \alpha$ est l'inconnue, sans s'occuper ni du cas d'impossibilité, ni du cas d'indétermination.

Au sujet de la *trigonométrie*, signalons que le passage de l'un à l'autre des systèmes de relations entre les éléments fondamentaux d'un triangle, peut et doit s'expliquer logiquement et disons qu'une leçon difficile sur des exemples de résolution de triangles (autres que les cas classiques au moyen d'éléments fondamentaux) a pu être notée assez favorablement, malgré la

faiblesse du second exemple, en raison du plan général, des remarques géométriques faites, et aussi parce que le premier exemple dans lequel a , A , h_a étaient les données, a été vraiment bien traité.

Les *leçons de géométrie* conduisent à renouveler une remarque déjà faite souvent : L'étude des branches infinies de l'hyperbole n'est présentée ni avec une pensée assez ferme, ni avec un langage assez châtié. Il est pourtant si simple de définir la direction asymptotique, c'est-à-dire un point à l'infini, et ensuite la tangente en ce point, c'est-à-dire l'asymptote.

La leçon sur le lieu géométrique des points M d'où l'on voit les points A et B sous un angle donné est presque toujours imparfaite en ce qui concerne la réciproque parce qu'on n'énumère pas complètement toutes les régions dans lesquelles se trouve le point M . D'autre part, si on introduit le sens des angles, c'est méconnaître une idée importante de la géométrie pure que de ne considérer que des demi-droites. Le véritable intérêt de la question est d'arriver à un lieu formé d'un seul cercle pris en entier, grâce à la notion d'angle de deux droites illimitées dans un plan orienté.

Signalons encore une tendance vraiment très marquée cette année à négliger les réciproques ou à ne pas interpréter exactement des résultats obtenus.

La leçon sur l'étude des coniques au moyen de la définition commune par un foyer et sa directrice a été bien faite. Un progrès sensible a été réalisé sur ce point en peu d'années, et nos jeunes agrégées pourront traiter avec une souplesse étendue le chapitre des coniques.

Mais il ne faut pas pousser trop loin l'amour des méthodes nouvelles. Une candidate, dont le sujet était : « Première leçon sur les sections planes d'un cône de révolution » s'est ramenée en quelques mots au problème plan concernant le lieu des points dont le rapport des distances à un point fixe et à une droite fixe est constant, problème qu'elle a traité sans revenir au cône. Le jury avait laissé à la candidate toute liberté de choisir la matière de sa leçon ; il a donc dû la suivre dans ses vues, mais, sans aucun doute, la liberté prise était trop grande.

Dans une leçon sur l'égalité ou la symétrie des trièdres, il est très important de rappeler avec précision la notion de sens et les propriétés des symétries par rapport à un point ou un plan. Il ne faut pas non plus gâter une démonstration en paraissant croire qu'il n'y a que des dièdres aigus.

Toutes les notes de géométrie vont de 18 à 12, sauf une qui est 5. Il s'agit d'une leçon très faible sur les polygones réguliers au cours de laquelle la candidate a paru ignorer les éléments fondamentaux de l'arithmétique comme de la géométrie.

Mais c'est là une exception. Le concours de l'Agrégation de 1936 est digne des précédents. Il apporte à l'Université le concours de nouveaux professeurs qui seront à la hauteur de leur tâche et il laisse en réserve des candidates dont la maturité peut et doit s'affermir.

Le Président du Jury,

Th. LECONTE.