

DEUXIÈME PARTIE

Sur les foyers de l'ellipse et de l'hyperbole

La détermination des foyers d'une ellipse ou d'une hyperbole dont on connaît l'équation ponctuelle peut être rattachée simplement au problème de la racine carrée d'un nombre complexe. Ce calcul n'est peut-être pas inédit, mais il a paru surprendre les élèves lorsqu'il se présentait au cours de mes interrogations, et il pourra intéresser certains collègues.

En supposant effectuée, par une translation des axes, la réduction au centre, l'équation de la courbe est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + A'y^2 + H = 0$$

avec $H \cdot (AA' - B^2) \neq 0$, les axes de coordonnées Ox , Oy étant rectangulaires et passant par le centre O de la conique.

Pour qu'un point $F(x_0, y_0)$ soit foyer, il faut et il suffit que les deux droites isotropes

$$(x - x_0) \pm i(y - y_0) = 0$$

soient tangentes à la conique. La condition de contact de la droite

$$x + iy - (x_0 + iy_0) = 0$$

et de la conique s'obtient, par exemple, en exprimant que l'équation aux ordonnées des points communs aux deux courbes a une racine double.

En remarquant que, dans ce calcul, les coordonnées de F n'interviennent que par le groupement

$$x_0 + iy_0 = z_0,$$

l'équation aux ordonnées des points communs est

$$(A' - A - 2Bi)y^2 + 2(B - Ai)z_0y + (Az_0^2 + H) = 0$$

et la condition de contact se réduit à :

$$(1) \quad z_0^2 = \frac{H}{AA' - B^2} (A - A' + 2Bi).$$

Si l'on pose : $\alpha = \frac{H}{AA' - B^2} \cdot (A - A')$ et $\beta = \frac{H}{AA' - B^2} \cdot 2B$, on voit que les quatre foyers, *réels et imaginaires*, de la conique ont pour coordonnées les solutions du système :

$$(x_0 + iy_0)^2 = \alpha + i\beta, \quad (x_0 - iy_0)^2 = \alpha - i\beta$$

équivalent au système :

$$x_0^2 - y_0^2 = \alpha, \quad 2x_0y_0 = \beta$$

dont la résolution est classique.

Si l'on se borne à la recherche des *foyers réels* de la conique, x_0 et y_0 étant réels, le nombre complexe z_0 peut être considéré comme l'abscisse du point $F(x_0, y_0)$ dans le plan Ox , Oy . L'équation (1) exprime alors que les nombres z_0 correspondant aux foyers réels sont les racines carrées du nombre complexe

$$\alpha + i\beta$$

Donc, si l'on construit le point K du plan Ox, Oz dont les coordonnées sont les nombres réels α, β , les foyers réels F et F' de la conique sont les points images des racines carrées du nombre complexe représenté par le point K (ou par le vecteur OK). La construction des points F et F', par la règle et le compas, à partir du vecteur OK et de l'unité de longueur du système de coordonnées, est classique.

On remarquera :

1° que les coordonnées de K sont des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation cartésienne de la conique.

2° que l'axe *focal* de la conique est la bissectrice intérieure de l'angle de l'axe ox , vers le vecteur OK.

3° que l'on retrouve l'expression de la demi-distance focale c de la conique (c est le module du nombre complexe z_0), en fonction des coefficients de l'équation cartésienne :

$$c^2 = \left| \frac{H}{AA' - B^2} \right| \cdot \sqrt{(A - A')^2 + 4B^2}.$$

4° La simplicité du calcul tient à la forme de l'équation de l'une des droites isotropes d'un point (x_0, y_0) :

$$x + iy - z_0 = 0.$$

Il est bien évident qu'un calcul et des remarques semblables s'appliquent à la détermination des foyers d'une ellipse ou hyperbole définies par une équation tangentielle.

J. DESFORGE,

Professeur au lycée Saint-Louis.
