

DEUXIÈME PARTIE

Sur le principe de réciprocité de Legendre

Voici une démonstration, qui n'est peut-être pas inédite, du principe de réciprocité de Legendre (1).

Soient a et b deux entiers impairs supérieurs à 1 et premiers entre eux :

$$a = 2\alpha + 1, \quad b = 2\beta + 1$$

A tout nombre x de l'ensemble 1, 2, 3, ... α correspondent deux entiers Q_x et R_x tels que

$$(1) \quad bx = aQ_x + R_x \text{ et } 0 < |R_x| \leq \alpha,$$

car b étant premier avec a et $x < a$, bx n'est pas divisible par a .

Tous les $|R_x|$ appartiennent à l'ensemble 1, 2, ... α ; leur nombre est α ; ils sont différents les uns des autres, car soient x et y deux nombres différents appartenant à cet ensemble ; si R_x était égal à $\pm R_y$, comme

$$b(x \mp y) = a(Q_x \mp Q_y) + R_x \mp R_y$$

on aurait

$$b(x \mp y) = a(Q_x \mp Q_y)$$

donc $b(x \mp y)$ serait divisible par a , ce qui est impossible, car b est premier avec a et $0 < |x \mp y| < a$.

Par conséquent, l'ensemble des $|R_x|$ est identique à l'ensemble 1, 2, ... α ; donc

$$|R_1| + |R_2| + \dots + |R_\alpha| = 1 + 2 + \dots + \alpha$$

Mais $R_1 + R_2 + \dots + R_\alpha$ et $|R_1| + |R_2| + \dots + |R_\alpha|$ sont de même parité ; donc $R_1 + R_2 + \dots + R_\alpha$ et $1 + 2 + \dots + \alpha$ sont aussi de même parité et alors en ajoutant les égalités obtenues en faisant dans (1) $x = 1, 2, \dots, \alpha$ et en tenant compte de ce que a et b sont impairs, on voit que

$$(Q_1 + Q_2 + \dots + Q_\alpha) \text{ est pair}$$

Ensuite Q_x est égal au nombre des termes négatifs de la suite illimitée

$$1a - bx, 2a - bx, 3a - bx, \dots$$

ou à ce nombre augmenté de 1 suivant que R_x est positif ou négatif. Mais $(\beta + 1)a - bx$ est positif car

$$(\beta + 1)a = (\beta + 1)(2\alpha + 1) > (2\beta + 1)\alpha \geq bx ;$$

donc le nombre des termes négatifs de la suite limitée

$$(S_x) \quad 1a - bx, 2a - bx, \dots, \beta a - bx$$

est Q_x si $R_x > 0$; c'est $Q_x - 1$ si $R_x < 0$.

Donc, en désignant par n le nombre des R_x négatifs, le nombre total des termes négatifs des suites $S_1, S_2, \dots, S_\alpha$ est

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_\alpha - n$$

qui est de même parité que n car $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_\alpha$ est pair.

(1) Voir, par exemple, les *Leçons d'Arithmétique* de TANNERY, page 510 et suivantes de la 9^e édition 1922 (A. Colin, éditeur).

Donc en désignant $(-1)^n$ par le symbole de Legendre $\left(\frac{b}{a}\right)(1)$, on voit que $\left(\frac{b}{a}\right)$ est de même signe que le produit des $\alpha\beta$ valeurs que prend $az - bx$ quand on y fait $x = 1, 2, \dots, \alpha$ et $z = 1, 2, \dots, \beta$.

De même $\left(\frac{a}{b}\right)$ est de même signe que le produit des $\alpha\beta$ valeurs que prend $bx - az$ pour ces mêmes valeurs de x et de z ; donc

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{b}{a}\right) = (-1)^{\alpha\beta} \quad \text{CQFD}$$

L. GÉRARD,

Professeur honoraire au Collège Chaptal.
