

9. Rapport sur le Concours, en 1935, de l'Agrégation des Sciences Mathématiques (1)

Epreuves écrites (2)

Le nombre des candidats continue d'augmenter : 184 inscrits (+ 25) dont 169 (+ 25) ont assisté à la première composition.

62 se présentaient pour la première fois, 39 pour la seconde, 29 pour la troisième, 24 pour la quatrième ou la cinquième, 12 pour la sixième ou la septième, 3 pour la huitième ou la neuvième.

Très peu de défaillances parmi ces candidats : 3 seulement étaient absents le second jour, 5 le troisième et 9 le quatrième. Cette continuité dans l'effort, louable en principe, n'allait pas sans quelques illusions chez certains, puisque 30 des candidats présents à l'épreuve de mécanique ont obtenu une note moyenne, égale ou inférieure à 3 pour l'ensemble de leurs compositions écrites : la proportion, par rapport aux candidats effectifs, est 17,7 % ; elle était de 17,3 % l'an dernier. Un rapprochement plus complet montre que sur ces trente candidats voués *à priori* à l'insuccès, dix avaient déjà échoué, dans les mêmes conditions, au concours précédent. A eux de réfléchir avant de poursuivre dans une voie qui paraît sans issue.

D'après leur origine, les candidats se répartissent ainsi : 9 élèves de l'école normale supérieure, 6 anciens élèves dont 3 pourvus de délégations et 2 au service militaire, 4 auditeurs libres de la même école ; 37 professeurs titulaires ou pourvus de délégations variées dans l'enseignement secondaire, 19 maîtres attachés aux enseignements primaires ou professionnels ; 44 répétiteurs des lycées et collèges, 10 maîtres ou surveillants d'internat ; 40 étudiants boursiers ou libres, dont 3 au service militaire.

29 avaient été admissibles, certains jusqu'à trois fois, à des concours antérieurs.

Le total des points exigés pour l'admissibilité a été arrêté à 28,5 (29 l'an dernier) ; le premier candidat éliminé — le 35^e de la liste générale — avait 27,5 et les sept suivants 27, 26,5 ou 26. La moyenne générale des 34 admissibles est 35, inférieure d'un point à celle des admissibles de l'an dernier. Cette infériorité s'aggrave si l'on envisage l'ensemble des candidats : elle atteint 1,4, la moyenne générale étant 20,6 au concours de 1935. Ces constatations s'accordent avec celles que donne l'examen des moyennes relatives à chaque composition.

Parmi les candidats admissibles, se trouvent : 7 élèves de l'école normale supérieure, 5 anciens élèves dont 3 délégués et 1 au service militaire, 2 auditeurs libres ; 5 professeurs titulaires ou délégués d'enseignement secondaire, 4 professeurs d'enseignement primaire supérieur ou profession-

(1) Le Jury était composé de MM. BLUTEL, inspecteur général honoraire, président ; TRESSE, inspecteur général, vice-président ; BÉGHIN, professeur à la Faculté des Sciences de Paris ; SOULA, professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier ; ROBERT, professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

(2) Voir les énoncés pages 16 et suivantes des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1935*.

nel, 1 répétiteur de lycée, 10 étudiants boursiers ou non dont un au service militaire.

Dix d'entre eux étaient d'anciens admissibles. Les rapports particuliers des correcteurs vont nous documenter de façon précise sur la valeur des épreuves écrites.

Mathématiques élémentaires (M. TRESSE). — « La transformation (R) de l'espace, produit de deux inversions successives (S), (S'), peut, par inversion, se ramener à l'un des trois types suivants : homothétie, rotation autour d'un axe, translation ; l'homothétie est le produit de deux inversions de même pôle, la rotation et les translations sont chacune le produit de deux symétries (inversions dégénérées) par rapport à deux plans, plans sécants pour la première, parallèles pour la seconde. Rappeler et ordonner d'abord, dans trois premières parties, les caractères de cette transformation, en les rattachant principalement à la distribution de ses points invariants ; puis, dans deux dernières parties, déterminer et étudier celles de ces transformations dans lesquelles soit une sphère donnée Σ , soit une sphère Σ et un point J, ont des homologues donnés, sphère Σ' , ou sphère Σ' et point J', tels sont les points essentiels du sujet de géométrie élémentaire proposé aux candidats.

L'étude et la recherche ne présentaient pas de difficultés insurmontables. Dans les premières parties, les concurrents n'avaient pas à explorer un monde nouveau pour eux, et cette circonstance s'est traduite par le volume copieux de compositions, bonnes ou médiocres.

En revanche, l'étude nécessitait des qualités d'observation et d'analyse, un jugement à la fois solide et fin, distinguant les nuances, posant nettement les problèmes avant de les résoudre. Ce sont des qualités de jugement, au moins autant qu'un apport plus ou moins riche de résultats, qui ont pesé le plus dans l'appréciation des compositions, et qui ont permis d'y distinguer un contingent sérieux et fort honorable d'environ 30 compositions ayant obtenu la moyenne de 10. Mais inversement, chez les autres, moins heureux, la facilité de la recherche, l'intuition plus rapide que réfléchie des solutions, les connaissances déjà acquises, mais plus ou moins solides, semblent s'être opposées à un jugement plus sûr, et avoir ainsi été plus néfastes qu'utiles.

A chaque pas, nous en avons rencontré des exemples. Dès l'entrée en matière, dans la recherche des points invariants de la transformation générale, beaucoup annoncent immédiatement le résultat, points d'un cercle Γ intersection des deux sphères d'inversion S, S', lorsque celles-ci existent et se coupent, système de deux points A, B, points limites du faisceau défini par ces sphères, dans le cas contraire, le cercle Γ ou le système A, B, se réduisant à un seul point dans le cas limite où les deux sphères sont tangentes ; mais la plupart en restent à l'affirmative ; certains n'aperçoivent et n'annoncent qu'un seul cas : plusieurs ne constatent pas que les deux cas principaux s'excluent réciproquement.

Une même transformation (R) peut, d'une infinité de manières, se décom-

poser en un produit de deux inversions (S) , (S') ; elle est définie par la donnée de ses points invariants et d'un couple M, M' de points homologues distincts ; ces deux questions sont étroitement liées ; elles étaient rapprochées dans le texte ; une réponse unique, immédiate et rapide, reposait sur le passage par les types réduits de la transformation ; l'erreur fréquente a été de constater seulement que les données permettent effectivement et d'une infinité de manières, de choisir un produit de deux inversions (S) , (S') donnant les mêmes invariants et le même couple M, M' ; mais on ne cherchait pas si toutes les opérations ainsi définies donneront d'un autre point quelconque N le même homologue N' . Notons toutefois que ceci a été établi directement avec succès, et de diverses manières, dans certaines compositions ; la solution la plus heureuse a consisté à placer N à l'intersection de deux lignes, droites ou cercles, passant par un ou plusieurs points invariants, et, en s'aidant de la conservation des angles, à construire les transformées de ces lignes, leur intersection définissant le point N' d'une manière unique.

S'agit-il de déterminer les transformations (R) dans lesquelles une sphère donnée Σ a pour homologue une autre sphère donnée Σ' ; on choisit arbitrairement une sphère Σ_1 , et l'on compose (R) avec les deux inversions (S) et (S') dans lesquelles Σ_1 est l'inverse de Σ et Σ' , mais on n'ajoute pas que c'est nécessairement ainsi que sont constituées toutes les transformations (R) demandées. L'omission s'aggrave ensuite lorsqu'il s'agit de montrer que pour chacune de ces opérations (R) on peut choisir l'inversion (S') de façon qu'elle laisse invariante Σ' ; la réponse fréquente consiste à choisir Σ_1 confondue avec Σ' , et pour (S') une inversion quelconque conservant Σ' , ou, plus simplement encore, l'inversion ayant Σ' pour sphère principale ; mais l'on ne sent pas la nécessité de démontrer que pareil choix est possible avec toute opération (R) , envisagée *a priori*, transformant Σ en Σ' ; indiquons que cette démonstration résulte de l'existence d'un point S' , ayant même puissance par rapport à Σ' et aux sphères d'un réseau, celui des sphères orthogonales au faisceau des sphères S, S' défini par la transformation (R) .

Enfin, il est une lacune du même genre qui, à de très rares exceptions près, a pesé sur toutes les compositions, c'est celle qui laisse systématiquement de côté toutes les inversions négatives. L'erreur vient sans doute de ce que, dans les premières leçons sur l'inversion, les inversions négatives sont généralement écartées, comme donnant d'une figure, à une symétrie près, les mêmes transformées que les inversions positives ; le fait que l'instrument peut être suppléé par un autre ne constitue cependant pas une raison pour lui refuser le droit à l'existence. Cette omission a même conduit parfois à une conclusion dont l'erreur manifeste aurait dû constituer un avertissement, c'est que l'homothétie ne pourrait jamais être une transformation réciproque ; l'émission écartait en effet la symétrie par rapport à un point, produit de deux inversions de même pôle et de puissances opposées.

L'on ne saurait trop recommander aux candidats, pour éviter ces fautes

de jugement, de recourir le plus possible aux idées générales, simples et fécondes, plutôt que de rester liés aux détails, de s'attarder dans la considération de cas distincts, souvent séparés inutilement. Il est surprenant, par exemple, de constater que, chez eux, l'étude de l'inversion n'est pas dominée par cette propriété caractéristique capitale que toute transformation ponctuelle dans laquelle deux couples de points homologues sont toujours placés sur un même cercle (ou droite) est une inversion, ou sa variété dégénérée, une symétrie. Ce caractère n'a été invoqué que par un seul candidat, à propos de la transformation par inversion d'une autre inversion. Il pouvait également intervenir dès la première partie, et permettait immédiatement de rechercher et construire les couples de points invariants distincts A, B , dans la transformation (R) , ces deux points se plaçant nécessairement sur un même cercle avec un point quelconque M_1 et ses deux inverses M, M' , dans les deux inversions $(S), (S')$.

Arrêtons-nous sur quelques points qui se sont révélés comme présentant le maximum de difficultés. L'un d'eux est relatif aux deux constantes représentant, en quelque sorte, les dimensions de l'opération (R) . La première de ces constantes, $2a$, égale au rayon du cercle Γ , ou à la distance AB des deux points invariants, définit les invariants de l'opération ; la seconde, $h = JO$, O étant le centre de Γ ou du segment AB , J le point aligné avec S, S' et O , dont l'homologue est rejeté à l'infini, définit un couple de points homologues. Une relation entre ces constantes et les abscisses des pôles variables des deux inversions $(S), (S')$, relation qui a été facilement établie par la quasi-unanimité des concurrents, mettait en évidence le rôle de ces deux paramètres. Restait à élucider comment ils varient lorsque (R) est soumise à une inversion quelconque (I) . Seuls, trois candidats y sont arrivés. Cependant, dans le cas d'un cercle d'invariants Γ , l'angle sous lequel deux sphères $(S), (S')$ se coupent étant le même quelles que soient ces sphères,

et se conservant par inversion, il apparaît de suite que le rapport $\frac{a}{h}$ reste invariable lorsque (R) se transforme par inversion. Dans le cas de deux points invariants A, B , le principe de continuité laisse prévoir qu'il doit en être de même. Une démonstration directe, inspirée par la substitution d'un rapport anharmonique à un angle, consistait à observer que le rapport anharmonique (A, B, S, S') reste le même quel que soit le couple S, S' , et que l'inversion (I) ne l'altère pas. En particulier, lorsque l'opération (R) est réciproque, le point J est en O ; les sphères S, S' , si elles ont un cercle commun Γ , se coupent à angle droit, et, dans le second cas, les pôles S, S' sont conjugués harmoniques par rapport aux points invariants A, B ; dans tous les cas, la constante h est nulle. Mais principe de continuité, rapport anharmonique, ajoutons équivalence, dans le domaine complexe, d'un cercle Γ , et de deux points A, B , centres des sphères de rayon nul passant par ce cercle, là encore nous rencontrons des idées générales dont ne s'inspirent pas assez nos concurrents.

Les autres points présentant quelques difficultés ont eu, chez les meilleurs, plus de succès que les précédents, et nous nous contenterons d'indiquer les

propriétés générales des opérations (R) qui transforment une sphère donnée Σ en une autre sphère donnée Σ' , propriétés qui apparaissent directement, ou, plus facilement, en passant par l'intermédiaire d'une inversion (I) transformant Σ et Σ' en deux plans ou deux sphères concentriques, suivant qu'elles se coupent ou ne se coupent pas. A part deux opérations isolées, où (S') a pour sphère principale Σ' , à part également le cas de deux sphères tangentes Σ , Σ' , les opérations (R) se répartissent en deux séries, (S) étant dans chaque série, l'une des deux inversions, bien déterminées, transformant Σ en Σ' , son pôle étant donc l'un des deux centres de similitude de Σ et Σ' , et (S') étant une inversion quelconque laissant Σ' invariante, son pôle pouvant donc être arbitrairement choisi. Dans chaque série, les cercles Γ sont tous les cercles de la sphère d'inversion S, si elle existe, et les couples A, B, tous les couples de points inverses par rapport à (S) ; tout point O de l'espace est ainsi centre d'un seul cercle Γ ou d'un seul couple A, B. Lorsque (R) est réciproque, les plans des cercles Γ passent par un point fixe S_1 , le centre de similitude de Σ et Σ' distinct du pôle de (S), ces cercles étant donc les cercles de la sphère S orthogonaux au cercle d'intersection de Σ , Σ' , lorsqu'elles se coupent, et les couples A, B appartiennent à la sphère principale de la seconde inversion (S_1) transformant Σ en Σ' , leur existence étant liée

à celle de cette sphère. Lorsque (R) est telle que $\frac{a}{h}$ reste constant, les cercles Γ sont les intersections de la sphère S avec les sphères orthogonales à celle-ci et coupant sous un angle constant une autre sphère du faisceau Σ , Σ' , et les points A, B décrivent respectivement deux sphères de ce faisceau inverses l'une de l'autre par rapport à (S).

Lorsque les sphères Σ , Σ' sont tangentes, il n'y a plus qu'une seule inversion (S) transformant Σ en Σ' , une seule série d'opérations (R), et certains des résultats précédents s'évanouissent.

Lorsque, en même temps que Σ et Σ' , on se donne un point J et son homologue J', il n'y a plus, dans chaque série, qu'une seule opération (R), sauf le cas où J' coïncide avec l'inverse de J par rapport à (S), auquel cas il y en a une infinité, les inversions (S') ayant pour sphères principales les sphères passant par deux points fixes.

Tout ceci se résume par des chiffres : 168 candidats ont remis des compositions ; 3 auxquels a été attribuée la note 17, un autre avec la note 16, ont obtenu assez correctement la plupart de ces résultats, la distribution des

opérations (R), pour $\frac{a}{h}$ constant, étant mise à part ; ces candidats se sont distingués surtout par leur intelligence des idées générales et la sûreté de leurs observations.

37 de leurs camarades, ayant à des degrés divers leurs qualités, leur succèdent ensuite, ayant mérité des notes qui s'échelonnent de 14,5 à 8, 11 d'entre eux se rassemblant de 11,5 à 10,5 et 6 autres à la note 9. Toutes les notes de la gamme, de 7,5 à 1,5, sont ensuite représentées, les contingents attribués à chacune allant de 6 pour la note 3,5, à 15 unités pour la note 5. En fin de liste, deux notes seulement de 1 et une de 0,5.

Une vingtaine de copies, cotées de 2 à 0,5 sont celles de sujets que l'on s'étonne de rencontrer dans un concours d'agrégation ; plusieurs de ceux-ci ne savent pas, en effet, exprimer correctement, en fonction de la distance des centres et des rayons, les conditions pour que deux sphères soient tangentes ou sécantes, et se contentent, dans le second cas, de la seule inégalité $d < r + r'$; d'autres se montrent incapables de résoudre une inégalité du second degré.

Ces faits, heureusement, sont l'exception, et ne peuvent modifier une impression générale qui, sans être brillante, est néanmoins satisfaisante. »

Ajoutons que la moyenne générale 6,13 dépasse celles de 1931, 1933 et 1934.

Mathématiques spéciales (M. ROBERT). — « 166 candidats ont pris part à cette épreuve.

Deux compositions ont été cotées 17, une 13, une 12,5, une 12, une 11,5, deux 11, deux 10, soit dix notes dépassant ou atteignant la moyenne.

On trouve ensuite quatre 9,5, quatre 9, six 8,5, quatre 8, huit 7,5, neuf 7, quinze 6,5, vingt-sept 6, dix-sept 5,5, dix-huit 5, treize 4,5, treize 4, sept 3,5, sept 3, deux 2,5, une note 2 et une note 1.

La moyenne générale est 6,1.

Le problème donné comportait deux parties préliminaires à la question essentielle qui en faisait l'objet et qui était posée dans la troisième partie. La quatrième et la cinquième étaient relatives à des prolongements, l'un algébrique, l'autre géométrique, de cette question.

Les meilleurs résultats sont dus à la compréhension de la troisième partie, abordée dans 36 copies, dont 7 seulement dépassent 2,5 sur 10 pour cette partie.

La facilité de la première partie explique le léger relèvement de la moyenne générale, qui était l'an dernier de 5,45 ; cette partie a contribué au salut de candidats arrêtés dans les suivantes.

1^{re} PARTIE. — Elle débutait par l'étude d'un système de six équations linéaires à six inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, les coefficients des inconnues étant égaux à $+1$ ou à -1 , selon une loi simple. Entre les termes « tout connus » $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ doit exister la condition de possibilité

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$$

comme il apparaissait bien vite.

La moitié des candidats a résolu ce système par une méthode élémentaire, qui consiste à chercher d'abord $\alpha - \alpha', \beta - \beta', \gamma - \gamma', \alpha + \alpha', \beta + \beta', \gamma + \gamma'$. On a souvent négligé de conclure nettement : lorsque la condition de possibilité indiquée $\Sigma x_i = 0$ est remplie, les six inconnues $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont déterminées à une constante additive près.

Les différences mutuelles de ces inconnues s'expriment donc alors en fonction des seules données. On apercevait à priori les expressions nécessaires de ces différences par des combinaisons linéaires, d'addition ou soustraction de deux des équations données. Beaucoup de concurrents ont cru, à tort, qu'ils pouvaient s'en tenir là. C'est ignorer le double caractère

de tout problème, dont la résolution comporte une analyse et une synthèse. Un seul candidat a vérifié que les formules résultant d'une analyse du genre signalé plus haut donnent bien des solutions du système.

Il va sans dire qu'un emploi, dûment justifié, des règles relatives aux systèmes équivalents dispense de la vérification ou synthèse. Il a été tenu grand compte de l'observation de ces principes logiques et de l'exposition, très satisfaisante dans beaucoup de copies.

Les concurrents qui se sont servis de la théorie *générale* des équations linéaires ont été moins heureux que ceux du groupe précédent ; les longueurs dues à des calculs de déterminants, l'absence de conclusions simples ne sont encore que les moindres défauts. Ce qui est grave, c'est la méconnaissance, trop générale, de cette théorie : que de souvenirs incomplets et puérils, qui subsistent seuls des cours faits en Spéciales, et que d'étranges déformations !

On a lu très fréquemment « le système ayant autant d'équations que d'inconnues est un système de Cramer » et les formules de ce nom suivent : le fait que le dénominateur de ces formules est nul, ne vient pas rectifier la phrase initiale. Ou encore « le déterminant principal est nul » ; conclusion « le système est indéterminé ». Les numérateurs des formules de Cramer sont appelés « déterminants caractéristiques », sans qu'il soit fait aucune étude des mineurs du tableau des coefficients.

Toute querelle de mots mise à part, relevons encore qu'une vingtaine de candidats s'acharne péniblement au calcul du déterminant des six formes linéaires, après avoir mentionné la condition $\Sigma x_i = 0$.

Pour un très grand nombre, dès que cette condition apparaît, le système est qualifié d'indéterminé du premier ordre, comme s'il ne pouvait y avoir, en certains cas, plusieurs conditions de possibilité, liant les termes tout connus.

Ces défauts révèlent une faiblesse des connaissances, qui surprend et qui donne l'impression d'un abaissement du niveau de l'ensemble des candidats à l'agrégation.

La seconde question de la première partie visait l'expression, à l'aide de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, de la condition pour qu'il existe une même relation involutive entre les trois couples de nombres $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta'), (\gamma, \gamma')$.

Si l'énoncé n'avait spécifié qu'on doit trouver

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 + x_6^3 = 0.$$

(les six nombres $x_1, x_2, \dots, x_6$ étant tels que $\Sigma x_i = 0$), il est probable que cette relation, de forme symétrique, serait passée inaperçue.

36 candidats ont traité jusqu'au bout cette question. Il semble que ce calcul a fait perdre beaucoup de temps ; des compositions, bonnes dans l'ensemble, ne le contiennent pas en entier.

L'absence des calculs auxiliaires sur la copie a rendu ardue la tâche du correcteur. Un procédé désinvolte et trop commode est revenu trop fréquemment dans la rédaction : « en simplifiant les calculs, et tenant compte de $\Sigma x = 0$, on trouve $\Sigma x_i^3 = 0$ » !

En choisissant comme expression de la condition l'égalité de rapports anharmoniques

$$(x, \beta, \gamma, \alpha') = (x', \beta' \gamma, \alpha),$$

on a la forme

$$(x' - \beta) (\beta' - \gamma) (\gamma' - \alpha) + (x - \beta') (\beta - \gamma') (\gamma - \alpha') = 0$$

qui ne contient que les différences mutuelles des lettres x_i ; elle se traduit immédiatement par la relation

$$(R) \quad (x_3 + x_1) (x_1 + x_2) (x_2 + x_3) + (x_4 + x_6) (x_6 + x_5) (x_5 + x_4) = 0$$

Pour passer de cette relation (R) à celle qui est visée, un candidat a signalé le calcul suivant, simple :

D'après la composition du cube d'une somme, l'identité

$$(A + B + C)^3 = A^3 + B^3 + C^3 + 3 (A + B) (B + C) (C + A)$$

est exacte. Utilisons-la après avoir multiplié par 3 les deux membres de (R), puis ajouté membre à membre la relation

$$(x_1 + x_2 + x_3)^3 + (x_4 + x_5 + x_6)^3 = 0,$$

qui, elle, est conséquence de $\Sigma x_i = 0$.

On obtient ainsi $\Sigma x_i^3 = 0$.

2^e PARTIE. — Le texte guidait les chercheurs vers l'emploi d'un système particulier de coordonnées, adapté à un problème de la géométrie des sphères.

En coordonnées cartésiennes rectangulaires, x, y, z , une équation de sphère étant

$$u(x^2 + y^2 + z^2) + 2vx + 2v'y + 2v''z + w = 0,$$

elle devient en coordonnées homogènes X, Y, Z, T :

$$u(X^2 + Y^2 + Z^2) + 2vXT + 2v'YT + 2v''ZT + wT^2 = 0 ;$$

u, v, v', v'', w peuvent être envisagées comme coordonnées homogènes de la sphère.

Une sphère donnée par ses coordonnées (non toutes nulles), peut se réduire à une sphère-point ou à une sphère-plan. Ces coordonnées interviennent comme les coefficients d'une forme linéaire à cinq variables.

Rappelons que $n + 1$ formes linéaires où figurent n variables ne sont jamais linéairement indépendantes : il en résulte qu'entre les premiers membres des équations de six sphères, il existe *toujours, au moins une* relation identique, linéaire et homogène.

Les cinq premières des six formes linéaires correspondant à ces sphères peuvent servir de bases à une nouvelle représentation de la sixième sphère, dans le cas où elles sont *indépendantes* ; la sixième forme est une combinaison linéaire des cinq autres.

Il est donc possible, étant données les cinq sphères a, b, c, a', b' de représenter une sphère quelconque par une équation telle que

$$(1) \quad \alpha A + \beta B + \gamma C + \alpha' A' + \beta' B' = 0,$$

les équations $A = 0, B = 0, C = 0, A' = 0, B' = 0$ des cinq sphères offrant encore un choix pour chacune d'elles.

Le passage de ce nouveau système de coordonnées d'une sphère à celui des nombres u, v, v', v'', w se fait par une substitution linéaire non singulière.

Dans l'espèce, les données géométriques fixaient six sphères de base a, b, c, a', b', c' ; on demandait d'établir que les six premiers membres A, B, C, A', B', C' de leurs équations peuvent être supposés tels que le polynôme $A + B + C + A' + B' + C'$ soit identiquement nul.

Ceci prouvé, l'équation (1) de la sphère quelconque peut s'écrire :
 $(\alpha + \varphi)A + (\beta + \varphi)B + (\gamma + \varphi)C + (\alpha' + \varphi)A' + (\beta' + \varphi)B' + \varphi C' = 0$
 φ étant arbitraire. La sphère possède six coordonnées qu'on appellera encore $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ (à la place de $\alpha + \varphi, \beta + \varphi, \gamma + \varphi, \alpha' + \varphi, \beta' + \varphi, \varphi$) mais qui ne sont déterminées qu'à une constante additive près et à un facteur constant près.

L'indépendance linéaire de A, B, C, A', B' s'établissait par de simples raisonnements par l'absurde, en faisant jouer les hypothèses géométriques du texte, relatives aux réseaux

R_1	contenant les sphères	a, b, c
R_2	»	» a, b', c'
R_3	»	» a', b, c
R_4	»	» a, b, c' .

En résumé, cette partie n'exigeait que de la réflexion et pas le moindre effort de calcul.

L'emploi très classique des notations abrégées en géométrie analytique, des coordonnées homogènes tangentielles et tétraédriques, reposant sur des idées analogues aux précédentes, nous estimons que cette partie ne devait pas arrêter un candidat sérieux. Mais sur 131 qui l'ont abordée, douze seulement ont atteint la moyenne.

La théorie de l'indépendance linéaire des formes du premier degré est certainement ignorée : elle semble aux étudiants un luxe dont on peut se passer. Aussi que de calculs, d'écritures, de notations à simple ou double indice, pour d'éternels recommencements des raisonnements essentiels, présentés de manière vague et pas concluante !

La besogne matérielle d'écriture de déterminants, qu'on n'évoque que pour les dire « en général non nuls » a épuisé la main et l'esprit de bien des concurrents.

Les notions géométriques intervenant ne présentaient pas de difficultés et ont valu un appoint sérieux à ceux qui les ont analysées : deux faisceaux de sphères n'ont pas en général de sphère commune ; deux réseaux distincts de sphères ont en général une seule sphère commune, accidentellement un faisceau. Un faisceau et un réseau n'ont pas en général de sphère commune ; il était convenu de les dire *incidents* l'un à l'autre, dans le cas exceptionnel. L'indépendance des formes A, B, C, A', B' , ou, ce qui revient au même, le fait que A, B, C, A', B', C' ne sont liés que par l'identité

$$A + B + C + A' + B' + C' = 0$$

n'est établie complètement que dans une seule copie, excellente à cet égard.

Dans la majorité des compositions, le décompte de certains paramètres est le seul argument logique, bien pauvre. Que dire de ceux, assez nombreux, qui font un changement de coordonnées cartésiennes, permettant de repêcher six paramètres, pour amener les premiers membres $A, B, C, \dots$ à satisfaire à l'identité

$$A + B + C + A' + B' + C' = 0 !$$

3° PARTIE. — La question essentielle du problème était celle-ci : trouver les faisceaux F de sphères *incidents* à chacun des quatre réseaux donnés R_1, R_2, R_3, R_4 .

On demandait de préciser à quelle condition une sphère de coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ appartient à un tel faisceau F.

On trouvait sans grande difficulté, à condition d'avoir compris les propriétés de ce genre de coordonnées, la relation

$$(\alpha' - \beta)(\beta' - \gamma)(\gamma' - \alpha) + (\alpha - \beta')(\beta - \gamma')(\gamma - \alpha') = 0$$

qui a été rencontrée dans la première partie du problème.

A l'aide des formes linéaires $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ des coordonnées $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ définies dans cette même partie, cette relation prend la forme symétrique et remarquable $\Sigma x_i^3 = 0$.

Deux candidats ont seuls vu l'équivalence de la condition qu'ils ont trouvée avec cette relation.

Personne n'a aperçu qu'il existait un cinquième réseau de sphères auquel tous les faisceaux F sont également incidents. Ses équations sont

$$\alpha + \alpha' = \beta + \beta' = \gamma + \gamma'$$

A l'aide des x_i , les réseaux R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 apparaissent symétriquement, les équations de chacun étant

R_1	$x_1 + x_5 = 0,$	$x_2 + x_6 = 0,$	$x_3 + x_4 = 0$
R_2	$x_1 + x_2 = 0,$	$x_3 + x_5 = 0,$	$x_4 + x_6 = 0$
R_3	$x_1 + x_6 = 0,$	$x_2 + x_3 = 0,$	$x_4 + x_5 = 0$
R_4	$x_1 + x_3 = 0,$	$x_2 + x_4 = 0,$	$x_5 + x_6 = 0$
R_5	$x_1 + x_4 = 0,$	$x_2 + x_5 = 0,$	$x_3 + x_6 = 0$

La famille Φ des sphères appartenant à un faisceau F est à trois paramètres. Elle possède six générations, parmi lesquelles la précédente, où interviennent six quintuples de réseaux. Faute de temps, on n'a pu aborder leur étude (4° partie).

Par contre, la 5° partie, purement géométrique, a donné lieu à trois réponses, incomplètes d'ailleurs. Elle concernait la surface lieu des centres des sphères faisant partie de Φ et de plus orthogonales à une sphère donnée Σ , quelconque.

Nous espérons que les candidats, abordant à nouveau le problème à tête reposée, verront que les difficultés ne sont pas si grandes qu'ils ont pu le supposer.

Deux compositions très honorables se détachent nettement du lot, et par des qualités différentes. L'une vaut par la rigueur, la concision du raisonnement, dominant le calcul. La seconde a montré de l'intuition, du coup d'œil et la compréhension de l'unité du problème. »

Calcul différentiel et intégral (M. SOULA). — « Bien que la composition de calcul différentiel et calcul intégral ne pût passer pour difficile, nul n'a résolu tout le problème : les questions étaient peut-être trop nombreuses. Ce qui est plus étonnant et un peu alarmant, c'est le nombre élevé des compositions tout à fait faibles : sur 164 candidats qui ont remis une copie, il en est 98 qui n'atteignent pas la note 4.

Pour expliquer cette insuffisance, nous devons tenir compte de l'augmentation constante du nombre des candidats ; il est probable que de nombreux jeunes gens, dont les études ont été hâtives et insuffisantes n'hésitent pas en ce moment à tenter une épreuve à laquelle ils ne sont pas préparés. Pour aborder des problèmes de géométrie infinitésimale, il est indispensable d'avoir une certaine pratique de la géométrie analytique, j'entends de cette partie élémentaire et facile de la géométrie analytique, qui traite du plan, des droites, des paramètres directeurs. J'ai été particulièrement surpris par les maladresses de la mise en équation du début du problème.

Voici une deuxième explication de cette faiblesse d'un trop grand nombre de copies : leurs auteurs ne prennent pas la peine d'achever de résoudre les problèmes et se contentent de résultats mal étudiés et approximatifs. Or, en géométrie infinitésimale, il convient de chercher une explication géométrique de tout ce qui a été obtenu par le calcul ; on en tire des simplifications aux méthodes employées et des indications précieuses pour la suite. Ce n'est d'ailleurs pas seulement après le calcul qu'il faut chercher si la réponse n'est pas évidente : avant d'aborder le problème, il est souvent utile de tracer une figure, de se demander ce qu'elle présente de simple et d'intéressant.

En fait, le problème proposé cette année pouvait être étudié en peu de mots. Je le résumerai de la façon suivante :

On étudie une famille de sphères S à un paramètre ; le lieu de leur centre M est une courbe C décrite par ce point ; le cercle caractéristique G , en général, une enveloppe qu'il touche en deux points A_1 et A_2 symétriques par rapport au plan osculateur en M à la courbe C . Le cercle G coupe ce plan osculateur en B_1 et B_2 .

On demande d'examiner le cas où A_1 et A_2 sont confondus et sont, par suite, en B_1 ou B_2 . Le lieu de ce point A est évidemment une trajectoire orthogonale Γ des plans osculateurs à C ; la tangente MT à C est ainsi la droite caractéristique du plan normal à Γ , donc l'axe de courbure de Γ . Il en résulte immédiatement qu'elle est parallèle à la binormale à Γ et que le cercle G est le cercle osculateur à Γ . Les propriétés demandées à la seconde partie sont donc obtenues tout de suite ; ajoutons que la sphère M est osculatrice à Γ .

La courbe C étant donnée, la recherche de Γ dépend de l'intégration d'un système linéaire d'équations différentielles que l'on peut intégrer (il a été proposé trois ou quatre méthodes d'intégration correctes et d'autres qui ne le sont pas). On peut ensuite démontrer aisément que la droite AA' joignant les points de deux courbes Γ distinctes garde une longueur constante. Cela résulte d'abord de ce que le segment AA' est normal à Γ et à Γ' (et de la formule élémentaire sur la différentielle de la longueur d'un segment) ; cela peut se démontrer par le système différentiel, sans le résoudre, comme l'ont fait quelques candidats ; cela peut encore résulter de la solution du système quand on a eu soin de l'écrire sous une forme facile à lire. Si l'on prend une infinité de courbes Γ à un paramètre, elles coupent le plan osculateur en M suivant une figure de forme invariable puisque deux de

ses points gardent une distance constante. Les courbes Γ sont alors les trajectoires d'un solide en mouvement, solide défini par cette figure plane invariable. Les lignes de courbure de la surface formée par cette infinité de courbes Γ sont alors en évidence sans calcul.

On donne ensuite la courbe C et l'arc A_1A_2 désigné par 2θ qui sera une fonction connue de l'arc s de C . Le lieu de A_1 est encore une trajectoire orthogonale du plan MTA_1 , mais ce ne sont plus ces courbes que l'on demande d'étudier à la quatrième partie. On s'occupe cette fois du lieu du point B_1 . Or ce lieu est défini par un système différentiel en u et v qui ne diffère pas de celui de la deuxième partie. Il en résulte, sans nouveau calcul, que, pour deux trajectoires possibles du point B_1 (trajectoires J et J' parcourues par les points B et B'), la distance BB' ne varie pas. Une infinité de trajectoires J découpe donc encore sur le plan osculateur en M une figure invariable, et les courbes J sont bien les trajectoires d'un solide en mouvement.

Des remarques aussi simples permettent d'obtenir l'essentiel de la septième partie. La sixième partie posait une question un peu délicate, la seule que personne n'ait résolue.

La première partie a été traitée par de très nombreux candidats de façon à peu près exacte ; mais nombreux aussi sont ceux qui ne répondent pas nettement aux questions posées ou qui font des calculs démesurés pour obtenir des résultats presque évidents. Beaucoup ne se préoccupent pas de la convention de signes qu'ils adoptent pour la variable u et ils changent ensuite cette convention, au cours du problème, sans s'en apercevoir. Dans ces conditions, les équations de la deuxième partie, de la cinquième, de la sixième sont fausses. Le nombre des candidats qui doivent à cette négligence du début de n'avoir rien trouvé est de 28. L'énoncé les mettait cependant en garde contre cette erreur en précisant que u serait la mesure d'un segment. D'autres candidats gardent comme variable le rayon de la sphère malgré le conseil de l'énoncé qui indique les variables u et v ; ce conseil n'est cependant pas donné dans le dessein d'égarer les candidats !

A la deuxième partie, ceux-ci sont prévenus que le système différentiel peut être ramené à des quadratures. Très nombreux sont ceux qui répètent cette affirmation sans tenter de la justifier. En comprennent-ils le sens ? Ils n'ont pas vu là l'invitation d'achever le calcul. Le calcul relatif à la courbure de Γ pouvait être évité comme je l'ai indiqué ci-dessus ; rares sont les copies où l'on montre que le point G est le centre de courbure de Γ . En général les questions de signe et de sens des demi-droites ne sont pas étudiées.

Le problème de la réciprocité de C et de Γ proposé à la troisième partie était très simple et a été parfois résolu correctement par ceux qui l'ont posé, comme un problème de géométrie et qui ont tracé une figure ; les calculs algébriques ne pouvaient suffire.

Même erreur à la quatrième partie : j'ai montré ci-dessus que la réponse est presque évidente quand on essaie de se représenter la figure avec quelque précision. Il a été fait de longs calculs qui ne donnent rien et aussi un calcul très long et correct.

A la cinquième partie, on ne trouve que de rares solutions du problème des trajectoires J , reposant sur ce fait que le segment AA' joignant les points de deux trajectoires J et J' garde une longueur constante. Des candidats en assez grand nombre ont seulement montré que la vitesse du point A , sur la trajectoire J , dérive d'une rotation instantanée qui ne dépend que de s . Une telle démonstration devrait être complétée par une définition du solide. Il faudrait, en tous cas, une allusion précise aux théories que l'on applique et nul n'en a donné.

A la septième partie, les courbes lieux de A_1 sont les trajectoires orthogonales non plus des plans osculateurs à C , mais des plans osculateurs aux développées de C . Le calcul conduit à ce résultat si l'on achève complètement la question, mais il peut être évité par un examen attentif de la figure.

La huitième partie était assez facile ; une bonne solution devait conclure que le point de contact de A_1A_2 avec son enveloppe décrit une courbe Γ de la deuxième partie et que la ligne A_1A_2 est constante. Le premier au moins de ces résultats est évident.

Deux compositions notées 16,5 et 15,5 se détachent nettement de l'ensemble : l'une contient beaucoup de résultats, l'autre est remarquable par ses démonstrations géométriques. 32 candidats ont une note supérieure ou égale à 8 et ont fourni des solutions intéressantes à telle ou telle partie du problème. »

Notons également que la moyenne générale 4,2 est très légèrement inférieure à celle de l'an dernier.

Mécanique rationnelle (M. BÉGHIN). — « 160 candidats ont pris part à l'épreuve de mécanique. Deux ont remis des copies blanches ; les notes se répartissent de la façon suivante :

5 notes 0,5 ; 20 de 1 à 1,5 ; 27 de 2 à 2,5 ; 25 de 3 à 3,5 et autant de 4 à 4,5 ; 18 de 5 à 5,5 ; 13 de 6 à 6,5 ; 8 de 7 à 7,5 ; 11 de 8 à 8,5 ; 3 de 9 à 9,5 ; 2 de 10 à 10,5 et une 12.

Ces compositions sont donc extrêmement faibles : leur moyenne générale 4,1 est inférieure de 1,6 à celle du concours précédent.

Le sujet proposé comportait l'étude d'une toupie mobile autour d'un point fixe O et assujettie d'autre part à une liaison avec frottement. Il s'agissait d'un phénomène gyroscopique bien connu : dès que l'axe d'une toupie, mobile autour d'un point fixe, voisin de son centre de gravité, vient en contact avec un profil fixe quelconque, il le suit indéfiniment dans ses moindres sinuosités, sans jamais pouvoir s'en détacher. Le mouvement est soit un roulement sans glissement qui s'établit assez rapidement, soit un glissement avec une réaction qui tend vers zéro pour t infini.

Dans la première partie, la tige de la toupie était supposée en contact avec un cercle fixe (γ) tracé sur une sphère (Σ) de centre O . Ce problème est tout à fait classique. Cependant la moitié des candidats seulement l'ont mis correctement en équations.

Les équations de Lagrange ont été souvent employées judicieusement,

malgré une difficulté particulière d'application provenant de la prise en considération du frottement ; d'autres ont utilisé le théorème du moment cinétique.

A noter de nombreuses applications erronées des équations d'Euler, obtenues par projection sur des axes *non invariablement liés* à la toupie. Ces équations, sous la forme classique

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B) \omega r = L$$

ne s'appliquent que si les axes sont *invariablement liés* à la toupie.

En raison de la symétrie particulière du solide, le moment cinétique, par rapport à la ligne joignant le point O au point M de contact avec le profil (γ), était constant. Plusieurs candidats l'ont reconnu par un raisonnement très correct ; mais d'autres ont exprimé cette constance, comme si l'axe OM était fixe, ne se doutant certes pas qu'un raisonnement délicat s'imposait.

Je note un trop grand nombre d'applications du théorème de la force vive au cas du glissement, alors que le travail absorbé par le frottement aurait dû proscrire cette application.

La discussion du mouvement a été soit laissée de côté, soit très mal faite. Une discussion présentée sous forme graphique pouvait être fort simple et très intuitive. On ne saurait trop recommander ces méthodes de discussion ; elles étaient d'ailleurs conseillées dans le paragraphe 3.

Une application numérique ne présentant aucune difficulté permettait de mettre en évidence la rapidité de l'établissement du roulement sans glissement ; le nombre de candidats qui l'ont traitée convenablement est insignifiant.

Plusieurs candidats ont mesuré par $\frac{1000}{981}$, dans le système C.G.S., la masse d'un kilogramme !

La quatrième partie comportait l'étude du mouvement de la toupie en contact avec un profil (γ) fixe de forme quelconque, le glissement initial étant nul. Il était bien naturel de penser que le cercle de courbure en un point M du profil (γ) jouerait le rôle du cercle (γ) de la première question.

La caractéristique du plan normal en M devait donc jouer le rôle de l'axe os_1 du cercle (γ), la rotation de la toupie serait définie par ses composantes suivant os_1 et suivant son axe propre Oz . Les équations ont alors exactement la même forme que dans le premier cas ; elles montrent, sans calculs, que le contact subsiste indéfiniment, et permettent le calcul de la réaction qui est toujours normale ; la loi du mouvement de la toupie est évidente, la force vive étant constante.

25 candidats ont abordé cette question, mais il n'y en a qu'un qui ait obtenu sur ce sujet des résultats sensés.

Dans la cinquième partie, l'axe de la toupie était supposé rouler sans glisser sur un grand cercle (γ) de la sphère (Σ), mobile autour d'un diamètre OL et soumis à un couple H. Il suffisait d'appliquer le théorème du moment cinétique dans le mouvement par rapport au repère fixe, en remar-

quant que le moment par rapport à OL de la réaction du cercle (γ) sur la toupie était H.

Les équations se ramènent directement aux quadratures sans aucun artifice, 17 candidats ont abordé cette question, mais aucun ne l'a menée à bonne fin. Plusieurs candidats ont appliqué le couple H directement à la toupie, certains ont appliqué à la toupie le couple H et la réaction du cercle (γ), ce qui montre une incompréhension grave des phénomènes mécaniques.

Dans la sixième partie, le profil (γ) supposé de forme quelconque était animé d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un diamètre fixe de la sphère (Σ). Le centre de gravité étant en O, l'ellipsoïde d'inertie étant sphérique, il s'agissait d'étudier le roulement sans glissement de la toupie sur le profil. Or ce mouvement relatif se fait à vitesse constante, comme le montre le théorème de la force vive, puisque les forces d'inertie de Coriolis ont un travail nul, et que les forces d'inertie d'entraînement s'équilibrent à cause des symétries de la toupie.

Il n'y a guère que 4 ou 5 candidats qui aient abordé cette question, sans grand succès d'ailleurs, sauf peut-être pour l'un d'eux.

Enfin, je dois signaler un candidat qui a traité le problème comme un problème de choc ! Tel autre intègre une équation qui n'est vérifiée qu'à un seul instant ! Un autre indique que les forces d'inertie de la toupie sont nulles lorsque sa rotation propre et sa précession ont des vitesses constantes !

Une vitesse linéaire u est exprimée par une différentielle $R d\varphi - r d\psi$! Dans l'application numérique, un candidat exprime des vitesses de rotation $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ en tours par seconde au lieu de radians par seconde !

On est surpris d'avoir à faire de telles observations ! »

Epreuves orales (1)

Aucun candidat admissible ne s'est dérobé à l'oral : on ne saurait trop s'en féliciter. L'admissibilité devenant une condition presque nécessaire à l'obtention d'un poste ou au renouvellement d'une bourse, un candidat qui croit — parfois à tort — avoir fait une mauvaise leçon, ne doit pas rester sur cette fâcheuse impression ; il a tout intérêt à montrer que son infériorité momentanée n'entache pas gravement un premier succès et à en faire la preuve dans une seconde leçon.

Les notes de l'oral sont nettement plus satisfaisantes que celles de l'écrit. C'est ainsi que 22 leçons d'élémentaires et 24 de spéciales ont été cotées de 12 à 17 ; 4 des premières et 9 des dernières ont une note inférieure à 10. La meilleure note (17) a été attribuée trois fois en spéciales et deux fois en élémentaires. La plus faible note des candidats admis est, en spéciales, 12 (une fois) ; en élémentaires, une note de 10 a été compensée partiellement par une bonne note de calcul.

(1) La liste des leçons faites par les admissibles en 1935 peut être demandée au Bureau (joindre 3 francs en timbres poste).

Une critique insérée au rapport de 1934 n'est pas restée sans effet ; elle visait l'étude *directe* des coniques au départ des notions de foyer et de directrice. Une leçon sur ce sujet a été proposée sous deux formes différentes : l'une demandait l'étude directe, l'autre reproduisait textuellement l'alinéa du programme, laissant par conséquent toute liberté au candidat ; celui-ci n'en a pas usé et le Jury a entendu deux fois l'étude directe — il n'en demandait pas tant. Les notes 17 et 12 ont été attribuées à des développements qui ne différaient guère par le fond, mais dont la présentation et l'ordre n'indiquaient ni la même fermeté, ni la même logique.

D'autres observations semblent avoir porté ; il paraît donc sans intérêt d'y revenir.

En voici quelques-unes qui ne sont pas nouvelles, mais à propos desquelles il convient d'insister d'autant plus qu'elles ne s'adressent pas seulement aux candidats à l'agrégation. Les leçons qui les ont motivées ont d'ailleurs obtenu des notes très variées.

En élémentaires, à propos de la résolution et de la discussion de deux équations linéaires à deux inconnues, constatons encore une fois une lacune importante : une hypothèse préalable ($a \neq 0$ par exemple) disparaît dans les conclusions et le candidat se borne à dire que la condition $ab' - ba' \neq 0$ caractérise le cas d'une solution unique du système. C'est vrai, mais encore conviendrait-il d'ajouter que cette condition entraîne soit l'hypothèse préalable, soit une hypothèse analogue et que, dans ce dernier cas, la forme des résultats littéraux n'en est pas modifiée. Cette addition est d'autant plus opportune que le facteur a apparaît aux deux termes d'une première expression rationnelle, obtenue pour l'une des inconnues ; la suppression de ce facteur commun est une condition importante du calcul : il convient d'en tenir compte pour l'orientation du calcul pratique, quand on applique la méthode de résolution à des équations à coefficients *numériques* et qu'on désire les valeurs *exactes* des inconnues sous la forme la plus réduite.

La discussion d'un système d'inégalités linéaires à deux inconnues comporte l'emploi des droites définies par les équations correspondantes. Il n'est pas sans intérêt de rapprocher les régions bornées par ces droites, des systèmes d'inégalités, qui se rattachent au proposé.

La leçon sur les problèmes du second degré laisse toujours à désirer ; le dogmatisme et le mécanisme y règnent encore. Des exemples bien choisis, étudiés à fond, révéleraient bien mieux le genre des difficultés qui pourraient se présenter, qu'une codification — incomplète d'ailleurs — faite *à priori*.

La racine carrée approchée à 1 près ou à $\frac{1}{10^n}$ près, continue à présenter des difficultés dont la persistance ne peut s'expliquer que par une préparation insuffisante. Un candidat à l'agrégation devrait manier avec aisance les inégalités qui s'y rapportent : ce ne fut pas le cas cette année.

Les opérations sur les nombres décimaux et les approximations décimales ont été l'occasion d'un progrès, bien qu'une confusion entre les expressions « fraction décimale, nombre décimal » soit encore trop fréquente.

La géométrie conserve des points faibles :

La réciprocité n'est pas suffisamment utilisée dans les applications de l'inversion.

On continue de croire que les trois arêtes d'un prisme triangulaire peuvent être rencontrées par un plan de section droite : l'examen du cas où ces arêtes sont verticales et logées à des étages différents suffit à détruire cette illusion.

Un dogmatisme complet, dans l'étude de l'aire et du volume de la sphère, a trouvé une sanction dans les erreurs commises par le candidat et non toujours rectifiées. Le caractère conique des volumes tournants utilisés n'a pas été dégagé : des longueurs et des lacunes en résultèrent.

Une même leçon réunit l'étude des trièdres supplémentaires et celle des cas d'égalité ou de symétrie des trièdres ; ce rapprochement a manifestement pour but de simplifier la seconde étude en s'aidant de la corrélation établie par la première. Est-il bien indiqué, dans ces conditions, de faire appel à la construction des trièdres, laquelle nécessite une discussion, alors que d'autres procédés ne supposent rien autre que l'existence des trièdres dont il s'agit ? On sait quel secours apporte à l'étude des cas d'égalité des triangles l'emploi de la médiatrice d'un segment : le plan médiateur rendrait les mêmes services dans l'espace pour les trièdres. Si l'on tient à présenter la construction des trièdres, à cette occasion, encore conviendrait-il de bien dégager les caractères imposés aux données par la possibilité de cette construction. Ce souci permet d'établir, sans autre étude préalable, les inégalités fondamentales, vérifiées par les faces d'un trièdre : il suffit d'écrire que deux couples de points définis sur un cercle orienté par des abscisses curvilignes, comprises entre 0 et 4 (le quadrant étant pris pour unité) se séparent. Si l'on désigne par a, b, c les mesures des faces (l'unité d'angle étant l'angle droit) et par σ leur demi-somme, on est conduit à l'inégalité :

$$(\sigma - a)(\sigma - b)(\sigma - c)(2 - \sigma) > 0$$

d'où l'on conclut que σ est compris entre la plus grande face et 2 droits. Il n'y a rien là qui dépasse le niveau d'une classe de Première et cela suggère des rapprochements avec les propriétés du trinôme en Première, avec celles du résultant de deux trinômes dans la classe de Mathématiques.

Un candidat n'a pas craint de souligner le dogmatisme de son exposition à propos des théorèmes de Dandelin : une indication rassurante lui a été donnée et la clairvoyance révélée par sa franchise lui a valu l'estime du Jury ; notons au passage que cette franchise contribue beaucoup à l'action du maître sur ses élèves. Signalons, à propos de cette leçon, que les parties utiles de la trace du plan sécant sur le plan de symétrie de la figure constituée par ce plan et un cône de révolution sont rarement dégagées dans une étude préalable : une classification des sections, du point de vue de leur forme, en résulterait immédiatement.

Le changement d'origine, dans la leçon sur les moments, continue à présenter des longueurs et des obscurités.

On persiste à donner au caractère logarithmique des formules, en trigo-

nométrie, une importance exagérée. Certains y trouvent parfois l'origine de transformations que la logique impose *à priori* et qui ne supposent nullement la connaissance de la formule définitive. Cela ressemble bien à une faute de jugement. On en trouve un exemple dans la formation de $1 + \cos A$ et $1 - \cos A$, à propos de la résolution d'un triangle ou d'un quadrilatère inscriptible dont les côtés sont donnés.

L'application de la trigonométrie à la détermination des éléments d'une figure géométrique, avait été proposée l'an dernier — pour la première fois depuis longtemps. Le sujet n'avait pas été compris : il ne le fut guère davantage cette année par les deux candidats à qui le sort l'attribua. Quelques éclaircissements paraissent donc nécessaires. Une leçon portant sur les applications de la trigonométrie à des questions d'ordre pratique — mesure d'une hauteur, détermination des distances de points accessibles ou non, lever des plans, triangulation — a figuré longtemps au programme d'agrégation. A la longue, le nombre des problèmes traités par les candidats s'était considérablement réduit et le Jury entendait chaque fois la même leçon. L'absence de toute initiative, de tout effort de composition, ne permettait guère de différencier les concurrents : une note terne était généralement la sanction. C'est pour cette raison que le sujet avait disparu du programme. Rien n'était cependant plus propre à faire valoir l'utilité de la trigonométrie. La mesure des longueurs, sur le terrain, est une opération délicate, pour peu qu'on veuille obtenir le résultat avec quelque précision : aussi se borne-t-on généralement à la mesure directe d'une base, la détermination de la figure étudiée étant complétée par la mesure des angles nécessaires à cette détermination, ou même d'angles surabondants, en vue de vérifications ultérieures. Appliquer la trigonométrie au calcul des médianes d'un triangle défini par ses côtés, ou des éléments d'un quadrilatère déterminé par ses côtés et un angle, c'est traiter des problèmes qui ne se posent pas pratiquement : il en reste assez d'autres pour exercer le choix des candidats et favoriser ceux qui, se sentant la force, ne craignent pas de sortir des chemins battus.

Les notes inférieures à la moyenne ont porté, en mathématiques spéciales, sur l'intégration et la dérivation des séries entières (défaut de préparation et plus rarement incompréhension), la variation des fonctions à l'aide des dérivées (le candidat n'a même pas parlé de la formule des accroissements finis), les coniques d'un faisceau linéaire ponctuel, les lieux géométriques dans le plan, l'élimination au moyen des fonctions symétriques (des notions vraiment sommaires sur le cas d'une racine commune infinie), les séries, la division de polynômes ordonnés suivant les puissances croissantes de la variable, les branches infinies dans l'intersection de deux cônes (on n'a pas vu apparaître ces branches). La difficulté intrinsèque de tels sujets n'est pas établie par l'expérience, car d'excellentes notes ont été attribuées, dans le passé, au plus grand nombre ; certains même sont d'un rendement assuré pour les candidats qui les ont bien préparés.

Quelques critiques indépendantes de la nature du sujet et quelques con-

seils ne seront pas tout à fait inutiles, bien que les faits qui les ont provoqués soient exceptionnels. La lecture fréquente de notes prises au cours de la préparation présente toutes sortes d'inconvénients : elle laisse des doutes sur la faculté d'association du candidat, elle risquerait de donner à des élèves l'impression d'une préparation insuffisante ou d'une difficulté qui les inciterait à ne pas fournir eux-mêmes l'effort personnel désirable.

Les corrections muettes — effacer par exemple du doigt au tableau sans prévenir l'auditoire — risquent d'indisposer un auditeur attentif et méfiant.

L'emploi d'une seule figure, à des fins variées, est une erreur pédagogique ; il faut laisser aux élèves le temps de se pénétrer des conditions d'un raisonnement nouveau : l'apparition de ces conditions, sur une figure *ad-hoc*, force l'attention des intéressés.

La correction du dessin, l'ordre dans la distribution des calculs au tableau, une tenue exempte de tout laisser-aller sont des manifestations de l'intérêt que le maître prend à sa tâche et de son empire sur soi-même ; tout cela ne peut que contribuer à son action sur les élèves.

Signalons enfin une tendance assez fréquente. Plusieurs candidats ont été interrompus à l'expiration du temps réglementaire, sans avoir achevé l'exposition du sujet, telle qu'ils l'avaient conçue. Cela n'est pas bien grave ; mais la réponse de certains à la question traditionnelle, en pareil cas, « que comptiez-vous ajouter ? » a révélé, de façon indubitable, l'ambition de leur conception. On ne saurait trop leur conseiller de montrer plus de mesure, en présence des élèves. Nous bornant à leur intérêt immédiat, rappelons-leur que la note attribuée à une leçon n'est pas proportionnelle au nombre des faits qui y sont accumulés. »

Epreuves pratiques (1)

Calcul numérique (M. SOULA). — « Avant de commencer les opérations numériques, il est bon de vérifier les formules obtenues : cette précaution élémentaire est assez rarement observée. C'est au point que l'on trouve une résolution d'équation du second degré très simple par la méthode de Newton et des résolutions d'équations du 4^e degré ou d'équations transcendantes alors que la solution est un nombre aussi simple que le logarithme népérien de $\sqrt{21} + \sqrt{20}$. Il en résulte des longueurs et de nombreuses erreurs.

Les discussions des approximations obtenues ont été faites de façon correcte par certains candidats. D'autres ne s'en sont pas occupés.

Les notes s'échelonnent de 18 à 1,5. Sept compositions sur 34 sont supérieures à la moyenne. »

Ajoutons que la moyenne générale (6) diffère très peu de celle de l'an dernier et qu'un candidat n'a dû son succès définitif qu'à sa note de calcul numérique.

(1) Voir les énoncés pages 22 et 23 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1935*.

Géométrie descriptive (M. ROBERT). — « 34 épreuves ont été remises. Notes obtenues : 13,5 (une épreuve), 12 (une), 10,5 (une), 10 (une), 9,5 (trois épreuves), 9 (trois), 8 (six), 7,5 (une), 7 (une), 6 (quatre), 4,5 (une), 3,5 (deux), 3 (six), et 1 (trois). La moyenne est voisine de 6 ; elle est comparable à celle de l'an dernier.

Le sujet proposé comportait l'étude de l'intersection d'un ellipsoïde E, non de révolution, coupé selon des cercles par les plans horizontaux avec un paraboloïde hyperbolique P à plan directeur horizontal. On demandait de représenter la partie du volume de E située, par rapport à P, du côté du centre de E, avec éclairage par des rayons lumineux de front.

On apercevait, dès la mise en place, deux particularités :

1° au point D de l'ellipsoïde d'éloignement maximum, les deux surfaces ont même plan tangent, de front. D est donc point double de l'intersection ;

2° la droite de bout passant par le point H le plus élevé sur l'ellipsoïde est génératrice du paraboloïde P, donc tangente à l'intersection en H, et la courbe présente en H' un rebroussement apparent en projection frontale.

La méthode qui s'impose, pour la construction des tangentes au point double D, consiste, comme il est connu, à substituer à l'une des quadriques le cône de leur faisceau, ayant D comme sommet ; ce cône a encore les plans horizontaux comme plans cycliques. On définit facilement sa base dans le plan horizontal du point H, par exemple, qui est un cercle Γ .

Des valeurs numériques des données résultait une nouvelle particularité : le cercle γ projection horizontale de Γ passe par d ; donc le cône auxiliaire a une génératrice verticale. Les tangentes au point double, qui sont les génératrices d'intersection du cône auxiliaire avec le plan de front passant par D, s'ensuivent et l'une est verticale.

Cette disposition semble avoir été aperçue par neuf candidats ; trois la signalent nettement, mais la justification rigoureuse n'a été donnée par personne. Il suffisait de préciser la position du centre du cercle γ d'après sa construction, pour démontrer en quelques lignes de calcul, la particularité précédente.

La feuille jointe à l'épreuve devait permettre d'apprécier de telles justifications ; comme aucune n'a été complète, son contenu n'a eu que peu d'influence pour la fixation de chaque note. Les candidats sont prévenus qu'ils font fausse route en dissertant de manière abstraite sur les méthodes ; le temps perdu à ce remplissage serait mieux employé à améliorer les tracés. Cette année encore, quelques candidats se sont engagés, plus ou moins adroitement, dans les calculs de géométrie analytique conduisant aux équations de l'intersection ; le temps leur a manqué, les formules n'étant pas simples, d'où de piètres résultats. Dans trois compositions, le tracé de la courbe manque totalement.

Dix épreuves représentent seulement la portion de cette courbe située au-dessus du plan horizontal du point D et omettent ainsi une boucle de la courbe. Parmi ceux qui ont commis cette faute peu explicable, six n'ont pas été troublés par le point anguleux que présentait la projection frontale ; quatre autres ont senti ou indiqué l'absurdité de ce résultat et la

suppriment en pinçant les deux arcs qui aboutissent à d' , transformant ainsi ce point anguleux en point de rebroussement.

Chez les neuf concurrents qui ont dessiné une courbe correcte en projection frontale, une tendance à tracer trop tôt une figure arbitraire se retrouve, en ce qui concerne la projection horizontale ; celle-ci n'est satisfaisante que dans deux épreuves. On n'a pas vu que d était un rebroussement ordinaire pour cette projection, la tangente étant la trace horizontale du plan tangent au cône auxiliaire selon sa génératrice verticale.

Deux candidats semblant bien entraînés doivent leurs faibles notes à des erreurs de mise en place trop tardivement ou pas rectifiées. Trois de ceux qui ont abordé le tracé de l'ombre propre de l'ellipsoïde E placent inexactement le vecteur fixant la direction des rayons lumineux.

L'ombre portée sur l'entaille de l'ellipsoïde n'a été étudiée sérieusement dans aucune épreuve. Les rayons lumineux étaient parallèles au plan diamétral des cordes verticales de P ; donc, le plan diamétral de P, pour ces rayons, était vertical et les tracés étaient faciles en projection horizontale.

L'épreuve conduit aux conclusions suivantes : connaissance suffisante de la géométrie descriptive, mais vérifications, par le bon sens ou le calcul, insuffisantes, faute d'avoir traité, jusqu'au bout, des exercices d'application analogues. »

Conclusions

La liste d'admission fut arrêtée sans difficulté. Le nombre des agrégés ne devant pas dépasser 20, le Jury retint les noms des 19 candidats qui avaient atteint ou dépassé un total de 200 points (moyenne 10) pour l'ensemble de leurs épreuves. Ils se répartissent ainsi :

7 élèves de l'école normale supérieure, 4 anciens élèves dont 3 délégués d'enseignement secondaire, 2 auditeurs libres de cette école ; 3 délégués d'enseignement secondaire en plus des anciens élèves de l'école normale supérieure ; 3 étudiants des Facultés, 5 sont d'anciens admissibles.

La moyenne générale des admis est 11,53, les moyennes individuelles variant de 10,05 à 13,9. La moyenne générale des candidats éliminés est 8,5.

Un rapprochement avec les quatre concours précédents indique un léger fléchissement dans les moyennes des candidats classés dans les premiers rangs. Un renseignement précis est tiré de la comparaison des lots constitués par les cinq meilleures copies de chacune des épreuves écrites. En 1931, un candidat participait aux quatre lots, trois à trois lots, deux à deux lots. En 1932, deux candidats participaient à trois lots et cinq à deux lots. En 1933 et 1934, on trouvait encore deux candidats concourant à la formation de trois lots et deux, à deux lots. Cette année on ne trouve plus que deux candidats qui ont participé à deux lots. Il semble donc qu'une sorte de péréquation se soit effectuée, pendant la période visée, dans la valeur *scientifique* des candidats. Quoi qu'il en soit, les nouveaux agrégés, dans l'ensemble, sont dignes du titre qui leur a été conféré.

Le Président du Jury :

E. BLUTEL.