

**4. Rapport sur la composition de mathématiques
(classes de Première A, A' et B)
au Concours général des Lycées et Collèges en 1935**

210 de nos élèves de Première ont pris part à la composition de mathématiques du Concours général. Des discontinuités nettement tranchées dans l'échelle de leurs valeurs ont permis, dès une première lecture, de les classer en trois groupes inégaux, en nombre comme en mérite ; le premier, qui forme la masse, comprend les compositions qui ont été écartées après cette première lecture ; le second, qui comprend 25 concurrents seulement, est celui des compositions qui ont été réservées pour une seconde correction ; le troisième est limité à deux sujets dont la supériorité s'est affirmée immédiatement et nettement. La seconde lecture, pour les compositions des deux derniers groupes, quoique moins copieuse, a présenté plus de difficultés ; 11 concurrents ont été récompensés, par 3 prix et 8 accessits ; ce ne sont que des nuances très délicates, portant surtout sur la finesse et la pénétration du jugement, qui ont permis le classement des deux premières copies couronnées, puis de celles auxquelles ont été attribués les 8 accessits.

L'impression d'ensemble, portant sur toutes les compositions, est satisfaisante ; elle l'est dans l'absolu et plus encore par comparaison avec les années précédentes. A tous les degrés de l'échelle, le Jury a relevé des copies qui se recommandent par leur tenue, leur présentation, leur style correct, aussi bien que par leur netteté, leur logique ; quelques-unes, malheureusement trop incomplètes pour prétendre à une récompense, sont, dans le peu qu'elles ont donné, irréprochables dans la forme et le fond ; elles démontrent que, sans aptitudes mathématiques prononcées, certains sujets peuvent acquérir dans nos classes de sérieuses qualités de clarté et de distinction.

Le sujet de la composition, d'un accès immédiat, a sans doute aidé à cet heureux résultat, en permettant à chacun de donner sa mesure ; mais la meilleure part du succès revient surtout aux efforts méritoires de maîtres qui s'appliquent, dans nos classes de Première, à intégrer les mathématiques dans un enseignement de culture générale.

La question proposée aux concurrents (1) consistait essentiellement dans une étude métrique du corps solide limité par deux calottes sphériques de même base, solide dont une lentille convergente constitue un exemple, avec cette différence que l'épaisseur, qui va d'ailleurs jouer un rôle essentiel, n'en est pas négligeable, que chacune des deux calottes peut donc être supérieure à une hémisphère, et que toutes deux peuvent être placées d'un même côté ou de part et d'autre du plan de leur base commune. Diverses grandeurs sont liées à ce corps solide ; ce sont, entre autres, le rayon h de la base commune, les hauteurs (ou flèches) x, y des deux calottes, l'épaisseur $a = BC$, distance des sommets B, C de ces

(1) Voir l'énoncé page 5 des *Fascicules consacrés aux Examens et Concours en 1935*.

calottes, les distances polaires $b = AC$, $c = AB$ des deux calottes, distances de leurs sommets à un point quelconque A de leur base commune ; citons enfin l'aire totale $S = \pi r^2$ et le volume $V = \frac{\pi k^3}{6}$ représentés par

le rayon r et le diamètre k d'un cercle ou d'une sphère de même aire ou de même volume. Or les dimensions du solide peuvent être définies par 3 de ces grandeurs ; c'est manifeste en ce qui concerne h , x et y ; d'où la possibilité de calculer toutes les autres en fonction de ces 3 premières ; d'où ensuite l'intérêt de la recherche consistant à étudier si trois autres de ces grandeurs, et, plus particulièrement, l'épaisseur, l'aire et le volume peuvent être choisies pour définir le corps solide. Le calcul d'abord, la recherche ensuite, constituaient les deux premières parties du sujet de la composition ; deux autres parties, comme application, étaient consacrées à la division de l'aire S ou du volume V , en 2, 3, ou n parties égales, la division de l'aire se faisant par des cercles tracés sur chacune des calottes, de même pole sur la calotte correspondante, et celle du volume par des surfaces intermédiaires de même nature que celle du solide, ayant les mêmes sommets B, C, leurs points A étant répartis sur un demi-cercle dont une extrémité est au milieu de BC, l'autre étant sur l'alignement BC.

A quelques détails secondaires près, à quelques maladresses près également, les deux premiers lauréats ont traité complètement ce sujet ; leurs camarades qui les suivent sur la liste des récompenses n'ont pas abordé la dernière partie, la division du volume en parties égales ; un autre, qui figure également sur cette liste, n'a traité que les deux premières parties, mais en y apportant des aperçus, des remarques qui ont échappé à la plupart. Si l'on passe à l'ensemble de toutes les compositions, il n'est guère de concurrents qui n'aient apporté quelque résultat significatif. Il semble donc que l'observation répétée au cours des années précédentes, sur la médiocrité d'élèves indignes de participer au Concours général, ait été entendue ; les copies les plus faibles, plusieurs d'entre eux en ont fait l'aveu, ont été celles d'élèves qui, malheureusement, n'avaient pas encore, à la date du 24 mai, étudié les volumes des corps ronds. L'accident peut être retenu à titre d'indication ; cette étude prête en effet à de nombreuses applications ; elle donne matière à des exercices, non seulement au Concours, mais plus simplement au Baccalauréat ; il y aurait donc intérêt à l'entreprendre plus tôt ; il ne serait pas interdit, ni impossible, d'user à cet effet de la latitude accordée aux maîtres de ne pas suivre rigoureusement l'ordre du programme.

En revanche, dans ce premier calcul d'une surface et d'un volume, la majorité des concurrents a fait preuve, au contraire, de connaissances nombreuses, variées, souvent même superflues ou dangereuses ; nos élèves classent dans leur mémoire un luxe de formules qui ne répondent pas à la traduction directe d'un fait simple, concret et qui, comme telles, peuvent les exposer à des défaillances. Alors que nous approuvons volontiers ceux qui s'en tiennent à quelques notions simples et claires, à la proportionnalité, pour les aires sphériques, de l'aire de la zone et de sa hau-

teur, et, pour les volumes, au caractère commun, dans la structure géométrique comme dans l'expression numérique, à tous les volumes coniques, y compris le secteur sphérique, les autres s'adressent à l'expression des volumes du segment et de l'anneau sphériques ; ils connaissent les résultats particuliers concernant la calotte, la formule de son volume, qu'ils retrouveront plus tard, sans effort de mémoire, dès qu'ils pratiqueront les premiers rudiments du calcul intégral.

Nos élèves aiment donc les formules et le calcul ; les meilleurs les manient avec aisance et habileté ; ils déploient ainsi des qualités qui ont leur prix. Certains ont même réussi à obtenir par le seul calcul, des conclusions qu'une simple observation pouvait leur apporter immédiatement. Malheureusement, et nous arrivons ici à la remarque la plus importante relevée par le Jury sur cette composition, la plupart bornent leur horizon à cette seule pratique du calcul ; ils négligent les circonstances qui amènent ou accompagnent ce calcul, les conditions souvent restreintes dans lesquelles il s'effectue, et, fait plus grave, ils n'écourent même pas les indications que leur apporte ce calcul.

Un point, dans la composition, nous permet de préciser. Le calcul de la surface et du volume, en fonction des 3 paramètres h , x , y , ayant été établi dans la première partie, il était ensuite demandé, dans la seconde, de déterminer ces paramètres connaissant l'épaisseur, l'aire et le volume du solide. Les élèves trouvent bien dans leurs premiers calculs les équations du problème ; ils transforment correctement celles-ci, et, conduits à une équation finale destinée à déterminer une seule et dernière inconnue, ils se trouvent en présence d'une relation d'où cette inconnue a disparu. Le fait est inattendu ; il devrait étonner ; et la seule conclusion que l'on en dégage est que le problème n'a pas de solution lorsque la relation n'est pas vérifiée, qu'il en admet une infinité dans le cas contraire. Rien de plus ; c'est, dans toute sa sécheresse, la réponse à la question posée dans le texte. Rien ne trahit la surprise, la curiosité, l'émotion. La particularité ne retient pas plus l'attention que la généralité ; la vérité qui se découvre ne fait pas vibrer. Le texte y invite cependant et demande de s'arrêter ; il propose de calculer S et V en fonction des côtés a , b , c , du triangle ABC ; S est obtenu immédiatement ; V va donc l'être aussi puisque l'on vient précisément de trouver qu'il y a toujours une relation entre les trois grandeurs a , S , V . L'élève est-il un être pensant ou un excellent automate ? l'esprit va-t-il l'inspirer ? Hélas ! il ne comprend pas l'appel ; on lui demande l'expression de V en fonction de a , b , c ; il s'adresse sans réfléchir à la méthode qui serait naturelle si la question était posée à pied d'œuvre ; la première expression qu'il a obtenue de V dépend de h , x , y ; il va donc évaluer ceux-ci en fonction de a , b , c ; il rencontre une nouvelle occasion d'exercer son aptitude au calcul ; il repasse même, sans y entendre un nouvel avertissement, par des circonstances de calcul presque identiques à celles qui ont conduit tout à l'heure à la relation de condition ; et, si quelque faute malencontreuse ne lui barre pas la route, après une page de calcul, alors qu'une ligne devait suffire, il

arrive à l'expression correcte : succès dont nous ne pouvons guère le féliciter.

Nous nous excusons d'insister ; mais le mal est trop répandu. Il s'en est rencontré d'autres manifestations. Beaucoup de concurrents, de ceux qui ont été écartés à première lecture, calculant surface et volume du solide décomposé en deux calottes, ont cru devoir répéter identiquement, pour la seconde calotte, les calculs parfois assez longs établis pour la première ; ils ne soupçonnent pas ce que signifie la généralité d'un raisonnement. Ailleurs, le calcul de ces deux grandeurs, du volume principalement, se présente différemment suivant que les deux calottes sont placées d'un même côté ou de côtés différents de leur base commune ; sans parler des trop nombreuses compositions où cette distinction n'apparaît pas, le calcul pouvait se faire, en toute généralité, en donnant un sens algébrique aux deux hauteurs des calottes, x, y ; c'est ce qu'ont fait quelques-uns ; il était également naturel, à l'exemple de nos bons concurrents, de traiter successivement les deux cas ; mais les résultats, qui ne diffèrent que par le changement de signe de x ou y , mieux encore, la résolution du problème qui suivait, la recherche de h, x, y , connaissant a, S, V , devaient avertir qu'une formule unique pouvait suffire, pour S comme pour V , en y considérant x, y comme deux nombres algébriques reliés par la condition $x + y = a$. Quelques élèves, trop rares, l'ont compris ; exception où nous souhaitons trouver un indice favorable des raisons d'espérer que l'abus du mécanisme, du seul calcul, n'est pas un mal incurable.

Les quelques solutions, bonnes ou assez bonnes, apportées pour les deux dernières parties, viennent accroître nos raisons d'espérer. La division de la surface ou du volume en parties équivalentes reposait sur ce fait que, l'épaisseur a du solide restant invariable, ainsi que les sommets B, C des deux calottes, le seul élément variable dont dépendent surface et volume est $b^2 + c^2$, somme des carrés des distances de A à B et C , soit, par conséquent, la distance AO de A au milieu O de BC . La division en parties égales de l'aire $S = s + s'$, somme des aires s, s' , généralement inégales, des deux calottes, revient donc à détacher de chacune de celles-ci des calottes de même pôle, d'aires égales à $\frac{S}{n}$ ou à ses multiples ; la base

commune des deux premières calottes est un des cercles séparateurs, lorsque l'on a : $\frac{s}{s'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{p}{n-p}$, p étant un entier inférieur à n , auquel cas

A se place sur une sphère, lieu des points dont les distances à B et C sont dans le rapport constant $\sqrt{\frac{p}{n-p}}$, le centre de cette sphère étant le point de la droite CB , extérieur à BC , dont les distances à B et C sont dans le rapport commensurable $\frac{p}{n-p}$.

La division du volume procède de l'expression de ce volume, égal, à

un facteur constant près, à $\overline{OA}^2 + \frac{a^2}{12}$. Les surfaces séparatrices s'obtiennent donc en remplaçant A par les divers points A_p définis, sous une condition d'existence facile à dégager et à interpréter par la condition : $\overline{OA}_p^2 + \frac{a^2}{12} = \frac{p}{n} \left[\overline{OA}^2 + \frac{a^2}{12} \right]$, p prenant les valeurs entières de 1 à $n-1$; les valeurs de $\overline{OA}_p^2$ se succèdent donc en progression arithmétique, et, comme les points A_p sont situés sur un cercle centré sur BC et passant par O, les projections Oa_p de OA_p sur BC, proportionnelles à $\overline{OA}_p^2$ sont également en progression arithmétique, et les points a_p se succèdent sur BC à intervalles égaux.

Cette distribution des points a_p est la seule ligne du sujet qui n'ait été traitée dans aucune composition ; toutes les autres questions ont été résolues, avec plus ou moins de succès, soit par l'un, soit par l'autre.

C'est de cette considération, et des qualités sérieuses qui se sont révélées chez la grande majorité, des plus faibles aux meilleurs, que se dégage l'impression satisfaisante donnée cette année par ce Concours. L'impression est satisfaisante en ce qui concerne la masse qui réussit à manier correctement, logiquement, l'appareil mathématique élémentaire. Elle ne l'est pas au même degré en ce qui concerne l'élite qui n'arrive pas encore à dominer l'appareil sans en être l'esclave ; l'étincelle qui éclaire ne jaillit pas assez souvent ; de là des réserves dans notre satisfaction ; le succès de l'ensemble serait payé trop cher si sa rançon était l'obscurité sur les sommets.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

A. TRESSE.