

3. Rapport sur la composition de mathématiques (classe de Mathématiques) au Concours général des Lycées et Collèges en 1935

Jusqu'à ces derniers mois, j'ai pu espérer que M. BLUTEL, poursuivant une œuvre de treize années, continuerait à présider les opérations du Concours général de la classe de Mathématiques, et que j'y prendrais part sous sa direction, comme l'an dernier, comme jadis à partir de 1922. Il ne l'a pas voulu. Nous avons à le regretter vivement. Mais, comment ne pas dire que, pas plus que moi-même, les lecteurs de ce rapport, particulièrement ceux qui ont été appelés à le seconder au Concours général, ne pourront détacher leur pensée de l'action profonde qu'il a exercée sur l'enseignement, et que, personnellement, je ne saurais aborder mon sujet sans le remercier de ses conseils et de la bienveillance avec laquelle il suit nos efforts.

Le problème proposé aux candidats en 1935 (1) est relatif à l'hyperbole équilatère (H) de centre O, de sommets A, A', d'axes (D) et (D') (le premier étant l'axe transverse), définie comme lieu des points M tels que, dans le plan orienté, la somme de l'angle des droites portant OA, AM et de l'angle des droites portant OA, A'M soit égale à $\frac{\pi}{2}$. Cette définition revient presque immédiatement à celle-ci : L'hyperbole (H) est le lieu des points de contact des tangentes perpendiculaires à AA' aux cercles (C) passant par A et A'. Ce qui caractérise la figure, c'est, Mh étant la hauteur du triangle AMA', que les deux triangles rectangles AMh, MA'h sont inversement semblables, ou encore, c'est l'égalité $\overline{hM}^2 = \overline{hA} \cdot \overline{hA'}$. Il s'agit là de propriétés classiques (que de fois avons-nous lu dans les copies : Le triangle A'AM est pseudorectangle) et on comprend qu'elles soient rappelées en détail au début de l'énoncé pour que tous les élèves se trouvent, autant qu'il est possible, placés dans les mêmes conditions.

La première partie du problème concerne la détermination de la tangente à (H) en M, au moyen d'un passage à la limite opéré après considération des deux cercles (C) et (C'), de centres k et k', qui passent par les points M et M' de l'hyperbole. Comme M et M' sont du même côté de (D'), kM, k'M' sont parallèles et de même sens et MM' coupe (D') au centre d'homothétie direct U₁ des cercles (C) et (C'). La droite AU₁ est bissectrice extérieure dans le triangle Akk', de sorte que la limite U de U₁, si M' variable tend vers M fixe, est le pôle de AA' par rapport au cercle (C), ce que l'on peut traduire en disant que la tangente MTU (T sur Ox) est la polaire de h par rapport au cercle (C). L'énoncé introduit aussi les points N et P où la normale en M à (H) coupe (D) et (D') et il est demandé de construire les divers points signalés, à partir de l'un d'entre eux, le but de cette question étant d'inviter les candidats à bien pénétrer, en vue de la suite, une figure importante, et riche d'appli-

(1) Voir l'énoncé page 4 des *Fascicules* consacrés aux *Examens et Concours en 1935*.

cations simples portant sur les compléments du troisième livre. Nous ne pourrions mieux résumer la pensée de l'auteur dans cette mise en route du problème qu'en reproduisant une phrase d'un candidat : Ces propriétés de l'hyperbole équilatère s'obtiennent sans considérer ni les foyers, ni les directrices, ni les asymptotes.

Dans la seconde partie du problème, on considère les points M et N en lesquels une droite passant par O coupe (H), et les inverses m et n de ces points dans l'inversion de pôle O et de puissance $\overline{OA}^2$. On demande de prouver que les points m et n sont les sommets d'une hyperbole équilatère passant par A et A'. Cette proposition résulte de l'égalité $\frac{OA}{OM} = \frac{Om}{OA'}$, ou mieux, de la similitude inverse des triangles OAM, OmA, cas particulier de la figure, fondamentale dans l'inversion, formée par deux couples de points inverses. La question se rattache aussi à la première définition de l'hyperbole (H), l'évaluation des angles résultant encore des premières propriétés de l'inversion ou pouvant être obtenue directement en remarquant que le point m par exemple est sur le cercle NAA', et sur le cercle tangent en A à OA et passant par M.

La troisième partie associée à un cercle (C) circonscrit au triangle AAM le cercle des neuf points (C₁) de ce triangle. Le cercle (C₁) a pour centre le milieu k_1 de Oh. Le point I qui divise kk_1 dans le rapport constant défini par la relation $\overline{Ik} + \lambda \overline{Ik}_1 = 0$, et dont on demande le lieu, décrit une hyperbole d'axes (D) et (D'), car on passe de M à I par deux affinités particulières, l'une d'axe (D) qui fait correspondre au point M le point J de hM tel que IJ soit parallèle à (D), l'autre d'axe (D') qui fait correspondre I à J. La tangente en J à l'hyperbole que décrit ce point est la droite JT qui coupe (D') en V. La droite IV est la tangente en I au lieu cherché. Les propriétés géométriques développées à la première partie permettent aisément de montrer que pour $\lambda = 4$, cette tangente est constamment perpendiculaire à kk_1 , ce qui montre géométriquement que kk_1 reste normale à une hyperbole. En ce moment, nous insistons sur des questions bien faciles. La raison en est que toutes les solutions de ce commencement de la troisième partie, rencontrées par le jury, sont analytiques. Aucun élève n'a véritablement décomposé la transformation de M à I en deux réductions ou amplifications, dans un rapport constant, d'abscisses ou d'ordonnées. Aucun n'a utilisé, pour trouver la tangente en I, le fait que dans les affinités dont nous venons de parler, les tangentes aux points correspondants se coupent sur l'axe.

J'ai hâte, d'ailleurs, d'atténuer la rigueur de cette remarque en disant que le meilleur candidat a, en peu de lignes, montré que l'axe radical des cercles (C) et (C₁) s'obtient en joignant le milieu de hM au point T et que, par suite, son enveloppe est une hyperbole déduite de (H) par affinité. Ainsi qu'on le voit, la construction de cet axe radical est des plus simples. Le fait que cette droite passe par T est tout simplement une propriété de la division harmonique ($\overline{TA}, \overline{TA'} = \overline{TO}, \overline{Th}$) qui mériterait

d'être davantage connue et utilisée dans nos classes. On peut encore remarquer que l'axe radical est perpendiculaire à kk_1 et se servir des résultats obtenus à la fin de l'étude du lieu du point I. Enfin, je voudrais noter que nos élèves, pour la plupart embarrassés dans la construction de l'axe radical, avaient à leur disposition un moyen général d'y parvenir. Deux droites fixes (D), (D') jouent un rôle remarquable dans la figure. Pourquoi ne pas trouver les points où la droite cherchée coupe ces deux droites, en résolvant des équations du premier degré ? On retrouve, presque sans calculs, T sur (D), le milieu de OU sur (D'). Ces notions de géométrie analytique à une dimension sont d'un grand secours lorsque l'imagination géométrique fait défaut ; elles sont entièrement dans l'esprit de nos programmes. Trop de nos élèves les négligent et préfèrent s'épuiser d'efforts toujours vains dans l'ordre de la géométrie analytique à deux dimensions, au delà des parties qui leur sont accessibles. L'un d'eux qui, sans aucun doute, a commencé seul l'étude des mathématiques spéciales, n'a-t-il pas formé l'équation de l'axe radical et commencé à prendre la dérivée par rapport au paramètre ?

La quatrième partie étudie des propriétés élémentaires des deux cercles passant par deux points M et M' de l'hyperbole et passant respectivement par A et A'. Du fait que les angles MAM', MA'M' sont égaux et de sens contraires, on conclut que ces cercles sont symétriques l'un de l'autre par rapport à MM' ; d'où la propriété concernant les orthocentres des triangles AMM', A'MM'.

Quant au rapport $\frac{OA}{OA'}$ (O est le point où MM' coupe AA'), on voit aisément par exemple en retournant l'un des deux cercles autour de MM' et en appliquant les premières propriétés de l'inversion, qu'il est égal à $\frac{AM \cdot AM'}{A'M \cdot A'M'}$. Dans le cas limite où M' est venu en M, on obtient l'égalité $\frac{AM^2}{AT} = \frac{A'M^2}{A'T}$, qui non seulement prouve l'égalité des cercles tangents en M à (H) mais suggère encore un procédé pour calculer leur rayon, $\frac{AM^2}{2AG}$, G étant le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur la tangente en M. Il serait d'ailleurs aisé d'obtenir ce rayon en cherchant la limite de $\frac{MM'}{2 \sin MAM'}$. Mais, au sujet de ce calcul, le mieux est de donner la parole au premier des lauréats : Soit B le point d'intersection de la normale en M avec la médiatrice de A'M. Les deux triangles BkM, MAO, sont semblables et donnent l'égalité $\frac{MB}{kM} = \frac{OM}{OA}$.

Arrivons à la cinquième partie, sans insister sur les autres questions posées sur ces cercles. Le but de cette dernière partie est de mettre en évidence qu'étant donné un triangle AMA', les cercles égaux passant res-

pectivement par A et A' et tangents entre eux en M n'admettent pas en général pour tangente en M la conjuguée harmonique de la hauteur par rapport aux deux côtés. Une inversion de pôle M donne une solution élégante de la cinquième partie. Les candidats (sauf un) n'ont pas vu le lien entre cette partie et la précédente et se sont bornés tout au plus à montrer qu'en général la ligne des centres des deux cercles tangents en M est conjuguée harmonique du rayon du cercle circonscrit passant en M par rapport aux perpendiculaires aux deux côtés. Il peut encore être intéressant de montrer que la tangente en M aux deux cercles, qui traverse nécessairement le triangle, fait avec les côtés MA, MA' des angles α , α' qui sont deux angles d'un triangle de côtés opposés MA, MA', l'angle compris étant $\pi - \hat{M}$.

Arrêtons là des indications destinées à préparer les remarques que nous allons maintenant présenter sur les résultats du concours.

Il y a eu 190 concurrents. Après une première lecture, 30 compositions ont été retenues en vue d'une seconde correction. Les notes définitivement attribuées aux copies retenues s'échelonnent de 70 à 30 environ (maximum 100). Le premier prix est remporté de haut. Notons encore qu'il y a 25 copies blanches et 65 dont la note ne dépasse pas 10 sur 100.

Comment apprécier ces résultats qui sont, numériquement, du même ordre que ceux de l'an passé ? La question est bien délicate. Il faut, ou il faudrait en particulier tenir compte du niveau général de l'année, de la présence d'éléments exceptionnellement doués, de la difficulté d'utiliser fidèlement les souvenirs laissés par des concours anciens, et aussi du niveau du problème. Celui-ci est facile et se prête peut-être aisément aux appréciations générales. Il énumère des propriétés variées dont le lien n'est pas tel qu'on soit arrêté dans l'examen indépendant des diverses parties.

Effectivement, les élèves ont suivi leur inspiration dans telle ou telle partie, et nous avons eu des impressions satisfaisantes pour ce qui concerne le goût des mathématiques, le désir de l'examen personnel, l'imagination, à peu près tout ce qui touche au don. Ce qui laisse à désirer, ce qui est en baisse par rapport aux années qui vont de 1922 à 1926, c'est la précision, la force de logique, une connaissance plus assurée des faits, en un mot tout ce qui s'acquiert, tout ce qui touche à la culture.

Ai-je besoin de dire que ni la valeur, ni le dévouement de nos professeurs ne sont en cause ? Les raisons de ces insuffisances sont bien connues. Comme les Mathématiciens, les Physiciens s'en montrent émus. Nous avons accumulé en mathématiques, dans la classe de Mathématiques, des notions nouvelles trop nombreuses. Pourtant, il n'est pas possible d'élaguer dans nos programmes. Les nécessités des carrières scientifiques sont là. Et bien souvent les maîtres de l'enseignement supérieur signalent des lacunes. Pour prendre un exemple, que de fois ne nous a-t-on pas dit que nos élèves devraient connaître la fonction exponentielle aussi bien

que la fonction linéaire ? Dans ces conditions, il faut souhaiter qu'un nouvel aménagement devienne possible, grâce auquel on amorcerait certaines questions en Seconde et en Première pour alléger l'effort de la classe de Mathématiques.

Il me reste maintenant à signaler les remarques d'ordre plus précis, soit générales, soit individuelles, faites par le jury.

D'abord, l'abus d'une géométrie analytique trop élevée, ainsi que je l'ai dit déjà. On sait que l'équation en coordonnées polaires de l'hyper-

bole (H) est $\varphi = \frac{\pm a}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, que la courbe $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ est

une lemniscate. A ce sujet, une phrase est à citer textuellement : « La lemniscate est l'inverse de (H) par rapport au cercle principal pris pour cercle d'inversion. Elle est aussi la podaire de (H) par rapport : En effet on sait que (H) est sa propre réciproque par rapport à son cercle principal et que la podaire d'une courbe par rapport à un point est l'inverse de sa réciproque. » Tout cela à propos de la seconde partie, après une vue purement algébrique du fait géométrique le plus simple, similitude inverse en évidence.

Cette tendance à ne plus voir les choses directement mais à travers l'appareil algébrique est marquée. De nombreux candidats, dans la première partie, ne déterminent le point U que par voie analytique. Beaucoup d'entre eux, chose curieuse, ne calculent par y'_x mais usent d'arti-

fices pour chercher la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Il en est d'ailleurs plusieurs qui se

redressent fort bien et reviennent à la géométrie pour placer les divers points et les construire. Dans la troisième partie, on calcule les coordonnées de I en fonction de celles de M sans aucune remarque géométrique.

Le souci des réciproques n'est pas suffisant. Ou bien elles sont négligées, ou bien elles sont traitées lourdement et séparément. La notion de conditions équivalentes n'est pas encore assurée. Les relations $x^4 = (x^2 - a^2)^2$, $y = \sqrt{x^2 - a^2}$, sont considérées comme manifestement équivalentes à $y^2 = x^2 - a^2$.

L'abus des formules générales de la trigonométrie, particulièrement dès la définition de l'hyperbole (H), est frappant. Par contre, il n'y a pas assez de souplesse ni d'aisance dans les applications si fréquemment rencontrées de formules plus simples ($\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 1$ pour $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, $a = 2R \sin A, \dots$) à l'étude des figures.

On ne domine pas encore assez les questions d'orientation. Même les bons élèves de la classe de Mathématiques écrivent trop couramment, $Oh = x$, $Ok = y$. Ou bien, les égalités $\overline{hM}^2 = hA \cdot hA'$, $\overline{hM}^2 = \overline{hA} \cdot \overline{hA'}$, sont regardées comme équivalentes, alors que tout le problème repose sur l'idée contraire. Il y a une confusion trop fréquente entre l'orientation

d'un plan et l'orientation des droites de ce plan, de sorte que la notion de l'angle d'une première et d'une deuxième droite, toutes deux illimitées, dans un plan orienté, n'est pas bien saisie. Notons cependant que quelques élèves ont montré le souci de ces nuances en rattachant nettement le début de la quatrième partie au début de la première, et cela nous console de cette affirmation : Les deux cercles AMM' , $A'MM'$ sont donc confondus, et aussi d'une autre qui conduirait nettement à cette idée que l'orientation du plan entraîne nécessairement le choix des axes sur toutes les droites du plan.

Les appels à la mémoire et les ré citations inutiles de tranches de cours, tout en étant moins fréquents qu'autrefois, se manifestent toujours. Plusieurs copies, avant même qu'il ait été question des triangles rectangles AMh , $MA'h$, donnent la démonstration du théorème en vertu duquel les coniques à centre sont caractérisées par l'égalité $\overline{hM^2} = \lambda. \overline{hA}. \overline{hA'}$. L'utilisation inconsidérée des foyers dans la première partie est fréquente. Mais il y a lieu de complimenter le bon élève qui déduit de l'étude proposée que le cercle de diamètre UP passe par deux points fixes. Un excellent esprit n'observe pas que MTU est la polaire de h par rapport au cercle (C) ; il préfère fouiller dans ses connaissances et dire : MTU est symédiane, donc..... Signalons encore « qu'une transformation qui projetterait un cercle suivant une hyperbole équilatère donnerait une solution aisée du problème » : Quant à la tangente en M , trop souvent, elle ne peut évidemment être que la bissectrice de l'angle des rayons vecteurs MA , MA' .

On trouve, curieusement mêlés, une confiance absolue dans les résultats qu'annonce le texte, et un dédain complet pour les insistances et les suggestions qu'il renferme.

De trop nombreuses copies sont matériellement négligées. Les notations du texte sont parfois modifiées, ou il arrive qu'un même point soit représenté de plusieurs manières différentes, ou encore qu'une même lettre représente plusieurs points sur une figure. Parfois, certaines figures manquent.

L'orthographe est toujours peu soignée : « c'est angle », au lieu de cet angle, « déterminer », au lieu de déterminer, « hors », au lieu de or, les « neufs » points... Toutefois, il semble que ces fautes se rassemblent dans certaines copies au lieu d'en déparer un trop grand nombre. Une copie en contient plus de vingt : sa rédaction est mauvaise ; les abréviations y sont excessivement répandues. Cette copie était retenue ; les résultats mathématiques qu'elle renferme pouvaient lui permettre d'entrer en ligne pour l'attribution du dernier accessit : elle a été unanimement écartée en raison de ces négligences.

L'Inspecteur général, Président du Jury,

TH. LECONTE.